

# 楕円錐周りの極超音速クロスフロー不安定の数値的研究

## Numerical Study of Hypersonic Crossflow Instability around Elliptic Cone

知能機械システム工学コース

航空エンジン超音速流研究室 1215004 河端 恭平

### 1. 緒言

近年、高高度を飛行することで、ソニックブームを低減し高速で飛行できる極超音速旅客機へ期待が高まっている。極超音速流中では飛行体前方に衝撃層が形成され、また壁面近傍には境界層が生じる。旅客機形状や飛行条件によっては、乱流化し、高温衝撃層内の流体が乱流輸送によって、壁面を著しく加熱する可能性が高く<sup>(1)</sup>、乱流状態へ遷移する位置を知るとは、機体の熱防御の観点から、そしてひいては極超音速旅客機の実現のためには極めて重要である。

極超音速機実現に向けて様々な研究が行われており、そのひとつに Hypersonic International Flight Research and Experimentation (HIFiRE) プロジェクトチームを中心に行われている研究がある<sup>(2,3,4,5,6)</sup>。HIFiRE プロジェクトでは、空力、燃焼、航法、材料、制御など次世代航空機の基礎技術を追求している。その中で楕円錐模型 (HIFiRE-5)<sup>(7)</sup>を用いた研究では、極超音速境界層において主要な遷移現象である二次モード不安定性や三次元性によるクロスフロー不安定性のメカニズムを解明しようと、飛行試験<sup>(8)</sup>や極超音速風洞を用いた実験<sup>(9)</sup>、様々な数値計算が行われている<sup>(10,11,12,13)</sup>。T. J. Juliano と S. P. Schneider<sup>(14)</sup>による HIFiRE-5 を用いた極超音速風洞による実験において、レイノルズ数が  $8.0 \times 10^6$  [1/m] の場合には境界層の薄い長径側のみで高い加熱率が計測された。一方、レイノルズ数がやや高い  $1.18 \times 10^7$  [1/m] の場合にはさらに約 0.2[m] 以降で、筋状の高い加熱率分布が計測された。乱流遷移したことが原因と考えられているが、乱流遷移のメカニズム解明や遷移位置の予測方法の確立には至っていない<sup>(15)</sup>。

乱流遷移は流体の不安定性に起因し<sup>(16)</sup>、物体壁面近傍から微小擾乱が発生し線形成長することで引き起こされると考えられている<sup>(17)</sup>。そして、この不安定性の調査には、定常解に十分に小さい擾乱を重ね合わせて支配方程式に代入し、線形化された擾乱方程式を主流方向に沿って解く線形安定性解析が行われてきた<sup>(18,19)</sup>。そのため、線形安定性解析は複雑な流れ場への適用は難しい。一方で、流れ場全体に擾乱を付加し、流れ場全体で擾乱成長過程を解析することで、複雑な流れ場への適用も可能な手法として全体安定性解析<sup>(20)</sup>がある。松瀬は、全長 1100[mm]、半頂角  $7^\circ$ 、先端が半径 2.5[mm] の球状になっている円錐模型周りの極超音速流れ場に対して全体安定性解析を行った<sup>(21)</sup>。境界層外縁や、衝撃層内下流に擾乱が成長し不安定となる特徴的な構造を抽出した。境界層外縁に見られた分布は、同主流条件の実験で観察できた二次モード不安定性と同傾向を示した。

本研究では、支配方程式を変化させず流れ場全体に対して擾乱を付加し安定性解析を行い、極超音速流における楕円錐周りの擾乱成長過程を解析し、流れ場の不安定性を調査する。

### 2. 数値計算法

#### 2.1 支配方程式

楕円錐模型周りの流れ場計算の支配方程式には Navier-Stokes 方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$  は保存量ベクトル、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  は対流流束ベクトル、 $\mathbf{E}_v$ ,  $\mathbf{F}_v$ ,  $\mathbf{G}_v$  は粘性流束ベクトルであり、以下のように与えられる。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)w \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $\rho$  は密度、 $u$  は速度の  $x$  方向成分、 $v$  は速度の  $y$  方向成分、 $w$  は速度の  $z$  方向成分、 $e$  は単位体積あたりの全エネルギーを表し、 $p$  は圧力、 $\tau$  は粘性応力、 $\mathbf{q}$  は熱流束を表す。圧力  $p$  は理想気体の状態方程式を用いて以下のように与えられる。

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right\} \quad (7)$$

$\gamma$  は比熱比で空気の場合、1.4 である。粘性応力  $\tau$  は Stokes の定理を用いて以下のように与えられる。

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (8)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (9)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (12)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (13)$$

ここで、 $\mu$  は粘性係数を表す。熱流束  $\mathbf{q}$  は Fourier の法則より以下のように与えられる。

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (14)$$

ここで、 $T$  は温度、 $k$  は熱伝導係数を表す。

## 2.2 離散化手法

本研究では、空間の離散化には有限体積法を用いる。支配方程式 (1) を任意のセル  $V$  について積分を行う。

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial z} \right) dV = 0 \quad (15)$$

また、流束ベクトルに対してガウスの発散定理を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{Q} dV + \oint_{\partial V} \{ (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) n_x + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) n_y + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v) n_z \} dS = 0 \quad (16)$$

ここで、 $n_x, n_y, n_z$  はそれぞれセル境界面の法線ベクトルの  $x, y, z$  成分を表す。各セルでの値は、そのセル自身の体積を用いて平均化し、以下のように与えられる。

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{\iiint_V \mathbf{Q} dV}{\iiint_V dV} \quad (17)$$

離散化の際に、セルの体積  $\Delta V (= \iiint_V dV)$ 、セル境界の面積  $\Delta S (= dS)$ 、時間刻み幅  $\Delta t (= \partial t)$  をそれぞれ与え、離散化された式は以下のように表される。

$$\frac{\Delta \hat{\mathbf{Q}}}{\Delta t} \Delta V + \sum_{k=1}^6 \{ (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) n_x + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) n_y + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v) n_z \} \Delta S_k = 0 \quad (18)$$

本研究では、時間積分にはオイラー陽解法を用いており、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}^{n+1} &= \hat{\mathbf{Q}}^n + \Delta \hat{\mathbf{Q}} \\ &= \hat{\mathbf{Q}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta V} \sum_{k=1}^6 \{ (\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) n_x + (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) n_y + (\mathbf{G} - \mathbf{G}_v) n_z \} \Delta S_k \end{aligned} \quad (19)$$

また、数値流束には AUSM-DV 風上スキーム<sup>(22)</sup>を用い、空間精度は MUSCL 法<sup>(23)</sup>を用いて 2 次精度化する。

## 2.3 全体安定性解析

本研究で用いる全体安定性解析は、CFD と組み合わせることで流れ場全体に対して安定性解析を行う計算手法であり、擾乱の時間発展に対する固有値問題に帰着させ、得られた固有値から流れ場が安定であるかどうかを判断し、さらに、それらの固有ベクトルから流れ場の不安定モードを抽出する。

Navier-Stokes 方程式に支配される離散点の解の時間発展は以下のようにも記述できる。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}) \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\rho_1, (\rho \mathbf{u})_1, e_1, \dots, \rho_N, (\rho \mathbf{u})_N, e_N) \quad (21)$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w) \quad (22)$$

