

ミニアバロンの必勝戦略

1190574 若泉 俊貴

高知工科大学 マネジメント学部

1. 概要

本研究は、ボードゲームにおける定理や戦術を学び、アバロンにおける必勝戦略を見つけ出すことを目的とする。

2. 背景

現在、数学教育では画一的な問題を覚える学習から一つの問題を発展させていく学習を主流にする流れになってきている。ただ数式を覚えるだけではなく、なぜその数式を使うのかを生徒自身が考え、数学的思考力を身に付けさせることが重要となっている。

だが、発展的な能力を身に付けることは画一的な学習と比べて非常に難しく、全国学力学習状況調査を見ても日本の児童が発展的な能力を身に付けられていないことが分かる。

私は、児童が発展的な能力を身に付けるためには自分から学ぶ意欲が一番重要であると考えます。数学を学校のテストで使うだけでなく、日常生活、ひいては将来の職業において使うことを生徒に気付かせることで学ぶ意欲を促進させることが出来ると考えた。また、親しみやすい「ゲーム」という内容で、数学的思考力を鍛えるという目的もある。

3. 目的

アバロンは、あえて数学の分野に分けるならば離散数学に当てはまる。数学的思考も鍛えながらアバロンの必勝戦略の探求を行い、本研究を通して数学の魅力と活用性を児童に伝える手助けにしてみたい。

4. 離散数学とは

現代の数学は大きく分けて、

- ・代数学
- ・幾何学
- ・解析学
- ・その他（応用数学、離散数学など）

の四つの分野に分けることが出来る。

このうち、その他に含まれる離散数学とは、原則として離散

的な対象を扱う数学である。離散数学の中核をなす分野として、組合せ論やグラフ理論などが挙げられる。また、学校教育の中で教えられているものには、行列、集合、順列、組合せ論理と証明、帰納法と漸化式、数列などがある。

5. 有限ゲームとは

ゲームというと、一般にはテレビゲームなどもゲームと呼ばれるが、本論文におけるゲームとは、二人のプレイヤーによって行われる古典的なボードゲームのことを指すものとする。

ゲームはいくつかの基準で分類をすることができる。まず、プレイヤーに対しゲームの状況の情報が完全に与えられているか否かという区別がある。ゲームの状況が、サイコロやカードのシャッフルなど運に依存しているか、あるいは相手のカードなどが見られず推測にしか頼れないゲームは、不完全情報ゲームと呼ばれる。逆に、プレイヤーに対してゲームの状況が情報としてすべて与えられ、自他の技量だけが勝敗を左右するゲームは完全情報ゲームと呼ばれる。例えばオセロやチェス、将棋などは完全情報ゲームである。

さらに完全情報ゲームは、有限ゲームとそうでないゲームの二種類に分けることができる。完全情報ゲームの中でも「着手の選択肢が有限である」「ゲームが有限回の着手で決着する」という二つの性質をもつものを有限ゲームといい、この性質のどちらか一方でも満たさないものは有限でないゲームという。例えばオセロは、ゲーム盤のマス目の数や、置いてある石が有限であることから「着手の選択肢が有限である。」ことが分かり、ゲームの性格から有限回でルール上可能な手が無くなってしまふことから「ゲームが有限回の着手で決着する。」ことが分かる。よって、オセロは有限ゲームである。

6. ツェルメロの定理

かつて集合論などで業績を残したドイツの数学者エルンスト・ツェルメロは、有限ゲームにおける以下のような定理を証明した。

「すべての有限ゲームは、先手必勝法があるか、後手必勝法があるか、引き分けに終わるかのどれかである。」

この定理を、ツェルメロの定理という。ツェルメロの定理は抽象的な存在命題であり、必勝法や引き分けの具体的な手段を与えてくれるものではない。しかし、個々の有限ゲームに対して具体的な解決を求める試みが無意味なことでは無いということを保証してくれる。

7. ニム

ツェルメロの定理より、引き分けのない有限ゲームには、先手か後手の必勝法がある。ここでは、その中でも特に必勝法が発見されている三山ニムというゲームを例にあげ、どのように手を打っていけば勝てるのかを解説する。

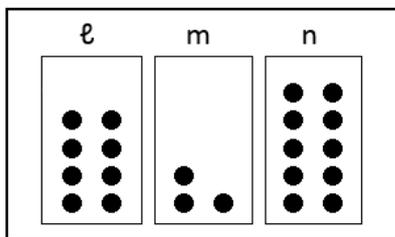


図 1

7.1 ルール

1. ゲームは2人のプレイヤーで行われる。
2. 各プレイヤーは、交互に1つの山から1個以上の任意の数（全部でもよい）だけ石を取る。
3. 石を取る山は、毎回任意の（石の残っている）1山を選ぶ。
4. パスは許されず、最後に石を取って全ての山を空にしたものを勝ちとする。

