

卒業論文要旨

制限関数を用いた流束再構築法による不連続流れの計算

システム工学群

航空エンジン超音速流研究室 1200089 田村 北斗

1. 研究目的と背景

航空機まわりの流体計算では、複雑形状への適合性と高い計算精度を保持しながらより低い計算コストで実行できる計算コードが必要とされる。形状適合性に優れ、複雑形状まわりの格子生成が容易な非構造格子法の中で、現在広く用いられている計算手法が有限体積法である。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。

しかし、有限体積法はセル境界面の物理量をセル外部のステンシルから補間するため、いくつかの問題を持つ。一つは空間精度が低いことである。セル境界面の物理量の補間精度は隣接セルの品質に大きく依存する。そのため、隣接セルの品質が悪い場合、定式通りの計算精度を得ることができない。もう一つの問題は並列化計算に適さないことである。有限体積法での高次精度化には、セル外部のより多くのステンシルが必要となり、コンパクト性を失う。そのため、領域分割による並列化において通信コストが高くなり、並列化効率が下がる。従って、有限体積法を用いて航空機まわりの流体計算を行うことは複雑形状への適合性では優れるが、高次精度化や並列化効率に欠点がある。

セル内部に高次精度化のための自由度を持たせることで前述した有限体積法の問題を回避することができる。このような考え方に基づく手法の一つに Huynh が考案した流束再構築法⁽¹⁾⁽²⁾(Flux Reconstruction Method, 以下 FR 法)がある。FR 法では導入した自由度によるセル内部の物理量分布から、セル内部の流束分布を構築し、セル境界面での数値流束により流束分布を再構築する。再構築された流束分布は計算領域全体で連続となるため、微分型の保存則を解くことができる。FR 法では K 個の自由度により $2K - 2$ 次の空間精度を得る。セル境界面の物理量をセル内部の情報のみで求めることができるために、隣接セルのみの情報だけで高い計算精度を得られるコンパクトな手法であると言える。

将来的に航空機まわりの圧縮性流動場への適用を考えると、主翼上面に形成される衝撃波面のように微分不可となる不連続面を含んだ大域解を算出する必要がある。不連続分布近傍での不連続検知と数値振動の抑制には大きく分けて、人工粘性と制限関数の二つの方法がある。Cook らが考案した LAD⁽³⁾⁽⁴⁾を宮路⁽⁵⁾は FR 法に適用し、衝撃波関連のベンチマーク問題を解いている。芳賀ら⁽⁶⁾は FR-LAD を航空宇宙工学分野の実践的な問題に適用し、非常に良好な結果を得ている。

本研究では、航空機まわりの圧縮性流体計算に向けた第一歩として、線形移流方程式を計算対象とした FR 法の計算コード開発とその検証を目的とする。さらに、不連続分布の移流問題を例にとり、FR 法に適した制限関数を提案する。

2. 数値計算法

2.1 1 次元 FR 法

1 次元線形移流方程式を考える。

$$u_t + f_x = 0. \quad (1)$$

計算領域はセル E_j ($j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) に分割し、各セル内に K 個の内点(自由度)を導入する。セル内の内点を Solution Point (以下 SP) と呼ぶ。各セル内の SP の座標位置 $x_{j,k}$ ($k = 1, \dots, K$) での解を $u_{j,k}$ と表す。

$$(u_t)_{j,k} + (f_x)_{j,k} = 0. \quad (2)$$

まず初めにセル E_j 内の保存量の $K - 1$ 次近似関数をラグランジュ補間により求める。

$$u_j(\xi) = \sum_{k=1}^K u_{j,k} \phi_k(\xi), \quad \phi_k(\xi) = \prod_{l=1, l \neq k}^K \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l}. \quad (3)$$