ここで  $N$  は総格子点数であり、 $\hat{\mathbf{Q}}$  は各格子点上の保存量ベクトルを示す。また、保存量  $\mathbf{Q}$  は先の CFD 計算により得られた準定常解を基本量  $\bar{\mathbf{Q}} (= \hat{\mathbf{Q}})$  とし、微小擾乱項を  $\tilde{\mathbf{Q}}$  とすることで、以下のように分解できる。

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}} \quad (23)$$

基本量は時間変化せず、微小擾乱よりはるかに大きいとすると式(20)を線形化することができ、微小擾乱  $\tilde{\mathbf{Q}}$  に対して以下の方程式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{Q}}} \tilde{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}} \quad (24)$$

この係数行列  $\mathbf{A}$  の固有値問題を解くことで流れ場の安定性解析を行う。ここで得られた固有値  $\lambda$  の実部  $\Re(\lambda)$  から流れ場の安定性が分かり、流れ場の安定性は次のように分類することができる。

$$\Re(\lambda) \begin{cases} > 0 & \text{不安定} \\ = 0 & \text{中立安定} \\ < 0 & \text{安定} \end{cases} \quad (25)$$

本研究では不安定性に興味があるため固有値の実部が大きいものに着目する。ここで行列  $\mathbf{A}$  の固有値問題を扱うが、行列の大きさは  $\mathbf{Q}$  の成分の数に依存するため、多次元計算では大規模な計算となり、直接固有値問題を扱うのは難しい。そこで本研究では、大規模行列の固有値問題を陽に扱わない Arnoldi 法<sup>(24)</sup>を用いる。Arnoldi 法では大規模行列に対して部分空間を用いることで、近似行列で表現し、反復的な方法により絶対値が比較的大きな固有値とその固有ベクトルのみを求めることができるため、計算コストを削減することができる。以下に Arnoldi 法を用いて行列  $\mathbf{A}$  の固有値と固有ベクトルを求める手順を説明する。

まず、任意の擾乱ベクトル  $\tilde{\mathbf{Q}}_1$  を与え、そのベクトルを正規化し、反復操作を行うことで、近似行列の成分を集める。以下にアルゴリズムを示す。

$\tilde{\mathbf{Q}}_1$  : arbitrary initial vector

$$\zeta_1 = (\tilde{\mathbf{Q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_1)^{-1/2} \tilde{\mathbf{Q}}_1 \quad (26)$$

for  $k = 1$  to  $M$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{A} \zeta_k - \sum_{j=1}^k h_{j,k} \zeta_j \quad (27)$$

$$h_{j,k} = \zeta_j \cdot \mathbf{A} \zeta_k \quad (28)$$

$$h_{k+1,k} = (\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1})^{1/2} \quad (29)$$

$$\zeta_{k+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} / h_{k+1,k} \quad (30)$$

next  $k$

ここで、 $M$  は反復回数であり、本計算では、反復回数  $M$  を 50 回とした。また、 $h_{j,k}$  は近似行列の成分を表す。 $h_{j,k}$  によって作られる近似行列は  $M \times M$  サイズの Hessenberg 行列となる。Hessenberg 行列を  $\mathbf{H}$  と表記する。行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda^{\mathbf{A}}$  は行列  $\mathbf{H}$  の近似固有値として求まり、行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda^{\mathbf{A}}$  に対応する固有ベクトル  $\phi$  は行列  $\mathbf{H}$  の固有値  $\lambda^{\mathbf{H}}$ 、固有ベクトル  $\psi$  を用いて以下のように与えられる。

$$\mathbf{H} \psi_j = \lambda_j^{\mathbf{H}} \psi_j \quad (31)$$

$$\phi = \sum_{k=1}^M (\psi_j)_k \zeta_k \quad (32)$$

ここで、 $(\psi_j)_k$  は  $j$  番目の固有ベクトルの  $k$  番目の成分を表す。

さらに、時間発展法<sup>(25)</sup>を用い、基本流れ場に擾乱を付加し、その流れ場の時間積分をとることで、固有値の実部が正に対応するモードは成長し、負に対応するモードは減衰することを利用して不安定モードと安定モードを区別することができる。擾乱を与えた時の時刻を  $t$ 、積分時間を  $T$  とすると、時刻  $t$  と時刻  $t+T$  における微小擾乱  $\tilde{\mathbf{Q}}$  の関係は以下のように表せる。

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t+T) = \exp(\mathbf{A}T) \tilde{\mathbf{Q}}(t) \quad (33)$$

また、

$$\mathbf{B} \equiv \exp(\mathbf{A}T) \quad (34)$$

とすると、行列  $\mathbf{A}$  の固有値  $\lambda^{\mathbf{A}}$  と行列  $\mathbf{B}$  の固有値  $\lambda^{\mathbf{B}}$  の関係は以下のように表せる。

$$\lambda^{\mathbf{B}} = \exp(\lambda^{\mathbf{A}}T) \quad (35)$$

Arnoldi 法を用いる際、 $\mathbf{A} \zeta_j$  は直接用いず、以下の近似式を用

いて計算する.

$$B\zeta_k = \frac{Q(t+T) - \bar{Q}}{\epsilon} \quad (36)$$

ここで, 初期擾乱を付加した流れ場を以下のように表す.

$$Q(t) = \bar{Q} + \epsilon\zeta_k \quad (37)$$

従って,  $Q(t+T)$ はこの式を時刻  $T$  だけ積分することで得られる. 本計算では, 積分時間  $T$  は無次元時間で  $1.0 \times 10^{-6}$  とした. また,  $\epsilon$  は微小定数であり, 以下のように定義し, 擾乱の大きさを調節する.

$$\epsilon = \frac{\|\bar{Q}\|}{\|\zeta_k\|N} \epsilon_0 \quad (38)$$

ここで,  $\epsilon_0$ は調節パラメータであり, 本計算では,  $\epsilon_0$ を  $10^3$  として与えた. 式(38)より, 全格子点数で割るため擾乱の大きさは,  $\bar{Q} = 3.0 \times 10^{-5}$  となり, 主流に対して約 0.06[%]となる.

### 3. 計算条件

計算には Juliano と Schneider<sup>(14)</sup>の実験で用いられた楕円錐模型と主流条件を使用する. 本計算で用いた計算格子を図 3.1 に示す. 迎角を付けないため, 楕円錐の 1/4 部分を計算する. また, 先端の拡大図を図 3.2 に示す. 特異点の影響を抑えるため, マルチブロックを採用した. 断面アスペクト比が 2:1 となっており, 楕円錐底面の長軸半径が 82[mm], 短軸半径が 41[mm]である. 軸方向長さは 328[mm]で, 先端は半径 0.95[mm]の球状である. その際の計算格子として  $129 \times 257 \times 129$  の構造格子を用いた. 流れ場の主流条件を表 1 に示す. また, 図 3.3 に流出面における計算格子を示す. 最小格子幅は流出面において  $y^+ = 1$  と設定し,  $1.0 \times 10^{-3}$ [mm]である.