7.2 必勝戦略

基本的なルールは上記の通りである。石の個数は各山 (l, m, n) 個と表し、特にゲーム開始時の石の個数に制限はないが、今回は $(8, 3, 10)$ 個で始める。

さて、一見必勝戦略が無いようにも見えるこの三山ニムであるが、明確な必勝戦略が存在する。その必勝戦略とは、

「二進対称形にして相手に手渡すのを続けること。」

である。ではその二進対称形とは何かを解説する。現在、私

たちが日常生活で一般的に使っている数は十進法で表されている。今回石の個数は $(8, 3, 10)$ 個であるが、 $8, 3, 10$ はいずれも十進法で表された数字である。まずは、これらの数字を二進法で表記しなおすところから作業を始める。この十進法で表されている数字を二進法で表記しなおす作業を二進分解と呼ぶことにする。 $8, 3, 10$ をそれぞれ二進分解する

$$\text{と、 } 8 = 2^3, \quad 3 = 2^1 + 2^0, \quad 10 = 2^3 + 2^1$$

となる。このとき、3つの山 (l, m, n) は、 l, m, n を二進分解したとき、どの自然数 k についても、 2^k が3つの山の中に偶数（0か2）個現れるとき、「二進対称形」といい、ある自然数 k について 2^k が奇数個現れば「二進非対称形」とあるという。これで二進対称形を含む用語の解説と準備は整った。ここでもう一度必勝戦略を確認すると、このゲームの必勝戦略は「二進対称形にして相手に手渡すのを続けること。」である。さらに細かく言うと、二進対称形で自分に手が回ってきた場合、相手が最善手を打つ限り自分は負けが決定し、二進非対称形で自分に手が回ってきた場合は、二進対称形にして相手に手渡すことを続ければ、必ず勝つことが出来る。では、今回の $(8, 3, 10)$ 個の三山ニムを例に解説する。3つの山の石は、 $8 = 2^3, 3 = 2^1 + 2^0, 10 = 2^3 + 2^1$ と二進分解することができた。 2^0 は一個しかないので、 $(8, 3, 10)$ は二進非対称形である。上記の通り、二進非対称形で自分に手が回ってきた場合は、二進対称形にして相手に手渡すことを続ければ必ず勝つことが出来るので、今回は先手必勝になるということが言える。 $(8, 3, 10)$ 個の三山ニムは先手必勝ゲームである。では、なぜ二進対称形にして相手に渡し続ければ勝てるのか。それは、「二進対称形に手を加えると必ず二進非対称形になる。」という性質と「二進非対称形にはそれを二進対称形にする手段が必ずある。」という性質があるからである。これにより、自分が二進対称形にして相手に手を回せば、自分には必ず二進非対称形で手が回ってくることになる。以下この動作を続ければ、最終的に自分は $(0, 0, 0)$ という二進対称形の手を打つことになり、それはすなわち最後の石を取ることに同じであるので、必ず勝つことが出来る。これこそが、三山ニムの必勝戦略である。

8. アバロン

有限ゲームについて解説したところで、アバロンについて

解説していく。

8.1 ルール

1. 61 のマスのある六角形の盤で行う。各プレイヤーは、開始時に 14 個ずつの玉を盤に置く。
2. 1 回の手で、1-3 個の一直線につながった玉を動かすことができる。複数の玉を動かす場合、すべてを同じ方向に 1 マス動かす。
3. 相手の玉が並んでいる数が自分の動かす玉の数より少ないければ、相手の玉を押すことができる。
4. 黒い玉を使用するプレイヤーが先手で、交互に手を打つ。
5. 先に相手の玉を 6 個以上盤外に押し出したプレイヤーが勝ち。

