

数学的ゲームの高校教材化

1190479 島 遼我

高知工科大学 経済・マネジメント学群

1. 概要

本研究では、ニムやそれに関連した内容を高校教材として扱うために、組合せ論を学び、実際に教材化することを目的とする。

2. 背景

高等学校学習指導要領数学編において、数学科の目標として、「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学の良さを認識し、それらを積極的に活用して数学的根拠に基づいて判断する態度を育てる」とある。そこで、高校生にも理解しやすいニムを扱う。また、教材として授業で取り扱う際に、グループ活動を取り入れることで、「主体的、対話的で深い学び」を実践し、「思考力・判断力・表現力」を養う事を目的とした「数学的活動」にも活躍を期待する。

3. 目的

全国学力学習状況調査により、現在の中学生の数学に対する課題として次の点が挙げられている。

- ・不確定な事象の起こりやすさの傾向を捉え、判断の理由を数学的な表現を用いて説明すること
- ・事象を数学的に解釈し、問題解決の方法を数学的に説明すること

以上の二つが全国学力学習状況調査で挙げられている課題の中から特に重要だと考えた課題である。

また、基礎問題の正答率に比べて、応用問題の正答率が大幅に下落しており、単に基礎問題に対する応用問題の難易度の向上だけでは済まされず、基礎を活かす対応力が低いと考えられる。また、数学に対する苦手意識も問題となっている。以上のことは高校数学に対しても同様のことが言えると考えられる。

この他にも、起こりうる事象をすべて考え、書き示すことに抵抗を持っている生徒が多いことも問題になっている。

本研究では、ニムを扱い、教材化することで、数学に対する

興味・関心を引き出し、上記の課題の解決を目指す。

4. 離散数学とは

現代の数学は大きく分けて四つの分野に分けることができる。

- ・代数学
- ・幾何学
- ・解析学
- ・その他（応用数学、離散数学など）

このうち、離散数学とは、原則として離散的な対象、有限個の対象を扱う分野である。離散数学の中核をなす分野として、組合せ論やグラフ理論などが挙げられる。他の分野に比べて新しい分野である。

5. ニムとは

5.1 ニムとは

ニムとは以下のルールからなるゲームである。

- ・このゲームは2人のプレイヤーで行われる。
- ・各プレイヤーは、交互に1つの山から1個以上の任意の数（全部でもよい）だけ石をとり合う。
- ・石を取る山は、毎回いずれか任意の（石の残っている）1山を選ぶ。
- ・パスは許されず、最後に石をとって全ての山を空にしたプレイヤーを勝者とする。

このゲームの山における山はいくつあってもよく、必勝法も同様のものを用いる。しかし、二山に関しては三山以上の必勝法に比べて、比較的簡単に考えることのできる必勝法も存在するため、分けて示す。本質的には三山以上の必勝法と同様である。また、四山以上は三山と同様の必勝法であるため、以下では、三山の必勝法を示す。