Table 1 Freestream condition

Parameters	Values
$Re$ , [m]	$1.18 \times 10^7$
$M$ , [-]	6.0
$U_\infty$ , [m/s]	869.7
$T_\infty$ , [K]	52.3
$T_W$ , [K]	300.0

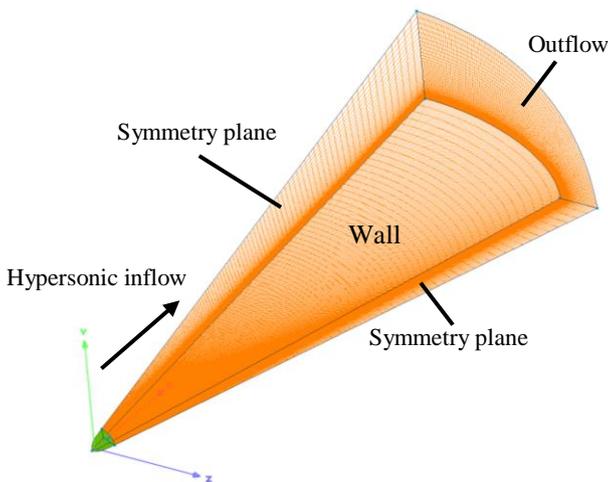


Fig. 3.1 Computational domain with mesh around elliptic cone

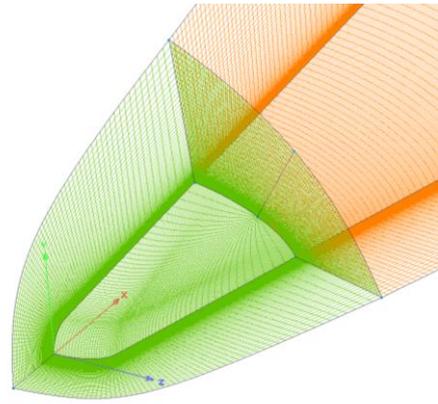


Fig. 3.2 Enlarged view of the tip

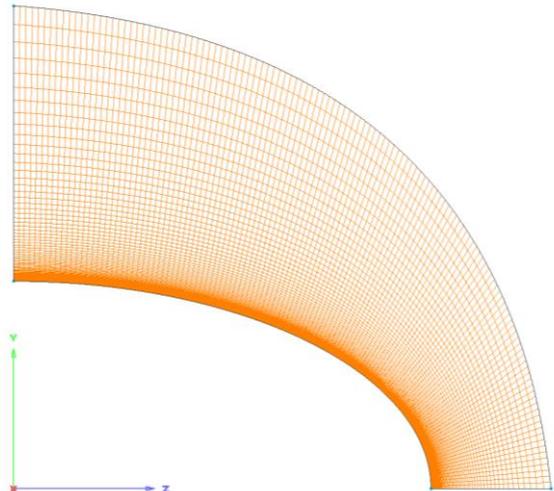


Fig. 3.3 The outflow boundary mesh

## 4. 計算結果および考察

### 4.1 基本流計算

流れ場のマッハ数分布を図 4.1 に示す. また, 流出面のマッハ数分布を図 4.2 に,  $x/L=0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  の位置の断面における壁面付近のマッハ数分布を図 4.3 に示す. 図 4.3 は, 壁面垂直方向 110 層までを可視化している. 物体周りに衝撃波が発生していることが分かる. 楕円錐で非軸対称であるため, 衝撃波および境界層は長径側で薄く, 短径側で比較的厚くなっている. 図 4.2, 4.3 から短径側の対称面付近において, 境界層の外縁から上方にかけてキノコ雲状の縦渦断面が確認できる. さらに図 4.3 から, 縦渦は約  $x/L=0.2$  から発生し始めている. 境界層には約 65 点の格子点が入っており, 境界層をある程度解像できている. また, 図 4.4 に圧力分布および流線を示す. 長径側から短径側に発生する圧力勾配によって流れが曲げられていることが分かる. このクロスフローによって図 4.1-4.3 に示したように短径側に縦渦が発生する.

図 4.5 に流出境界壁面付近を拡大し, 速度ベクトル分布を示す. 位置は図 4.2 を参照のこと. 境界層外縁付近(約 0.75δ)でベクトルの向きが変わっており, 速度ベクトルが変曲点を持っていることから, いわゆるクロスフローとなっていることが分かる. 図 4.7 に  $x/L=0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  の位置の断面における  $x$  方向の渦度分布を示す. 境界層外縁付近, 長径側, キノコ雲状の縦渦が発生している短径側で渦度生成が確認できる. また, 境界層内や衝撃層内のほとんどで反時計回りの流れとなっており, せん断構造となっている. この速

度せん断流が境界層低層側に位置する場合、分子粘性によって渦が散逸または発生が抑制され流動安定となり得るが、本結果のように外縁側となる場合には不安定化し得る<sup>(26)</sup>。