実際に動かせる例

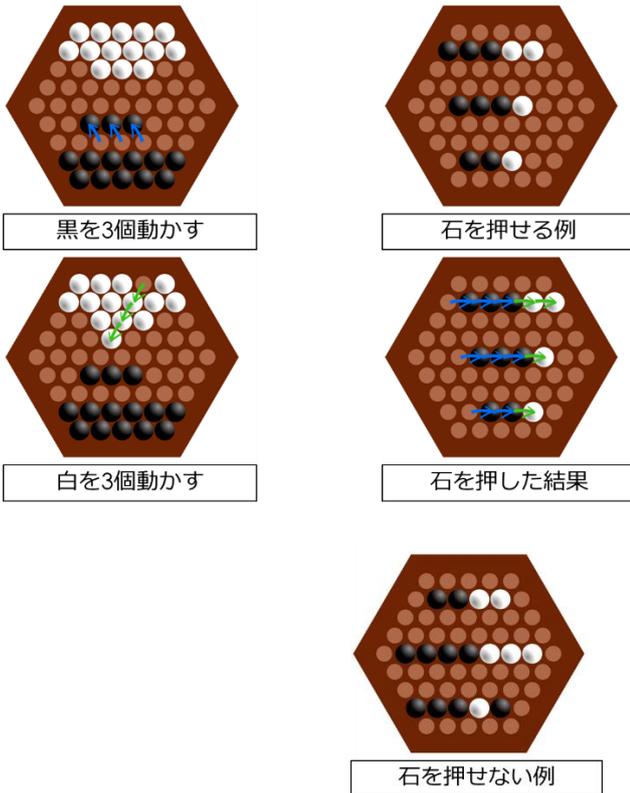


図 2

8.2 分析

アバロンは「着手の選択枝が有限である」が、「ゲームが有限回の着手で決着する」とは明確には言えないゲームである。これではツェルメロの定理は使えず、「すべての有限ゲームは、

先手必勝法があるか、後手必勝法があるか、引き分けに終わるかのどれかである。」と言うことはできない。

通常のアバロンの盤面では分析が非常に困難であるため、「それぞれの最初の石が 5 個で 1 度に 2 個まで動かして、石を 1 個押し出したら勝ちとする。」という条件で分析していく。この、通常のアバロンと比べて小さなアバロンを「ミニアバロン」と呼称する。勝利条件を「相手の石を 1 個押し出したら勝ち」とした理由は、石の数が相手の石の数未満になると、押し出すことも押し出しを阻止することも困難になり、数的有利を覆すことが非常に困難となるためである。

初期盤面は下の図 3 である。

8.3 用語

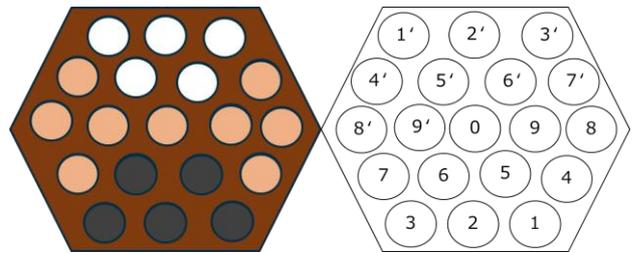


図 3

図 4

一辺が 3 マスの六角形のマスに、図 4 のように番号を振っていく。石の移動は番号と個数で表す。例えば、1 個だけ動かす場合は(1)-(4)、2 個の石を動かす場合は(6,5)-(9',0)のように、動かす前の石があった位置と動かした後の位置を表記する。

相手の石が 1 個を盤外に押し出せるように 2 つの石が隣接した状態を押し出しルート、以下ルートと呼ぶ。ルートを一度に二つ作るか、相手が手を打った後にルートができる状況を作れば、その状況を作ったプレイヤーの勝利となる。

8.4 予想

この時、全ての組合せを考えると非常に膨大になってしまう。特に、初手の選択枝の多さは組合せの数を大きく増やす要因になる。また、盤面の外周、六角形の辺の部分で押し出そうとすると簡単に逃げられるため、中から外へ押し出すようにすることがアバロンの勝ちパターンと推測できる。そのため、「中央のマスを取ると有利になる」という仮説の下で組み合わせを考えていく。

9. 必勝戦略

前述した仮説を下にした場合、「先に中央を陣取れる先手有利」といえる。ただ中央に置くのではなく、中央を奪い返されないようにしなければ意味はないため、黒の一手目は(1,5)-(5,0)または(3,6)-(6,0)のどちらかとなる。以下、どの場合分けにおいても黒の一手目は(1,5)-(5,0)とし共通しているものとする。

この段階で白が中央を取り返すことは不可能であり、よって中央をとる以外の選択肢を取ることになる。以下、白の一手目において考えられうる選択肢で場合分けをしていく。

白の一手目を考えると、(3)-(7)、(6)-(7)、(1)-(4)、(5)-(4)、(6)-(9)、(5)-(9)、(3,6)-(7,9)、(1,5)-(4,9)、(5,6)-(6,7)、(5,6)-(4,5)の10通り存在する。これを、(3)-(7)、(6)-(7)、(1)-(4)、(5)-(4)をA、(6)-(9)をB、(5)-(9)をC、(3,6)-(7,9)をD、(1,5)-(4,9)をE、(5,6)-(6,7)、(5,6)-(4,5)をFとグループ分けする。