5.2 用語

ここではゲームにおけるニムの用語を説明する。

1. 二山のニムにおいて、対称形とは、二山の石の数が等しい形のことである。
2. 対称戦略とは、相手に対称形を渡し続ける戦略のこと

である。

3. 非対称形とは、二山が対称でない形のことである。

4. 負け形とは、どんな手を打とうとも、相手が最善の手を打てば負けてしまう形のこと、すなわち、その手番での後手必勝形のことである。

5. 勝ち形とは、最善の手を打てば勝てる形のこと、すなわち、その手番での先手必勝形のことである。

8. 数を2のべきの和で表すことを二進分解という。

9. 三つの山(1, m, n)が二進対称とは、1, m, nを二進分解したとき、各自然数kに対する2のべきが三つの山の中に偶数個(0か2)現れることである。

10. 逆に、ある2のべきが三つの山の中に奇数個現れたら二進非対称という。

11. 9と10においては4個以上のときも同様のことがいえる。

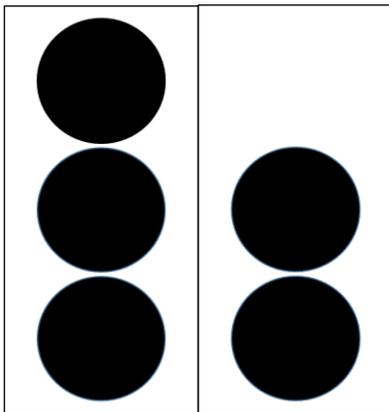
5.3 必勝法

・二山における必勝法

二山のニムにおける必勝戦略は対称戦略をとることである。また、ゲーム開始時の二山が非対称形であれば先手必勝、対称形であれば、後手必勝となる。

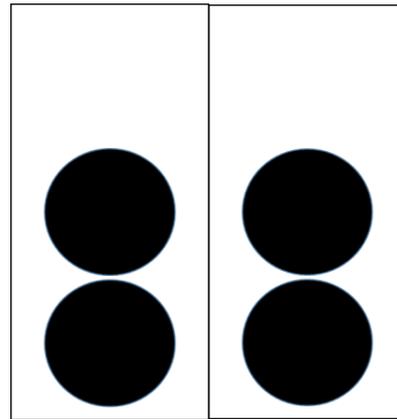
(例) 2個と3個の石からなる二山のニムにおける必勝戦略

それぞれ2個と3個からなる2山が存在する。(図1)



A B (図1)

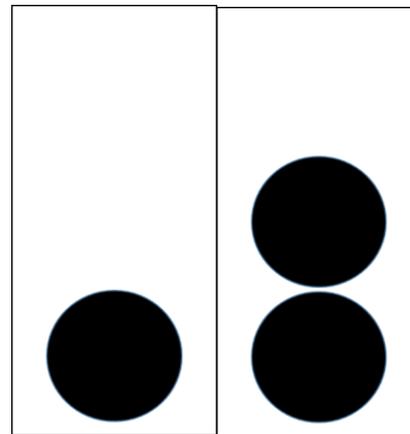
対称戦略をとると、先手はAの山から1個石をとる。(図2参照)



A B (図2)

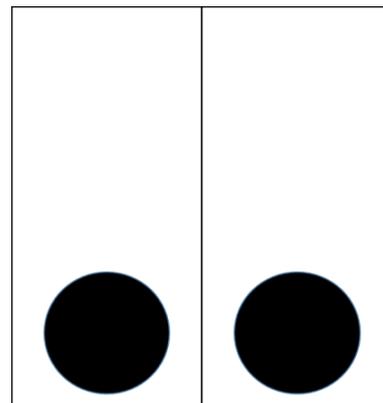
この後の後手の戦略として2パターンある。

(i) 片方の山から石を1つだけとる場合
Aの山から石をとることとしてよい。(図3参照)



A B (図3)

対称戦略をとると、先手はBの山から一つ石をとる。(図4参照)

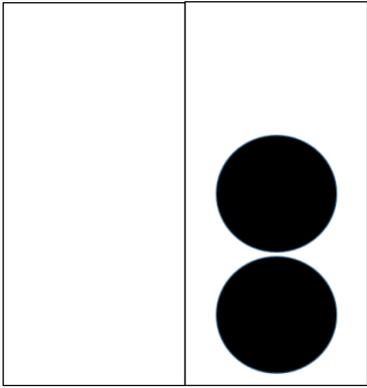


A B (図4)

ルールより、後手はパスもできず、片方の山からのみ石をとることができるため、最後の石をとることができない。よって対称戦略をとり続けた先手の勝ちである。

(ii) 片方の山から石を2つとる場合

Aの山から石をとることとする。(図5参照)



A B (図5)

この後、先手はBの山から残りの石をとればよい。よって、対称戦略をとり続けた先手の勝ちである。

以上より、対称戦略をとり続けることが二山における必勝法である。

・三山における必勝法

ブートンの定理

ニムの負け形は二進対称形、勝ち形は二進非対称形であり、勝ち形(すなわち二進非対称形)の場合の必勝戦略とは、二進対称形にして相手に手番を渡し続けることである。

[証明]

ブートンの定理を証明するには、

①二進対称形に手を加えると必ず二進非対称形になる。

②二進非対称形にはそれを二進対称形にする手段が存在する。

という二つの事実を確認する必要がある。

まずは、①についての証明を行う。

二進対称形 $(1, m, n)$ から一手打つと必ず二進非対称形になることを示す。このとき、1の山から石を取るとしてよい。

手を打った後の山を $(1', m, n)$ とする。

1, 1'を二進分解したとき、1にあるが1'にない最大の2のべきを 2^k とする。このとき、 2^k は $(1', m, n)$ に奇数個ある。

よって、 $(1', m, n)$ は二進非対称形である。

次に②についての証明を行う。

$(1, m, n)$ を二進非対称形とする。

1, m, nを二進分解したとき、奇数個現れる2のべきを

$2^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, 2^{a_s}$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_s \geq 0$) (*1)