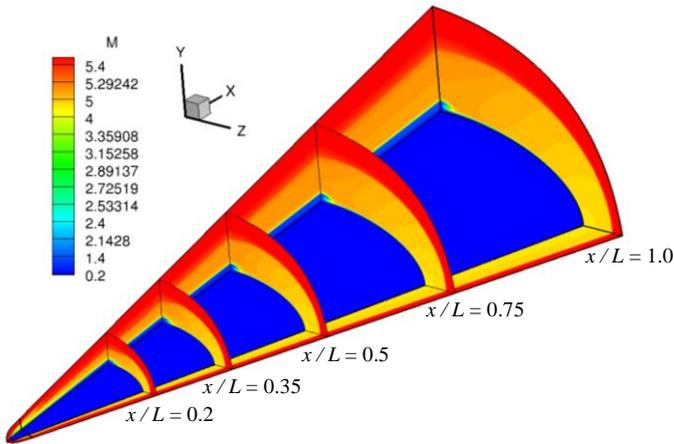


Fig. 4.1 Mach number distribution

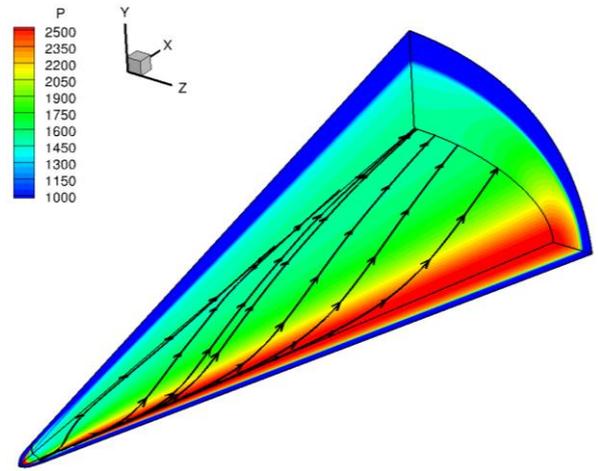


Fig. 4.4 Pressure distribution and streamline

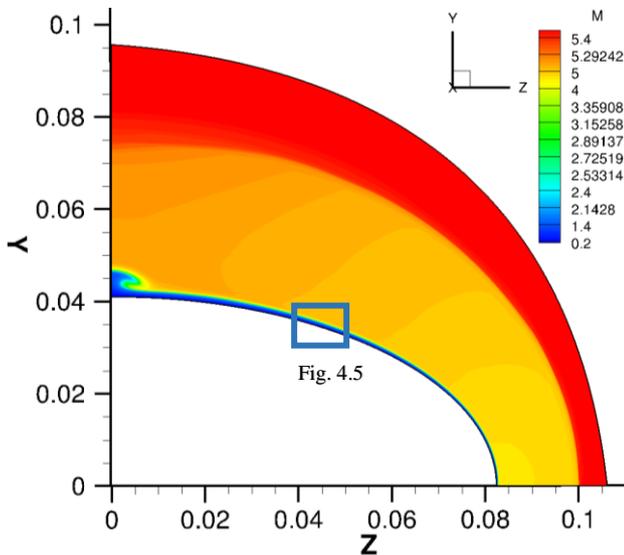


Fig. 4.2 Mach number distribution at outflow boundary

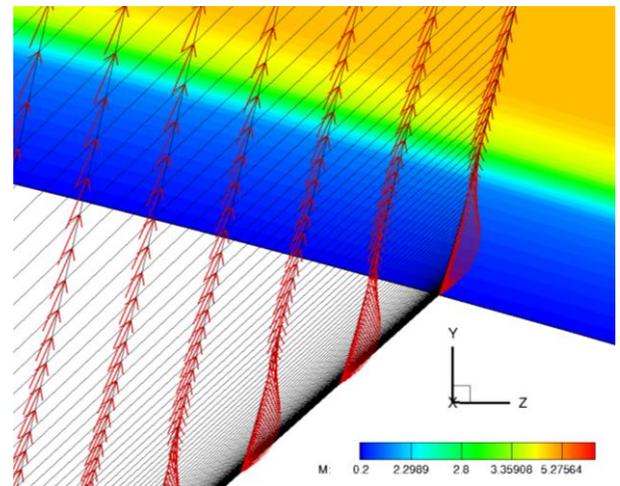


Fig. 4.5 Velocity vector near the wall

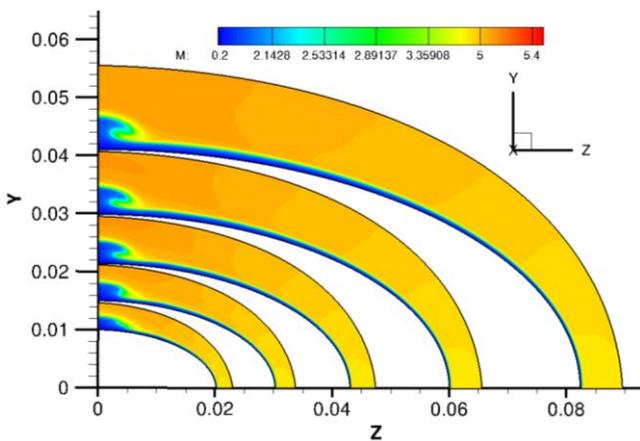


Fig. 4.3 Mach number distribution ( $x/L = 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  section)

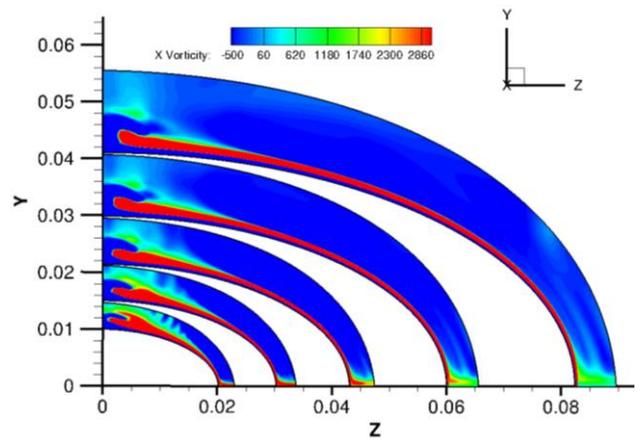


Fig. 4.6  $x$  vorticity at outflow boundary ( $x/L = 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  section)

## 4.2 全体安定性解析

### 4.2.1 最大実固有値に対応する密度の固有モード

最大実固有値に対応する密度の固有モードの境界面上の分布を図 4.7 に示す。また、流出面における密度の固有モードを図 4.8 に示す。まず、衝撃波面に擾乱の強め合いが確認できるが、これは図 3.3 から分かるように、衝撃波付近の格子が粗くなっていることと、衝撃波面を横切る際に急激な

勾配によって強い擾乱が生まれやすいことから、数値的な誤差であると考え無視する。図 4.8 より境界層外縁付近や壁面と衝撃波の間(短径側および長径側対称境界面付近)で、擾乱の強め合いを確認することができる。

境界層外縁付近の特徴的構造に着目し、分布が見られる格子断面(境界層厚さ約 40%, 75%, 100%の位置)の密度の最大固有モード分布をそれぞれ図 4.9 – 4.11 に示す。図 4.9 より、壁面に近く粘性の影響を大きく受けており擾乱成長はあまり見られず、ランダムな分布になっていることが分かる。長径側では、先端から 0.03m 以降直線的に伸びている筋状の固有モード分布が確認できる。図 4.10 を見ると、筋状分布が直線的であった図 4.9 とは違い、0.15m 付近から短径側に向かってやや曲がっていることが分かる。境界層外縁に近づいたことで、粘性の影響が小さくなり慣性流の影響が強くなり現れている。図 4.11 では、さらにクロスフローの影響が強くなり、長径側で擾乱の強め合っている領域が広がっている。T. J. Juliano と S. P. Schneider 実験では、複数の縦渦による筋状の加熱分布を得ており、全体安定性解析において確認できた分布は、同様の傾向を得た。また、図 4.10 で見られるクロスフローに沿って曲がった筋状分布を本研究ではクロスフロー不安定性と呼ぶこととする。

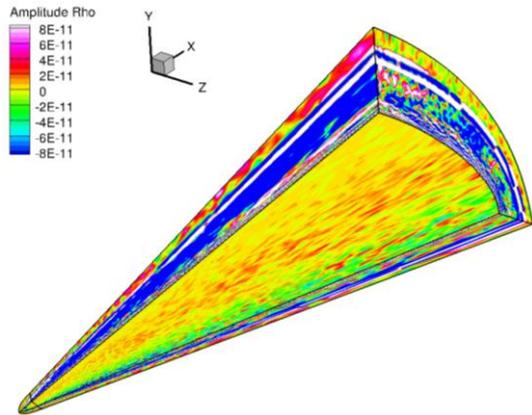


Fig. 4.7 Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue

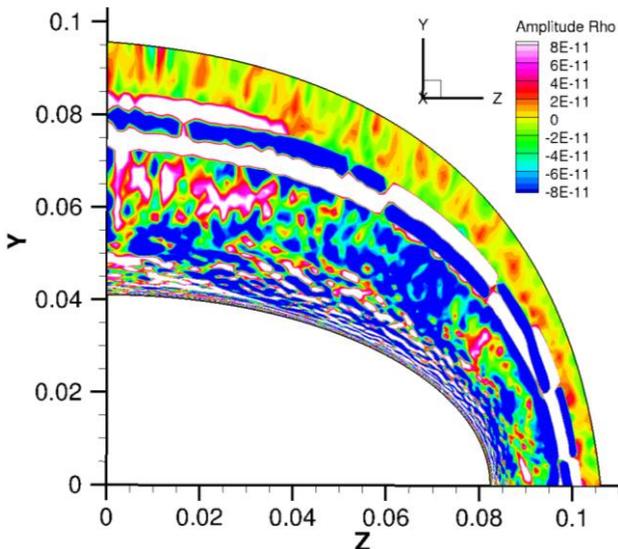


Fig. 4.8 Eigen mode of the density corresponding to maximum real eigenvalue at the outflow surface