※手を考えるとき、その手を打つことで自分が負けるルートが作られる手は選択肢から除外する。

A. 白が(3)-(7)と打った場合、黒は次の手において(0,6)-(6,0)という手を選ぶことでルートを作ることができる。

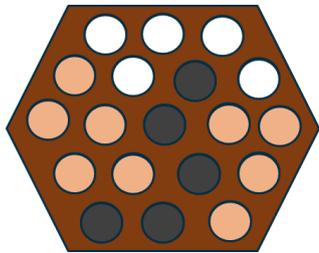


図 5

黒が(0,6)-(6,0)と打った場面

こうすると、白の次の手は(3,7)-(7,8)と打つしかなくなるが、黒が(2,5)-(5,9)と打つことでルートが二つできてしまい、黒側の勝利が確定する。この流れは白が(6)-(7)と打った場合も同様である。

なお、この流れは白の初手が(1)-(4)、(5)-(4)の場合も3の黒石以外が左右反転して同じである。

B. 次に、白が(6)-(9)と打った場合を考える。その場合も同

様に黒は(0,6)-(6,0)という手を選ぶ。

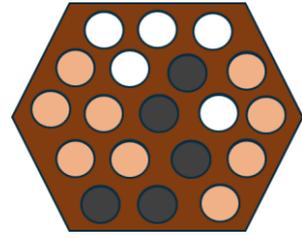


図 6

黒が(0,6)-(6,0)と打った場面

これでルートができているので、白は(3)-(7)と打つしかない。次の黒の手として、(3)-(6)という手を選ぶと次に白がどのような手を打っても勝ちを確定させることができる。

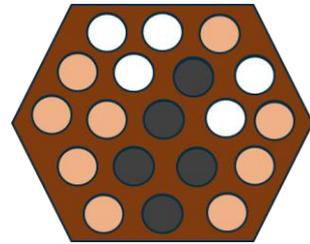


図 7

黒が(3)-(6)と打った場面

図7場面において、白の動かしえる選択肢とそれに対応する黒の手を考える。

Bi. 盤面右側の白石をどのように動かした場合であろうと、黒は(2,5)-(5,9)という手を選ぶことにより二つのルートが生まれ、黒側の勝利が確定する。

Bii. 盤面左側の白石の動かし方のうち、(2,5)-(5,9)以外の全ての手において、黒は(0,5)-(5,0)という手を選べばルートが二つ以上作られ、黒側の勝利が確定する。

Biii. 白が(2,5)-(5,9)と打った場合、黒は(2,6)-(6,9)という手を選べば、次に白がどのような手を打った場合でも(4)の位置にある白石を押し出すことができるため、黒側の勝利が確定する。

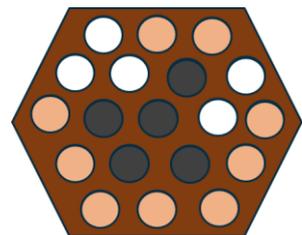


図 8

黒が(2,6)-(6,9)と打った場面

- C. 白の初手が(5)-(9)の場合、次の黒は(0,5)-(5,0)という手を選ぶ。

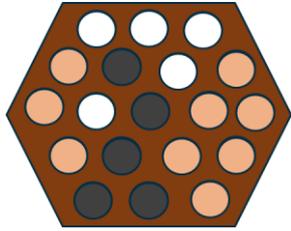


図 9

黒が(0,5)-(5,0)と打った場面

すると、ルートが作られるため、次の白の手は(1)-(4)となる。次の黒の手として(3)-(7)を選ぶと、次に白がどのような手を打っても勝ちを確定させることができる。

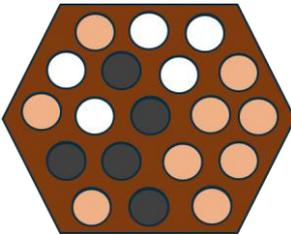


図 10

黒が(3)-(7)と打った場面

盤面左側の白石をどのように動かしても、黒は(2,6)-(6,9)という手を選ぶことで黒側の勝利が確定する。盤面右側の白石を(2,6)-(6,9)以外のどのように動かしても、黒は(0,6)-(6,0)という手を選ぶことで黒側の勝利が確定する。白が(2,6)-(6,9)と打った場合、黒は(7,6)-(6,5)という手を選ぶ。次の白の取りうる手のうち、黒が(0,6)-(6,0)と打てる手はルートを二つ以上作られるので不適切。よって、白の取れる手は(9)-(7)または(9)-(8)のどちらかである。どちらの場合においても、黒は(2,5)-(9,5)という手を選ぶことで逃げられないルートを作ることができ、黒側の勝利が確定する。