次に流束関数を構築する。線形移流方程式を考えているので、SP での流束は保存量から簡単に求まる。

$$f_{j,k} = c u_{j,k}. \quad (4)$$

式(3)と同様にセル E_j 内の流束の $K - 1$ 次近似関数を求める。

$$f_j(\xi) = \sum_{k=1}^K f_{j,k} \phi_k(\xi). \quad (5)$$

これは不連続流束関数と呼ばれ、セル内では連続だが、セル境界では不連続、つまりセル境界で微分不可である。計算領域全体で連続となるにはセル境界 $x_{j+1/2}$ で共通の値を持つ必要がある。セル境界での保存量を両側セルから外挿する。

$$u_L = u_j(1), \quad u_R = u_{j+1}(-1). \quad (6)$$

Roe 法⁽⁷⁾を用いて数値流束を求める。

$$f_{upw} = f_{j+1/2, upw} = \frac{1}{2} [f(u_L) + f(u_R)] - \frac{1}{2} |a(\tilde{u})| (u_R - u_L). \quad (7)$$

ここで $a(\tilde{u})$ は、

$$a(\tilde{u}) = \begin{cases} \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} & \text{if } u_L \neq u_R \\ a(u_L) = a(u_R) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

セル境界で f_{upw} をとるよう再構築する。

$$F_j(\xi) = f_j(\xi) + [f_{j-1/2, upw} - f_j(-1)] g_{LB}(\xi) + [f_{j+1/2, upw} - f_j(1)] g_{RB}(\xi). \quad (9)$$

これは連続流束関数と呼ばれ、セル境界でも連続である。ここで、 $g_{LB}(\xi)$ は $g_{LB}(-1) = 1$, $g_{LB}(1) = 0$ となる K 次多項式であり、修正関数と呼ばれる。 $g_{RB}(\xi)$ は $g_{LB}(\xi)$ の原点対称な多項式である ($g_{RB}(\xi) = g_{LB}(-\xi)$)。式(9)を空間微分する。

$$(F_\xi)_{j,k} = (f_\xi)_{j,k} + [f_{j-1/2, upw} - f_j(-1)] g_{LB}'(\xi_k) + [f_{j+1/2, upw} - f_j(1)] g_{RB}'(\xi_k). \quad (10)$$

物理座標系での SP における流束の空間微分は、

$$(F_x)_{j,k} = 2/h_j (F_\xi)_{j,k}. \quad (11)$$

ここで h_j は格子幅を表す。従って、式(2)は半離散式で表せ、

$$\frac{du_{j,k}}{dt} = -(F_x)_{j,k}. \quad (12)$$

時間積分により保存量を更新する。本研究では SP に $K = 3$ のガウス点、時間積分法に TVD3 次ルンゲクッタ法⁽⁸⁾を用いた。

2.2 制限関数

FR法では、不連続流束関数 $f(\xi)$ とセル境界の風上流束との差倍された修正関数 $g_{LB}(\xi)$, $g_{RB}(\xi)$ の線形和を取ることで連続流束関数 $F(\xi)$ を得る。しかし、連続流束関数のセル内振動は解の数値振動の原因となる。本研究では、非物理的な数値振動の抑制を目指す新たな試みとして、以下に示す2つの制限関数を考案した。

2.2.1 制限修正関数

修正関数を制限することで、連続流束関数のセル内振動を抑制することを考える。

不連続検知には KXRCF 不連続検知⁽⁹⁾を用いる。次式を満たす時、 $F_j(\xi)$ に制限が必要であると判断する。

$$\frac{|f_{j-1}(1) - f_j(-1)|}{\|f_j(\xi)\|} > C_k, \quad (13)$$

$$\frac{|f_{j+1}(-1) - f_j(1)|}{\|f_j(\xi)\|} > C_k, \quad (14)$$

ここで、 C_k は定数である。

K 個の SP を取る FR 法では、 K 次の修正関数を用いるが、不連続を検知したセルには 1 次の修正関数に制限する。

2.2.2 WENO 制限関数

勾配を用いた制限を連続流束関数に行うことで、連続流束関数のセル内振動を抑制することを考える。

2.2.1 節と同様に KXRCF 不連続検知を用い、連続流束関数がセル内振動を生じる可能性のあるセルを検知する。隣接セルと自セルの連続流束関数を用いて、各セルの連続流束関数を以下のように修正する。

$$\tilde{F}_l(x) = F_l(x) - \frac{1}{h_j} \int_{E_j} F_l(x) dx + \frac{1}{h_j} \int_{E_j} F_j(x) dx \\ , (l = j-1, j, j+1). \quad (15)$$