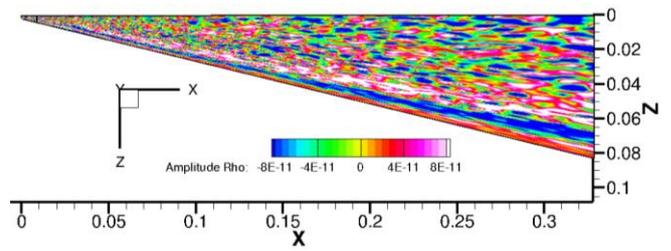


Fig. 4.9 Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 40%

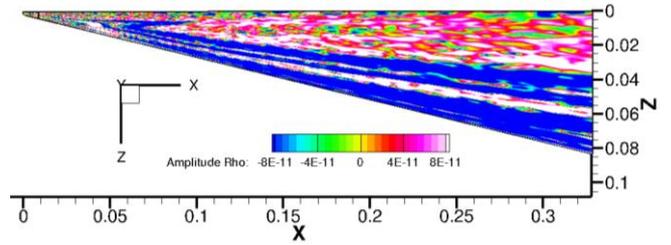


Fig. 4.10 Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

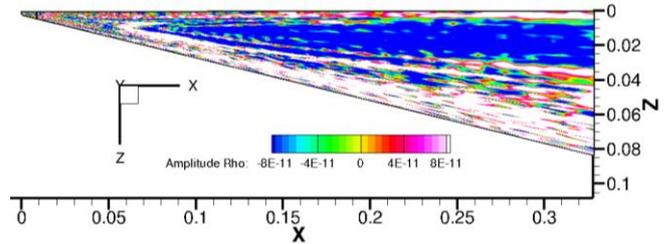


Fig. 4.11 Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 100%

#### 4.2.2 2番目に大きい固有値に対応する密度の固有モード

2番目に大きい固有値に対応する密度の固有モードの境界面上の分布を図 4.12 に示し、図 4.13 に流出面における密度の固有モードを示す。図 4.13 より境界層外縁付近や壁面と衝撃層内の間に周方向の密度の固有モード分布が確認できる。また、境界層厚さ約 40%, 75%, 100%の位置の密度の固有モード分布を図 4.14 - 4.16 に示す。図 4.14 では図 4.9 で確認できた長径側のクロスフロー不安定性分布が確認できない。しかし、図 4.9 と図 4.14 は共に全体的にランダムな分布になっている。また、図 4.15 では図 4.10 で確認できたクロスフロー不安定性分布は確認できないが、図 4.10 と図 4.15 は、長径側は比較的安定で、短径側で不安定になっている。図 4.16 においても図 4.11 で確認できたクロスフロー不安定性分布は確認できない。しかし、図 4.11 と図 4.16 は共に短径側の縦渦付近及び長径側で不安定で、短径側は比較的安定になっている。このように、最大実固有値に対応する密度の固有モードでは確認できたクロスフロー不安定性分布が2番目に大きい固有値に対応する密度の固有モードでは確認できないが、同様の傾向を示していることが分かる。固有値の実部は固有モードの成長率を表しているため、固有値が大きいほど早く流れ場が不安定になる。つまり、最大実固有値が不安定性の主因となる。

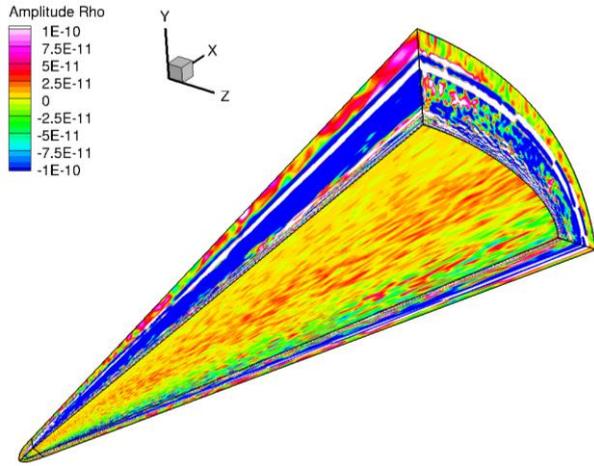


Fig. 4.12 Eigen mode of density corresponding to second real eigenvalue

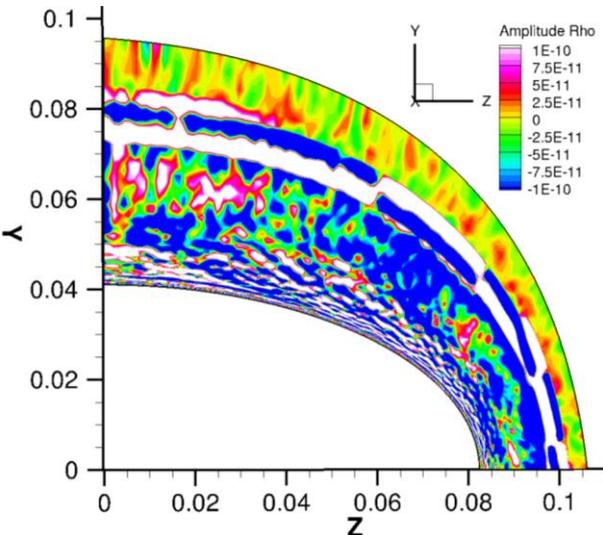


Fig. 4.13 Eigen mode of the density corresponding to second real eigenvalue at the outflow surface

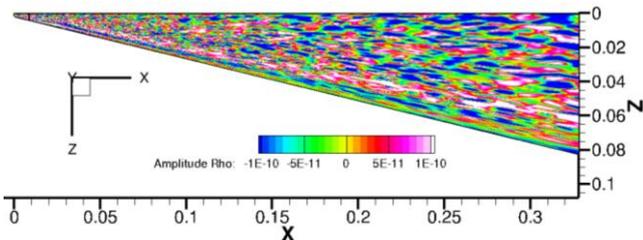


Fig. 4.14 Eigen mode of density corresponding to second real eigenvalue at boundary layer thickness of 40%

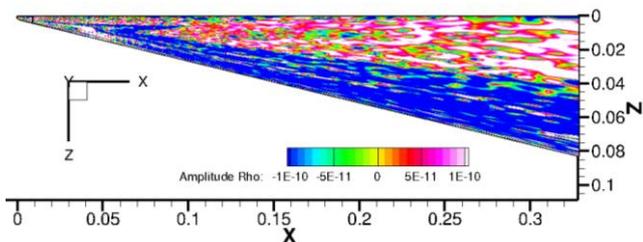


Fig. 4.15 Eigen mode of density corresponding to second real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