- D. 続いて、白が(3,6)-(7,9)と打った場合を考える。その場合も同様に黒側は(0,6)-(6,0)という手を選ぶ。

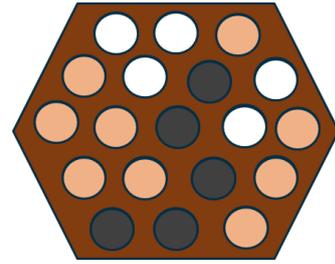


図 11

黒が(0,6)-(6,0)と打った場面

このとき、B i、B iiと同じ手を打った場合、同じ結果となる。B iiiのみ変化するため、次に白が(2,5)-(5,9)と打った場合を考えていく。この時、黒側は0,2,5,6の四か所を動かさなければ盤面右側の白石の動きを封じることができる。そこで、黒はこの四つではない3にある黒石を(3)-(6)という手を選ぶとする。すると、次に白が取りうる選択肢のうち、黒が(0,5)-(5,0)と打てるようになる全ての選択肢はルートが二つできてしまう。

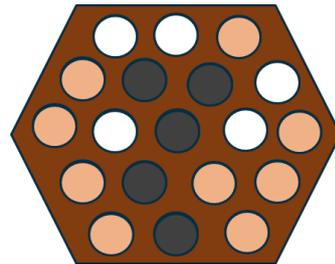


図 12

白が(5)-(9)と打ち、黒が(0,5)-(5,0)と打った場面

白が9にある白石を動かす全ての選択肢は、黒が(2,6)-(6,9)と打つと、白はどの手を打っても黒側のルートを崩せず、黒側の勝利が確定する。

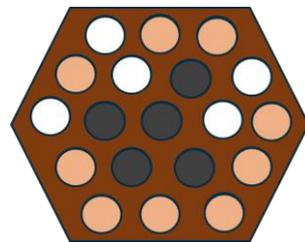


図 13

白が(9)-(8)と打ち、黒が(2,4)-(4,9)と打った場面

- E. 次に、白が(1,5)-(4,9)と打った場合を考える。この場合の黒は(3)-(7)という手を選ぶ。

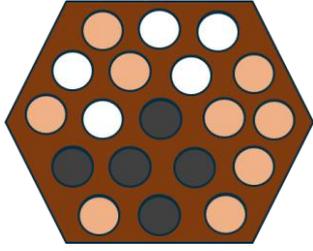


図 14

黒が(3)-(7)と打った場面

次の白の手の選択肢が膨大に互るため、場合分けをしていく。

この時の場合分けは、図 11 の盤面左側を動かす場合、盤面右側を左に動かす場合、右に動かす場合、初期盤面に戻そうとする場合のおおよそ 4 パターンのどれかである。

E i. 白が(4,9)-(1,5)と打った場合、黒は(7)-(9)という手を選ぶことで、後述する図 12 の必勝戦略が当てはまる。

E ii. 白が(4)-(1)または(4)-(5)または(9)-(5)と打った場合、黒は(0,5)-(5,0)という手を選ぶことで白の次の手を(1,4)-(4,8)に限定できる。次に黒が(6,2)-(9,6)という手を選ぶことでルートが二つ作られ、黒側の勝利が確定する。

E iii. 白が(4)-(8)または(9)-(8)と打った場合、黒は(6,2)-(9,6)という手を選ぶことでルートが二つ作られ、黒側の勝利が確定する。

E iv. 白が(3)-(7)または(6)-(7)または(6)-(9)または(2,6)-(6,9)と打った場合、黒は(2,5)-(5,9)という手を選ぶことでルートを作ることができる。このルートを崩すために、白は 7 の位置にある白石を動かさなければならないが、その次に黒が(0,9)-(9,0)と打つとルートが二つ作られるため、黒側の勝利が確定する。

E v. 白が(3,6)-(7,9)と打った場合、黒は(0,5),(5,0)という手を選ぶ。このとき、盤面左側の白石を動かすと、次の黒が(2,6)-(6,9)と打って勝利確定されてしまうので、盤面右側の白石の動かし方のみを考える。

黒が(0,6)-(6,0)と打ててしまうとルートが二つできる選択肢が多い。黒が(0,6)-(6,0)と打てないようにするための白の手は(7,9)-(3,6)か(7,9)-(9,5)のどちらかである。ちなみに、黒が(0,6)-(6,0)と打ててしまう白のパター