式(15)で修正した連続流束関数を用いて、WENO法⁽¹⁰⁾と同様に重み付け平均を取ることで、セル E_j での制限された連続流束関数 $F_j^{new}(x)$ を得る。

$$F_j^{new}(x) = \sum_{l=j-1}^{j+1} \omega_l \tilde{F}_l(x). \quad (16)$$

式(15), (16)より、 $\omega_{j-1} + \omega_j + \omega_{j+1} = 1$ であれば、 $F_j^{new}(x)$ が $F_j(x)$ と同じセル平均値を取ることがわかる。よって、重みは次式のように規格化して与える。

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\omega_l}{\sum_{m=j-1}^{j+1} \omega_m}, (l = j-1, j, j+1). \quad (17)$$

重み $\tilde{\omega}_l$ は次式で表される。

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\gamma_l}{(\varepsilon + \beta_l)^2}, (l = j-1, j, j+1). \quad (18)$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ として分母がゼロになることを防ぐ。滑らかな領域において、 $\tilde{F}_l(\xi)$ は十分な精度を持っているので、参考文献(11)と同様に自セルの連続流束関数が散逸的にならないよう γ_l を設定する。

$$\gamma_j = 0.998, \quad \gamma_{j-1} = \gamma_{j+1} = 0.001 \quad (19)$$

β_l は滑らかさ係数と呼ばれ、各連続流束関数のセル E_j での滑らかさを微分を用い、定量評価する。

$$\beta_l = \sum_{s=1}^2 (h_j)^s \int_{E_j} \left(\frac{ds}{dx^s} \tilde{F}_l(x) \right)^2 dx. \quad (20)$$

連続流束関数 $F_j(x)$ が振動を起こしているセル E_j では、全てのSPにおいて、連続流束関数の値 $F_j(x_{j,k})$ を隣接セルの連続流束関数との重み付け平均により得られた制限連続流束関数の値 $F_j^{new}(x_{j,k})$ に置き換える。連続流束関数 $F_j(x)$ が振動を生じないセル E_j では、 $F_j^{new}(x_{j,k}) = F_j(x_{j,k})$ となる。

3. 計算結果

3.1 1 次元線形移流 FR 法コードの精度検証

計算領域は x 方向に[0,1]、格子点数は50点、周期境界として計算した。初期条件は次式である。

$$u_{init} = \sin(2\pi x). \quad (21)$$

移流速度は $c = 1$ とした。図 1 左に計算結果を示す。図 1 の赤線は 10,000 ステップ後の計算結果を、黒線はその時の誤差を表している。この図から解が発散することなく、物理量の移流が解けていることを確認できる。図 1 右に格子点数が 30 点、60 点、120 点の時の局所誤差の対数グラフを示す。3 つの値を用いた最小二乗法による近似直線の傾きから、3.95 次の計算精度を確認した。

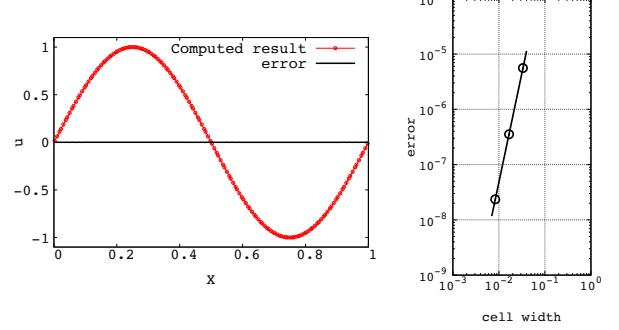


Fig. 1 Advection of sine wave and numerical accuracy

3.2 制限関数を用いた不連続流れの数値計算

計算領域は x 方向に[0,1]、格子点数は 50 点、境界条件は自由流入出として計算した。次式を初期条件として与えた。

$$u_{init}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0.1 \\ 0 & x > 0.1 \end{cases}. \quad (22)$$