とする。このとき、 2^{a_1} を含む山Aを一つとり、(*1)のうち 2^{a_1} 以外で

山Aに含まれるものを

$2^{b_1}, 2^{b_2}, \dots, 2^{b_t}$

残りを

$2^{c_1}, 2^{c_2}, \dots, 2^{c_u}$

とする。

このとき、山Aから

$2^{a_1} + 2^{b_1} + 2^{b_2} + \dots + 2^{b_t} - (2^{c_1} + 2^{c_2} + \dots + 2^{c_u})$ (> 0)

個石をとると、二進対称形が得られる。

以上からブートンの定理は証明された。

すなわち、三山におけるニムの必勝戦略とは、三山 $(1, m, n)$ をそれぞれ二進分解し、二進対称形にして、手番を渡し続けることである。

(例)

$(11, 7, 3)$ からなる三山のニムを考える。

それぞれ

$11 = 2^3 + 2^1 + 2^0$

$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$

で表せる。この三山は二進非対称形である。

必勝戦略は二進対称形にして相手に手番を渡すことなので、奇数個存在する $2^0 = 1$ 個を三山のどこからでもいいので、取り、二進対称形を作れば勝てる。

また、四山以上のニムも存在するが、必勝法は三山の必勝法と同様である。証明も同様に説明される。

6. ポーカーニムとは

ポーカーニムとは以下のルールからなるゲームである。

- ・このゲームは2人のプレイヤーで行われる。
- ・各プレイヤーは、交互に1つの山から1個以上の任意の数(全部でもよい)だけ石を取り合う。
- ・石を取る山は、毎回いずれか任意の(石の残っている)1山を選ぶ。
- ・パスは許されず、最後に石を取って全ての山を空にしたプレイヤーを勝者とする。

・以前の手で獲得した石のいくつかを一つの山に加えることができる。

このゲームは本質的にはニムと変わらないが、大きく異なるのは「以前の手で獲得した石のいくつかを一つの山に加えることができる」という点にある。

以下では、ポーカーニムの必勝法を示す。

もし、二進対称形で相手に手番を渡したとき、相手の所持する石を加えられた場合、加えられた石をそのまま取ればいいのである。すると、二進対称形の状態で相手に手番を渡すことができる。その後、相手が石を加え続けても同様にすれば、最終的に相手の手持ちの石がなくなり、相手は二進対称形を崩さなくてはいけなくなる。あとは、ニムと同様の必勝戦略をとればよいのである。

このように、ポーカーニムはニムと本質的に同様である。

7. 教材化

ニムを全国学力学習状況調査で示されている課題と合わせて教材を作る必要がある。また、高等学校学習指導要領数理編に求められている授業に即した授業展開に注意する。

ニムの必勝法を考える展開では、まず、二山のニムの必勝法を見つける。その後、三山以上の必勝法は二山の必勝法を見つける際に注目した点に意識を向け、必勝法を探る。ここでは、高等学校学習指導要領の数学科の目標である「数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学の良さを認識し、それらを積極的に活用して数学的根拠に基づいて判断する態度を育てる」の達成を目指す。また、ポーカーニムを用いることで、基礎問題が理解できても、応用問題の課題解決力に課題があるという問題点の改善を目指す。ポーカーニムは新たに加えられたルールを除けば、ニムと変わらず同様の必勝法で解決するのに対して、新たなルールに惑わされゲームが難しくなると錯覚する生徒も多いと考える。この点は、普段の学習にも同様のことがいえる。問題の本質は変わっていないにも関わらず、さまざまな情報に戸惑う生徒も少なくない。全国学力学習状況調査の結果、基礎問題に対して、大幅に応用問題の正答率が悪いのも、この点にあると考える。しかし、情報の取捨選択と、情報から与えられている新たな情報を見誤らないように訓練すれば学力向上が見込めると考え

る。

また、ニムの必勝法を考える際に、実際にニムを生徒同士で対戦させ、必勝法を知りたいという知的好奇心を刺激させるような授業展開になるよう、アクティブラーニングを実践する。

以上に注意してニムを教材化する。

8. 教材（授業指導案）

別ページ

9. 参考文献

半沢英一『ヘックス入門 天才ナッシュが考えた数学的ボードゲーム』ビレッジプレス, 2013年

Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy
『数学ゲーム必勝法1』共立出版, 2016年

数学科 学習指導案

担当者（島遼我）

日時・場所

年次・クラス （数学演習 二ム）

1 単元名

2 単元の目標

3 単元について

(1)教材観

(2)生徒観

(3)指導観

4 単元の評価規準

関心・意欲・態度	数学的な見方・考え方	表現・処理	知識・理解
二ムに関心をもつとともに、与えられた課題の解決に活用しようとする	数学的な見方や考え方を身につけ、二ムの必勝法について考察することができる	二ムの必勝法を数学的に表現し、処理できる	二ムにおける基本的な内容、原理・法則、用語などを理解し、基本的な内容を身につけている