ンは後述の「ミニアバロンにおける先手必勝表」に記載する。

白が(7,9)-(3,6)と打った場合、黒は(7,6)-(6,5)という手を選ぶことで図 6 と同じ状況を作ることができる。よって、この選択肢では黒側の勝利が確定する。

次に、白が(7,9)-(9,5)と打った場合、黒は(0,6)-(6,0)と打つことでルートを作れる。これは白がどのような手を打っても崩せないため、黒側の勝利が確定する。

E vi. 白が(2,6)-(6,9)と打った場合、黒は(2,5)-(5,9)という手を選ぶことでルートを作ることができる。白側がそのルートを崩すための手として(6,7)-(5,6)があるが、黒が(0,9)-(9,0)と打つことでルートが二つ作られ、黒側の勝利が確定する。

F. 最後に、白が(5,6)-(6,7)と打った場合を考える。この場合は、黒は(2,6)-(6,9)という手を選ぶ。

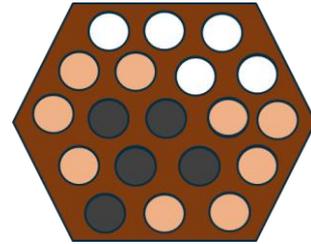


図 15

黒が(2,6)-(6,9)と打った場面

この次の白が打つ手で、次の黒の手で(0,6)-(6,0)が打てるならばその手を打つことで黒側の勝利が確定する。白が(2)-(5)を打ったならば、黒は(0,9)-(9,0)と打つことにより黒側の勝利が確定する。

白が(6,7)-(5,6)と打った場合は、黒は(3)-(2)という手を選ぶ。

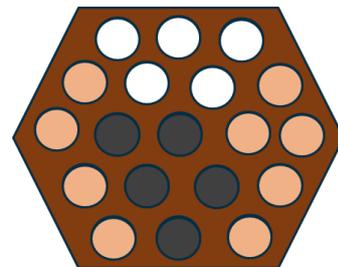


図 16

黒が(3)-(2)と打った場面

次に白が(5,6)-(6,7)、(2,5)-(5,9)、(2,6)-(6,9)、(3,6)-(7,9)以外のどのような手を打とうとも、黒は(0,6)-(6,0)と打てば、その次の白の手が何であろうと(0,9)-(9,0)と打てば、白側はルートを作られ、そのルートから逃げるマスも他のルートとなってしまう。

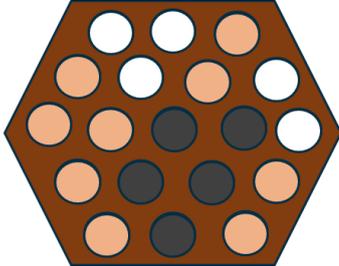


図 17

白が(3,6)-(7,9)と打ち、黒が(0,9)-(9,0)と打った場面

前述した例外(5,6)-(6,7)、(2,5)-(5,9)、(3,6)-(7,9)でそれぞれ場合分けをして考える。

F i . 白が(5,6)-(6,7)と打った場合、黒は(5)-(9)という手を選ぶ。次に打つ白の選択肢の中で、(2,6)-(6,9)以外の全ての手において、黒は(2)-(5)という手を選ぶことが最善である。白が(2,6)-(6,9)と打った場合は、黒は(0,9)-(9,0)と打つことで黒側の勝ちを確定させられる。

白の手の選択肢の中で、(2,6)-(6,9)以外の選択肢の中で、(6,7)-(5,6)以外の手は黒側の一手で勝利確定にさせられるので、後述の「ミニアバロンの先手必勝表」に記載する。

黒が(5)-(9)という手を選んだ次の手として、白が(6,7)-(5,6)を打った場合、黒は(2)-(5)と打つ。対称性より、白が取れる手は(2,5)-(5,9)としてよく、黒は(0,9)-(9,0)を打つことで黒側の勝利が確定する。