移流速度は $c = 1$ 、 $C_k = 0.001$ とした。

制限修正関数の計算結果を図 2 に示す。赤線が計算結果、黒破線が厳密解を表す。図 2 左は 1 ステップ後の計算結果を表す。不連続近傍で数値振動は生じていないが、修正関数が 1 次関数に制限されているため、不連続が階段状に表現されている。図 2 右は 35 ステップ後の計算結果を表す。修正関数が 1 次関数に制限されている領域が拡大し、解が鈍っていることがわかる。また、不連続検知されたセル内の物理量に高次精度の分布を持たせることができないこの制限手法は FR 法には向かないと考えられる。

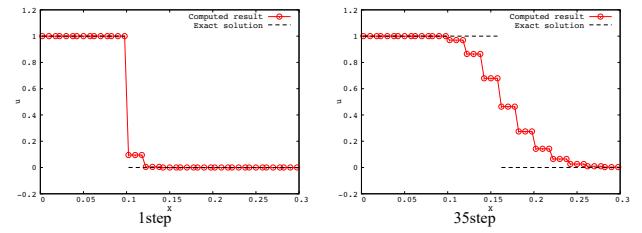


Fig. 2 Advection of step function with limited correction function

WENO 制限関数の計算結果を図 3 に示す。赤線が計算結果、黒破線が厳密解を表す。図 3 左は 1 ステップ後の計算結果を表す。不連続近傍で数値振動は生じていないが、制限修正関数を用いた場合と同様に不連続分布が階段状に解像されている。しかし、図 3 右に示す 35 ステップ後の計算結果では、制限修正関数とは異なり、不連続近傍のセル内に高次精度の分布が生じている。WENO 制限関数は KXRCF 不連続検知した後、セル内の分布の滑らかさにより隣接セルとの重み付け平均を取るため、不連続検知されたセルであっても分布が得られた。

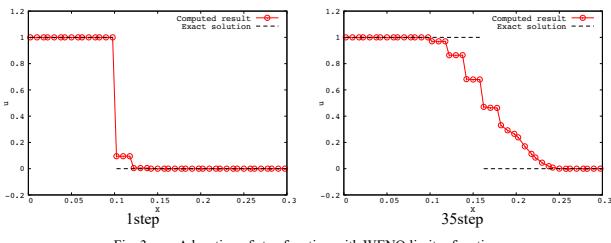


Fig. 3 Advection of step function with WENO limiter function

4. まとめ

1次元線形移流方程式に対し, FR 法の数値計算コードを作成した. 一セルあたり 3 個の自由度を追加することで 3.95 次の計算精度が得られていることを確認した.

FR 法においては, 数値振動を伴わない不連続分布を鮮明に解像するためには流束関数の勾配を制限することが重要であるとわかった.

参考文献

- (1) Huynh, H. T., "A Flux Reconstruction Approach to High-Order Scheme Including Discontinuous Galerkin Methods", AIAA Paper, 2007-4079, 2007
- (2) Huynh, H. T., Wang, Z. J., and Vincent, P. E., "High-order method for computational fluid dynamics : A brief review of compact differential formulations on unstructured grids", *Computers & Fluids*, Vol. 98, pp. 209-220, 2014
- (3) Cook, A. W., "Artificial Fluid Properties for Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Mixing", *Physics of Fluids*, Vol. 19, 055103, 2007
- (4) Cook, A. W., and Cabot, W. H., "A high-wavenumber viscosity for high-resolution numerical methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, pp. 594-601, 2004
- (5) Miyaji, K., "On the Compressible Flow Simulation with Shocks by a Flux Reconstruction Approach", AIAA paper, 2011-3057, 2011
- (6) Haga, T., and Kawai, S., "On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 376, pp. 534-563, 2019
- (7) Roe, P. L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357–372, 1981
- (8) Gottlieb, S., and Shu, C. W., "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes", *Mathematics of Computation*, Vol. 67, pp. 73-85, 1998
- (9) Krivodonova, L., Xin, J., Remacle, J.-F., Chevaugeon, N., and Flaherty, J.E., "Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 48(3), pp. 323-338, 2004
- (10) Liu, X-D., Osher, S., and Chan, T., "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, pp. 200-212, 1994
- (11) Du, J., Shu, C-W., and Zhang, M., "A simple weighted essentially non-oscillatory limiter for the correction procedure via reconstruction (CPR) framework on unstructured meshes", *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 90, pp. 146-167, 2015