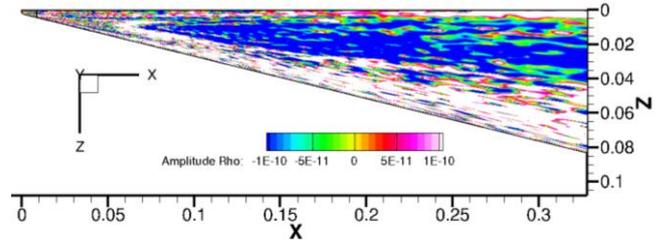


Fig. 4.16 Eigen mode of density corresponding to second real eigenvalue at boundary layer thickness of 100%

#### 4.2.3 原始変数の最大実固有値の対応する固有モード

次に、原始変数に対する最大固有モードを比較する。境界層厚さ 75%における最大実固有値に対応する密度、圧力、 $x$  方向速度、 $y$  方向速度、 $z$  方向速度の固有モードをそれぞれ図 4.17-4.21 に示す。図 4.18 より圧力の最大固有モードは密度の最大固有モードでクロスフロー不安定性分布が現れた位置に擾乱の強め合いが確認できる。図 4.19 より  $x$  方向速度の最大固有モードは全体的に負の値を取っており安定である。その他の断面においても安定である。図 4.20-4.21 より  $y$  方向速度、 $z$  方向速度の最大固有モードは全体的に正の値を取っており不安定であることが分かる。その他の断面においても不安定である。また、 $y$  方向速度、 $z$  方向速度の最大固有モードは、境界層厚さ約 75%の断面で密度の最大固有モードでクロスフロー不安定性分布現れた位置に擾乱の強め合いが見られる。

密度の最大固有モードと同傾向のクロスフロー不安定性分布を示した圧力、 $y$  方向速度、 $z$  方向速度の最大固有モードに着目する。 $x/L=0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  の位置の断面における最大実固有値に対応する圧力、 $y$  方向速度、 $z$  方向速度の最大固有モードをそれぞれ図 4.22-4.24 に示す。 $y$  方向速度、 $z$  方向速度の最大固有モードは境界層厚さ約 1%から境界層外縁まで全域で不安定になっている。一方、圧力の最大固有モードは境界層厚さ約 40%から境界層外にかけて不安定になっている。境界層内では渦度の  $x$  方向成分  $\omega_x$  に対応する擾乱が強め合っており、境界層外縁付近では音波に対応する擾乱が強め合っていることから、クロスフロー不安定性の支配因子は、渦度  $\omega_x$  と圧力の擾乱成長であると考えられる。

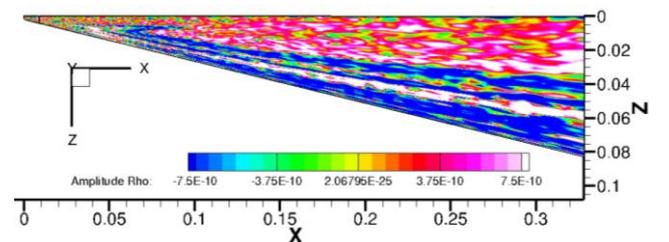


Fig. 4.17 Eigen mode of density corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

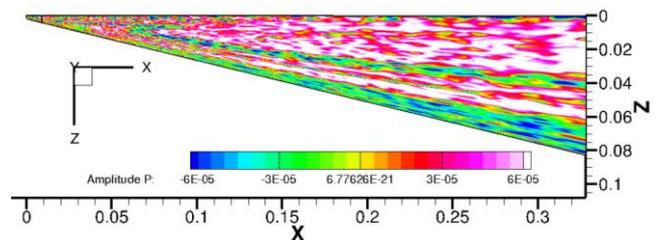


Fig. 4.18 Eigen mode of pressure corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

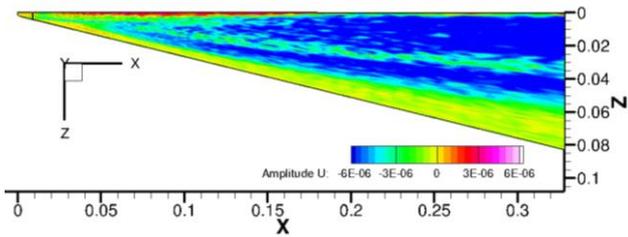


Fig. 4.19 Eigen mode of  $x$  direction velocity corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

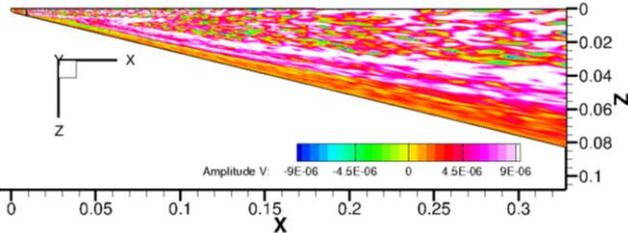


Fig. 4.20 Eigen mode of  $y$  direction velocity corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

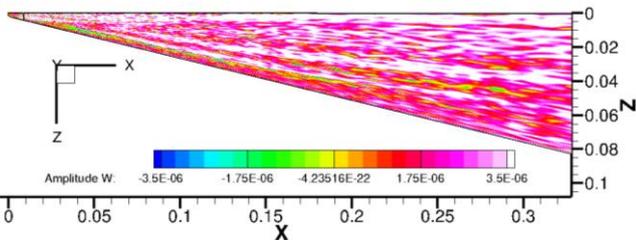


Fig. 4.21 Eigen mode of  $z$  direction velocity corresponding to maximum real eigenvalue at boundary layer thickness of 75%

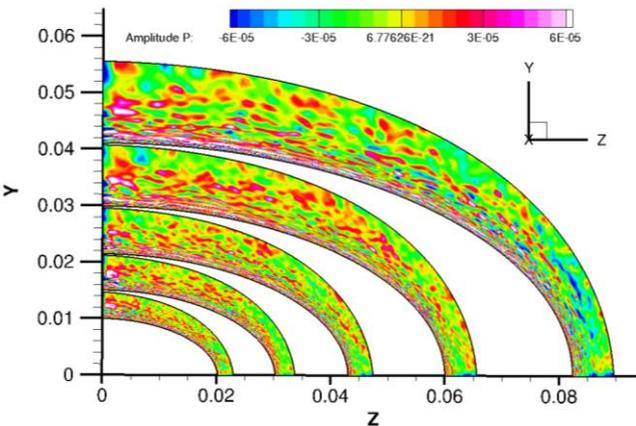


Fig. 4.22 Eigen mode of pressure corresponding to the maximum real eigenvalue near the wall ( $x/L = 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  section)

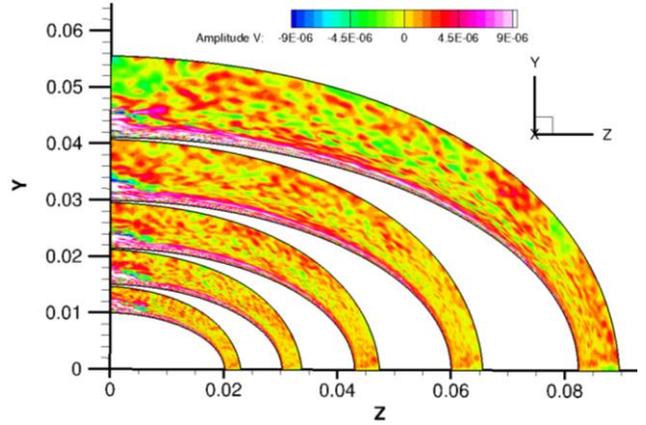


Fig. 4.23 Eigen mode of  $y$  direction velocity corresponding to the maximum real eigenvalue near the wall ( $x/L = 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  section)