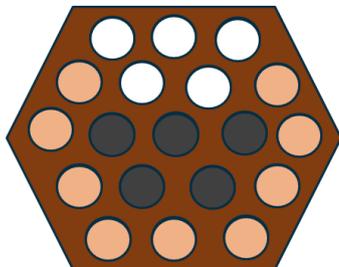


図 18

黒が(2)-(5)と打った場面

F ii . 白が(2,5)-(5,9)と打った場合、黒は(2,6)-(6,9)と打つことで崩せないルートを作ることができるため、

黒側の勝利が確定する。

F iii . 白が(2,6)-(6,9)と打った場合、黒は(0,9)-(9,0)と打つことで崩せないルートを作ることができるため、黒側の勝利が確定する。

F iv . 白が(3,6)-(7,9)と打った場合、黒は(0,9)-(9,0)と打つことでルートを二つ作ることができる。よって、黒側の勝利が確定する。

なお、これらの流れは白の初手が(5,6)-(4,5)と打った場合も3の黒石以外が左右反転して同じである。

以上の六つの白の初手パターン全てにおいて、黒側の勝利が確定されるため、「ミニアバロンは先手必勝である」といえる。

10. ミニアバロンの先手必勝表

別ページ

11. 参考文献

半沢英一 『ヘックス入門』 ビレッジプレス, 2013 年

ミニバロンの先手必勝表

先手1	後手1	先手2	後手2	先手3	後手3	先手4	後手4	先手5	後手5	先手6
(1,5)-(5,0)	(3')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(2,5)-(5,9)						
	(6')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(2,5)-(5,9)						
	(1')-(4')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(2,6)-(6,9')						
	(5')-(4')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(2,6)-(6,9')						
	(6')-(9)	(0,6)-(6',0)	(3')-(7')	(3)-(6)	(7')-(8)	(2,5)-(5,9)				
					(9)-(8)	(2,5)-(5,9)				
					(9)-(4)	(2,5)-(5,9)				
					(7',9)-(8,4)	(2,5)-(5,9)				
					(1')-(4')	(0,5)-(5',0)				
					(5')-(4')	(0,5)-(5',0)				
					(5')-(9')	(0,5)-(5',0)				
					(1',5')-(4',9')	(0,5)-(5',0)				
					(2',5')-(5',9')	(2,6)-(6,9')				
	(5')-(9')	(0,5)-(5',0)	(1')-(4')	(3)-(7)	(4')-(8')	(2,6)-(6,9')				
					(9')-(8')	(2,6)-(6,9')				
					(3')-(7')	(0,6)-(6',0)				
					(6')-(7')	(0,6)-(6',0)				
					(6')-(8)	(0,6)-(6',0)				
					(3',6')-(7',8)	(0,6)-(6',0)				
					(2',6')-(6',9)	(7,6)-(6,5)	(9)-(7')	(2,5)-(9,5)		
							(9)-(8)	(2,5)-(9,5)		
	(3',6')-(7',9)	(0,6)-(6',0)	(7')-(8)	(2,5)-(5,9)						
			(9)-(8)	(2,5)-(5,9)						
			(9)-(4)	(2,5)-(5,9)						
			(7',9)-(8,4)	(2,5)-(5,9)						
			(1')-(4')	(0,5)-(5',0)						
			(5')-(4')	(0,5)-(5',0)						
			(5')-(9')	(0,5)-(5',0)						
			(1',5')-(4',9')	(0,5)-(5',0)						
			(2',5')-(5',9')	(3)-(6)	(1')-(2')	(0,5)-(5',0)				
					(1')-(4')	(0,5)-(5',0)				
					(5')-(2')	(0,5)-(5',0)				
					(5')-(4')	(0,5)-(5',0)				
					(9')-(4')	(2,6)-(6,9')				
					(9')-(8')	(2,6)-(6,9')				
					(9')-(7)	(2,6)-(6,9')				
	(1',5')-(4',9')	(3)-(7)	(4',9')-(1',4')	(7)-(9')	(3')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(0,9')-(9,0)		
					(6')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(0,9')-(9,0)		
					(6')-(9)	(0,6)-(6',0)	(3')-(7')	(0,9')-(9,0)		