5 指導計画

- ①二山における必勝法を見つけ、三山の必勝法を考える
- ②三山の必勝法を理解し、ポーカー二ムの必勝法を見つける

本時の目標：二山における必勝法を見つけ、三山の必勝法を考える

段階・時間	学習活動	指導上の留意点	評価規準・評価方法
<p>【導入】 5分</p>	<p>二山のニムを考える</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>ニムのルール</p> <ul style="list-style-type: none"> ・このゲームは2人のプレイヤーで行われる。 ・各プレイヤーは、交互に1つの山から1個以上の任意の数（全部でもよい）だけ石を取り合う。 ・石を取る山は、毎回いずれか任意の（石の残っている）1山を選ぶ。 ・パスは許されず、最後に石を取って全ての山を空にしたプレイヤーを勝者とする。 </div> <p>班に分け、その中の二人一組で二山のニムを行う。 それぞれの班で違う問題を配布する</p>	<p>最初はルール以外の情報を与えず、ニムをさせる。</p>	
<p>【展開①】 20分</p>	<p>必勝法について班ごとに意見を交換し、発表する。 期待する意見：二つの山の石の数が同じになるように石を取る</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>二山のニム 必勝法</p> <p>二山のニムにおける必勝戦略は対称戦略をとることである。 また、ゲーム開始時の二山が非対称形であれば先手必勝、対称形であれば、後手必勝となる</p> </div>	<p>生徒の興味・関心を引き出すよう、必勝法があると伝える。</p> <p>実際のニムを用いて感覚的に理解させる</p>	
<p>【展開②】 20分</p>	<p>三山のニムを考える 班に分け、その中の二人一組で三山のニムを行う。 それぞれの班で違う問題を配布する</p> <p>必勝法について、班ごとに意見を交換する。</p>	<p>二山と同様に必勝法があるのではないかと思わせる</p>	
<p>【まとめ】 5分</p>	<p>次回、各班で話し合ったことを発表するため、班ごとに意見をまとえることを宿題とする</p>		

本時の目標：三山の必勝法を理解し，ポーカーニムの必勝法を見つける

段階・時間	学習活動	指導上の留意点	評価規準・評価方法
<p>【導入】 10分</p>	<p>前回、各班で話し合ったことを発表させる 期待する意見：必勝法はない。必勝法はあると思うが、なにかはわからない</p>		
<p>【展開①】 20分</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p><u>三山のニム 必勝法(ブートの定理)</u></p> <p>ニムの負け形は二進対称形，勝ち形は二進非対称形であり，勝ち方（すなわち二進非対称形）の場合の必勝戦略とは，二進対称形にして相手に手番を渡し続けることである。</p> </div> <p>〈証明〉 本文参照</p>	<p>証明は生徒に紹介する程度に収め，感覚的に理解させる</p>	
<p>【展開②】 15分</p>	<p>ポーカーニムを考える</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>ポーカーニムのルール</p> <ul style="list-style-type: none"> ・このゲームは2人のプレイヤーで行われる。 ・各プレイヤーは，交互に1つの山から1個以上の任意の数（全部でもよい）だけ石を取り合う。 ・石を取る山は，毎回いずれか任意の（石の残っている）1山を選ぶ。 ・パスは許されず，最後に石を取って全ての山を空にしたプレイヤーを勝者とする。 ・以前の手で獲得した石のいくつかを一つの山に加えることができる </div> <p>班に分け，その中の二人一組でポーカーニムを行う。 それぞれの班で違う問題を配布する 必勝法について班ごとに意見</p>	<p>以前のニムと何が違い，どのように影響をもたらすかを考えさせることに注意する</p> <p>これまでのニムとの違いを意識しながらポーカーニムを行う事を強調する</p>	

	<p>を交換し，発表する. 期待する意見：必勝法なし．必勝法はあると思うが分からない．ニムと同様の必勝法でよい</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>ポーカーニムの必勝法 ニムと同様の必勝法で良い</p> </div> <p>相手がどれだけ石を増やそうと，増やした石をその都度取れば，最終的に相手の手持ちの石はなくなり，ニムと同様のゲームになる</p>		
<p>【まとめ】 5分</p>	<p>一見，難しい問題でも，よく考えれば既習のことで解決できる</p>		