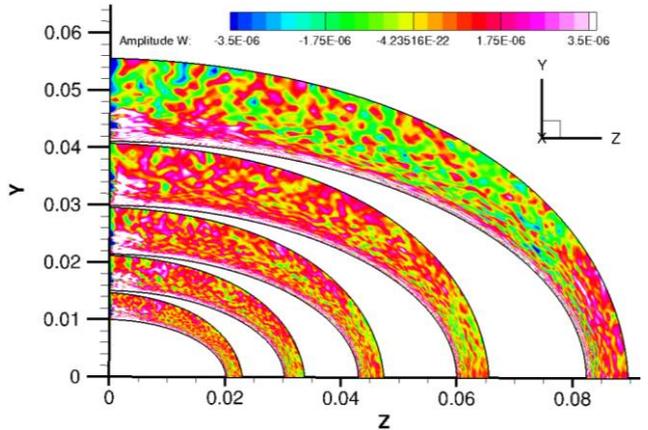


Fig. 4.24 Eigen mode of  $z$  direction velocity corresponding to the maximum real eigenvalue near the wall ( $x/L = 0.2, 0.35, 0.5, 0.75, 1.0$  section)

#### 4.2.4 乱流遷移位置の予測

クロスフロー不安定性の支配因子である渦度 $\omega_x$ と圧力の最大固有モードをそれぞれ流線に沿って積分する。境界層厚さ約 75%断面における圧力の最大固有モードで見られるクロスフロー不安定性分布上に5本の流線を引く(図4.25)。図4.26, 4.27 にそれぞれ渦度 $\omega_x$ と圧力の最大固有モードの積分結果を示す。図4.26 より渦度 $\omega_x$ の積分値は約 0.19[m]から、図4.27 より圧力の最大固有モードの積分値は約 0.21[m]から急激に上昇していることが分かる。図 4.28 に積分値が急激に増加する点を実験結果にプロットした図を示す。図4.28 より、渦度 $\omega_x$ と圧力の最大固有モードそれぞれのプロットは筋状の加熱率分布の先端付近(0.2[m]付近)に位置している。まず約 0.19[m]の境界層内で渦度 $\omega_x$ に対応する擾乱が強め合い、次に約 0.21[m]の境界層外縁付近で音波に対応する擾乱が強まり、壁面加熱につながっていると考えられる。

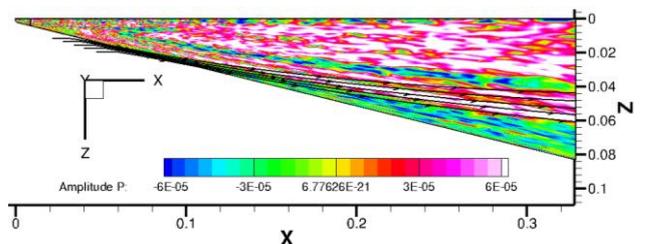


Fig. 4.25 Stream line on the streak distribution in maximum eigen mode of pressure

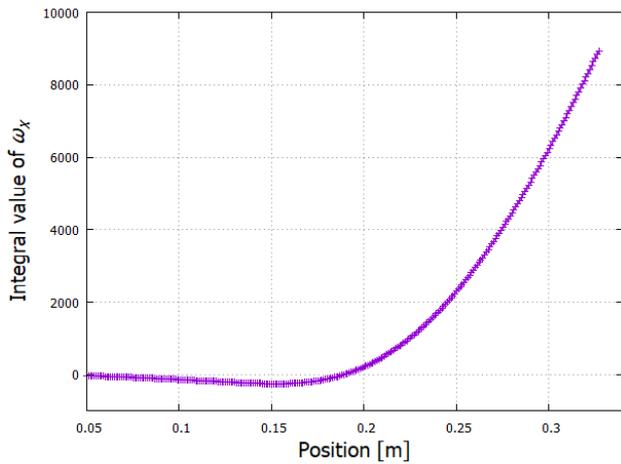


Fig. 4.26 Integral value of  $\omega_x$

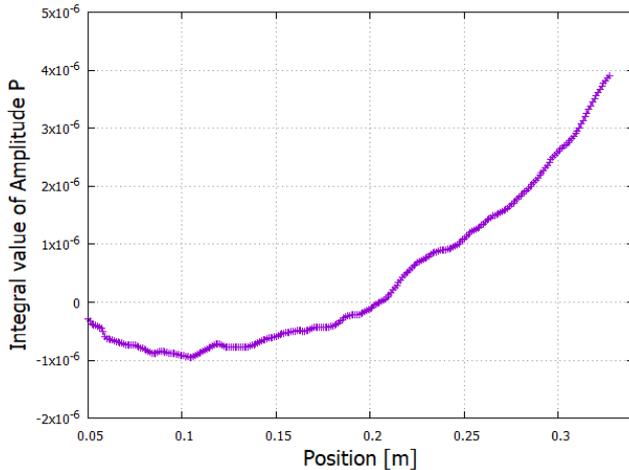


Fig. 4.27 Integral value of Amplitude P

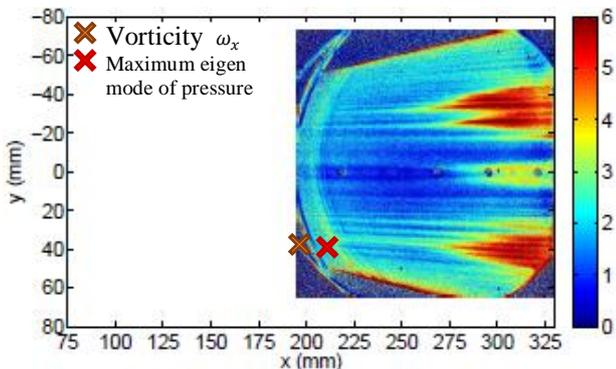


Fig. 4.28 Experimental results of the same mainstream condition

## 5. まとめ

本研究では、極超音速流における楕円錐模型周りの乱流遷移位置の予測を目指し、全体安定性解析を用いて流れ場の不安定モードを調査した。

まず、楕円錐模型周りの流れ場計算を行った。衝撃波面の形成、短径側の対称境界面付近に先端から伸びるキノコ雲状の縦渦が確認できた。境界層外縁付近には、速度ベクトルが変曲点を持ち、クロスフローが確認できた。

次に、楕円錐模型周りの流れ場に対して全体安定性解析を行った。最大実固有値に対応する密度の固有モードを確認すると、境界層外縁付近および壁面と衝撃波の間(短径側および長径側対称境界面付近)で擾乱が強め合っていることが分かった。境界層外縁付近で見られるクロ

スフロー不安定性分布は、T. J. Juliano と S. P. Schneider の実験で得られた筋状の壁面加熱率分布と同様の傾向が得られた。

最大実固有値に対応する密度の固有モードと2番目に大きい固有値に対応する固有モードを比較すると、同傾向の結果が得られたが、筋状分布が確認できたのは最大実固有値に対応する固有モードのみであった。固有値の実部は固有モードの成長率を表しているため、固有値が大きいほど早く流れ場が不安定になる。つまり、最大実固有値が不安定性の主因となる。