					(3',6')-(7',9)	(0,9')-(9,0)					
			(4')-(1')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(6,2)-(9',6)					
			(4')-(5')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(6,2)-(9',6)					
			(9')-(5')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(6,2)-(9',6)					
			(4')-(8')	(6,2)-(9',6)							
			(9')-(8')	(6,2)-(9',6)							
			(3')-(7')	(2,5)-(5,9)	(6',7')-(5',6')	(0,9)-(9',0)					
			(6')-(7')	(2,5)-(5,9)	(6',7')-(5',6')	(0,9)-(9',0)					
			(6')-(9')	(2,5)-(5,9)	(6',7')-(5',6')	(0,9)-(9',0)					
			(2',6')-(6',9')	(2,5)-(5,9)	(6',7')-(5',6')	(0,9)-(9',0)					
			(3',6')-(7',9)	(0,5),(5',0)	(4')-(8')	(2,6)-(6,9')					
					(9')-(8')	(2,6)-(6,9')					
					(2')-(3')	(0,6)-(6',0)					
					(2')-(6')	(0,6)-(6',0)					
					(7')-(3')	(0,6)-(6',0)					
					(7')-(6')	(0,6)-(6',0)					
					(9)-(6')	(0,6)-(6',0)					
					(7')-(8)	(0,6)-(6',0)	(4',9')-(9',6)	(0,6')-(6,0)			
							(4')-(8')	(7)-(6)	(8')-(7)	(2,6)-(6,9')	
									(9')-(7)	(2,6)-(6,9')	
									(9)-(5)	(2,6)-(6,9')	
									(9)-(4)	(2,6)-(6,9')	
									(8)-(4)	(2,6)-(6,9')	
									(8,9)-(4,5)	(2,6)-(6,9')	
					(9)-(8)	(0,6)-(6',0)					
					(9)-(5)	(0,6)-(6',0)					
					(9)-(4)	(0,6)-(6',0)					
					(7',9)-(4,8)	(0,6)-(6',0)	(4',9')-(9',6)	(0,6')-(6,0)			
							(4')-(8')	(6')-(9)	(8)-(7')	(5')-(6')	
									(4,8)-(1,4)	(0,5')-(5,0)	
					(7',9)-(3',6')	(7,6)-(6,5)	(4')-(8')	(2,6)-(6,9')			
							(9')-(8')	(2,6)-(6,9')			
							(9')-(7)	(2,6)-(6,9')			
							(4',9')-(8',7)	(2,6)-(6,9')			
							(3')-(7')	(0,6)-(6',0)			
							(6')-(7')	(0,6)-(6',0)			
							(6')-(9)	(0,6)-(6',0)			
							(3',6')-(7',9)	(0,6)-(6',0)			
							(2',6')-(6',9)	(2,5)-(5,9)			
					(7',9)-(9,5)	(0,6')-(6,0)					

					(2',6')-(6',9)	(2,5)-(5,9)	(6',7')-(5',6')	(0,9)-(9',0)		
	(5',6')-(6',7')	(2,6)-(6,9')	(7')-(8)	(0,5)-(5',0)						
			(7')-(9)	(0,5)-(5',0)						
			(6')-(9)	(0,5)-(5',0)						
			(6',7')-(8,9)	(0,5)-(5',0)						
			(2')-(6')	(0,9)-(9',0)						
			(6',7')-(5',6')	(3)-(2)	(3')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(0,9')-(9',0)		
					(6')-(7')	(0,6)-(6',0)	(3',7')-(7',8)	(0,9')-(9',0)		
					(6')-(9)	(0,6)-(6',0)	(3')-(7')	(0,9')-(9',0)		
					(3',6')-(7',9)	(0,9')-(9',0)				
					(2',5')-(5',9')	(2,6)-(6,9')				
					(2',6')-(6',9)	(0,9')-(9',0)				
					(5',6')-(6',7')	(5)-(9)	(2',6')-(6',9)	(0,9')-(9',0)		
							(6')-(5')	(0,6)-(6',0)		
							(3')-(6')	(2)-(6)	(2',5')-(5',9')	(0,9)-(9',0)
							(6',7')-(5',6')	(2)-(5)	(2',5')-(5',9')	(0,9)-(9',0)
									(2',6')-(6',9)	(0,9')-(9',0)
	(5',6')-(4',5')	(2,5)-(5,9)	(4')-(8')	(0,6)-(6',0)						
			(4')-(9')	(0,6)-(6',0)						
			(5')-(9')	(0,6)-(6',0)						
			(4',5')-(8',9')	(0,6)-(6',0)						
			(2')-(6')	(0,9)-(9',0)						
			(4',5')-(5',6')	(3)-(2)	(1')-(4')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(0,9)-(9',0)		
					(5')-(4')	(0,5)-(5',0)	(1',4')-(4',8')	(0,9)-(9',0)		
					(5')-(9')	(0,5)-(5',0)	(1')-(4')	(0,9)-(9',0)		
					(1',5')-(4',9')	(0,9)-(9',0)				
					(2',6')-(6',9)	(2,5)-(5,9)				
					(5',6')-(4',5')	(6)-(9')	(2',5')-(5',9')	(0,9)-(9',0)		
							(5')-(6')	(0,5)-(5',0)		
							(3')-(6')	(2)-(6)	(2',5')-(5',9')	(0,9)-(9',0)
							(4',5')-(5',6')	(2)-(6)	(2',5')-(5',9')	(0,9)-(9',0)
									(2',6')-(6',9)	(0,9')-(9',0)

・表中の数字は「移動前のマスの数字－移動後のマスの数字」で表されている。

・マスの数字は下の通りである。