原始変数において最大実固有値に対応する固有モードを確認した。圧力、 $y$ 方向速度、 $z$ 方向速度の最大固有モードにおいて、密度の最大固有モードと同様の傾向の筋状分布が得られた。 $y$ 方向速度、 $z$ 方向速度の最大固有モードでは境界層内に擾乱の強め合いを確認でき、圧力の最大固有モードでは境界層外縁付近に擾乱の強め合いを確認できた。クロスフロー不安定性は、境界層内では渦度の $x$ 方向成分 $\omega_x$ に対応する擾乱が強め合っており、境界層外縁付近では音波に対応する擾乱が強め合っていると考えられる。このことからクロスフロー不安定性の支配因子は渦度 $\omega_x$ と圧力の擾乱成長であると考えられる。

クロスフロー不安定性の支配因子が渦度 $\omega_x$ と圧力の擾乱成長であるとみられ、渦度 $\omega_x$ と圧力の最大固有モードを流線に沿って積分した。渦度 $\omega_x$ の積分値は0.19[m]付近で、圧力の最大固有モードの積分値は0.21[m]付近で急激に上昇しており、0.2[m]付近から乱流遷移が始まっていると考えられる。また、実験結果にプロットすると筋状の加熱率分布の先端付近に位置しており、まず境界層内で渦度 $\omega_x$ に対応する擾乱が強め合い、次に境界層外縁付近で音波に対応する擾乱が強まる。

本研究では、全体安定性解析を行うことにより、筋状のクロスフロー不安定性を確認した。さらに、原始変数の最大固有モードを調査することにより渦度の $x$ 方向成分 $\omega_x$ と音波に対応する擾乱成長が確認でき、クロスフロー不安定性の発端であることを示した。渦度 $\omega_x$ と圧力の最大固有モードを流線に沿って積分することにより乱流遷移位置を評価した。

## 文献

- (1) J. J. Bertin, and R. M. Cummings, "Fifty years of hypersonics: where we've been, where we're going," Prog. Aerosp. Sci., Vol. 39, (2003), pp. 511-536.
- (2) D. J. Dolvint, "Hypersonic International Flight Research and Experimentation (HIFiRE) Fundamental Science and Technology Development Strategy," AIAA Paper 2008-2581, (2008).
- (3) T. J. Juliano, D. Adamczak and R. L. Kimmel, "HIFiRE-5 Flight Test Results," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 52, (2015), pp. 650-663.
- (4) M. P. Borg and R. L. Kimmel, "Simultaneous Infrared and Pressure Measurements of Crossflow Instability Modes for HIFiRE-5," AIAA paper 2016-0354, (2016).
- (5) R. L. Kimmel, D. W. Adamczak, D. Hartley, H. Alesi, M. A. Frost, R. Pietsch, J. Shannon and T. Silvester, "Hypersonic International Flight Research Experimentation-5b Flight Overview," AIAA J., Vol. 55, (2018), pp. 1303-1314.
- (6) M. P. Borg and R. L. Kimmel, "Ground Test of Transition for HIFiRE-5b at Flight-Relevant Attitudes," AIAA J., Vol. 55, (2018), pp. 1329-1340.
- (7) R. L. Kimmel, D. Adamczak, K. Berger and M. Choudhari, "HIFiRE-5 Flight Vehicle Design," AIAA Paper 2010-4985, (2010).

- (8) T. J. Juliano, J. Poggie, K. M. Porter, R. L. Kimmel, J. S. Jewell and D. Adamczak, "HIFiRE-5b Heat Flux and Boundary-Layer Transition," *AIAA J.*, Vol. 55, (2018), pp. 1315-1328.
- (9) J. B. Edelman and S. P. Schneider, "Secondary Instabilities of Hypersonic Stationary Crossflow Waves," *AIAA J.*, Vol. 56, (2018), pp. 182-192.
- (10) D. J. Dinzl and G. V. Candler, "Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5 using Direct Numerical Simulation," *AIAA Paper 2015-0279*, (2015).
- (11) D. J. Dinzl and G. V. Candler, "Direct Simulation of Hypersonic Crossflow Instability on an Elliptic Cone," *AIAA J.*, Vol. 55, (2017), pp. 1769-1782.
- (12) A. J. Moyes, T. S. Kocian, D. Mullen and H. L. Reed, "Boundary-Layer Stability Analysis of HIFiRE-5b Flight Geometry," *AIAA J.*, Vol. 55, (2018), pp. 1341-1355.
- (13) A. Viladegut, Jean-Etienne Durand, F. Pinna and O. Chazot "Hypersonic Boundary-Layer Duplication Methodology Downstream of the Stagnation Point," *AIAA J.*, Vol. 55, (2018), pp. 1393-1400.
- (14) T. J. Juliano and S. P. Schneider, "Instability and Transition on the HIFiRE-5 in a Mach-6 Quiet Tunnel," *AIAA Paper 2010-5004*, (2010).
- (15) S. P. Schneider, "Developing mechanism-based methods for estimating hypersonic boundary-layer transition in flight: The role of quiet tunnels," *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol. 72, (2015), pp. 17-29.
- (16) 鈴木宏二郎, 安倍賢一, 亀田正治, 一般社団法人 日本航空宇宙学会編, "粘性流体力学," 丸善出版, (2017), pp. 151-152.
- (17) S. P. Schneider, "Hypersonic laminar-turbulent transition on circular cones and scramjet forebodies," *Prog. Aerosp. Sci.*, Vol. 40, (2004), pp. 1-50.
- (18) P. Paredes, R. Gosse, V. Theofilis and R. Kimmel, "Linear modal instabilities of hypersonic flow over an elliptic cone," *J. Fluid Mech.*, Vol. 804, (2016), pp. 442-466.
- (19) M. W. Tufts, R. C. Gosse and R. L. Kimmel, "Parabolized Stability Equation Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5b Flight Test," *AIAA J.*, Vol. 55, (2018), pp. 1369-1378.
- (20) F. Gomez, S. L. Clainche, P. Paredes, M. Hermanns and V. Theofilis, "Four Decades of Studying Global Linear Instability: Problems and Challenges," *AIAA J.*, Vol. 50, (2012), pp. 2731-2743.
- (21) 松瀬祐二, "円錐形状周りにおける極超音速流れの全体安定性解析," 東北大学大学院修士学位論文, (2016).
- (22) Y. Wada and M. S. Liou, "A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities," *AIAA Paper 94-0083*, (1994).
- (23) B. van Leer, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 32, (1979), pp. 101-136.
- (24) W. E. Arnoldi, "The Principle of Minimized Iterations in the Solution of the Matrix Eigenvalue Problem," *Q. Appl. Math.*, Vol. 9, (1951), pp. 17-29.
- (25) 千葉賢, "円柱を過ぎる流れの全体不安定性に関する研究," 日本流体力学会会誌「ながれ」, Vol. 15, (1996), pp. 295-307.
- (26) 谷口英夫, 渡邊喬, 加藤景一, "横流れ不安定特性に影響を及ぼす三次元層流境界層の要因について," 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 72, No. 702, (2005), pp. 459-466.

