

# 卒業論文要旨

## 直接流束再構築法の数値振動抑制と圧縮性流れ場への適用

システム工学群

航空エンジン超音速流研究室 1210045 笠石 丈二

### 1. 研究背景と目的

航空機まわりの流体計算では、複雑形状への適合性と高い計算精度を保持しながらより低い計算コストで実行できる計算コードが必要とされる。形状適合性に優れ、複雑形状まわりの格子生成が容易な非構造格子法の中で、現在広く用いられている計算手法が有限体積法である。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。

しかし、有限体積法はセル境界面の物理量をセル外部のステンシルから補間するため、いくつかの問題を持つ。一つは空間精度が低いことである。セル境界面の物理量の補間精度は隣接セルの品質に大きく依存する。そのため、隣接セルの品質が悪い場合、定式通りの計算精度を得ることができない。もう一つの問題は並列化計算に適さないことである。有限体積法での高次精度化には、セル外部のより多くのステンシルが必要となり、コンパクト性を失う。そのため、領域分割による並列化において通信コストが高くなり、並列化効率が下がる。従って、有限体積法を用いて航空機まわりの流体計算を行うことは複雑形状への適合性では優れるが、高次精度化や並列化効率に欠点がある。

セル内部に自由度を持たせることで、有限体積法の欠点を回避することができる。Huynh によって考案された直接流束再構築法<sup>(1)</sup>(Direct Flux Reconstruction method, 以下 DFR 法)である。DFR 法はセル内部に複数のデータ点(Solution Point 以下 SP)を持ち、SP での物理量からセル内部の流束分布を構築する。構築したセル内部の流束分布からセル境界での流束を求め、セル境界と SP での流束から計算領域全体で連続な流束分布を再構築する。再構築された流束は不連続点が存在しないため、微分型の保存則を解くことができる。DFR 法は K 個の SP から 2K-2 次の空間精度を得る。また、自セルと隣接セルのみの情報で高次精度化が可能であり、コンパクトな手法である。

航空機まわりの圧縮性流体では、衝撃波が発生するため、不連続面を含んだ計算をしなければならない。線形移流問題に対する Godunov の定理より、2 次精度以上の空間精度の場合、不連続面付近では必ず数値振動が発生するため、不連続検知と数値振動の抑制方法を考える必要がある。本研究では、航空機まわりの圧縮性流体計算に向けた第一歩として、線形移流方程式を計算対象とした DFR 法の計算コード開発とその検証を目的とする。さらに、不連続付近で発生する数値振動を抑制する方法を考察する。

### 2. 数値計算法

#### 2.1 1次元 DFR 法

1次元線形移流方程式を考える。

$$u_t + f_x = 0. \quad (1)$$

計算領域はセル  $E_j$  ( $j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) に分割し、各セル内に K 個の SP を導入する。各セル内の SP の座標位置

$x_{j,k}$  ( $k = 1, \dots, K$ ) での解を  $u_{j,k}$  と表す。

$$(u_t)_{j,k} + (f_x)_{j,k}. \quad (2)$$

計算領域全体で連続な流束を再構築するには、セル境界  $x_{j+1/2}$  で共通の流束値  $f^{com}$  を取る必要がある。

$$u^L = u_{j+1/2}^L = u_j(1), u^R = u_{j-1/2}^R = u_j(-1) \quad (4)$$

$$f^{com} = \frac{1}{2} c(u^L + u^R) - \frac{1}{2} |c| (u^R - u^L) \quad (5)$$

次に流束関数を再構築する。線形移流方程式を考えているので、SP とセル境界での流束は保存量から簡単に求まる。

$$f_{j,k} = cu_{j,k}. \quad (6)$$

式(5)より、両端のセル境界での流束を求める。

$$f_{j,0} = f_{j-1/2}^{com}, f_{j,K+1} = f_{j+1/2}^{com}. \quad (7)$$

式(3)と同様の方法でセル境界でも連続な連続流束関数  $(F_\xi)_{j,k}$  を再構築する。

$$(F_\xi)_{j,k} = \sum_{k=0}^{K+1} u_{j,k} \Phi_k(\xi), \quad \Phi_k(\xi) = \prod_{l=0, l \neq k}^{K+1} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l} \quad (8)$$

計算座標系( $\xi$ 座標)から物理座標系( $x$ 座標)に座標変換すると SP における流束の空間微分は、

$$(F_x)_{j,k} = \frac{2}{h_j} (F_\xi)_{j,k}. \quad (9)$$

ただし、 $h_j$  は格子幅を表す。従って、式(2)は半離散式で表せ、

$$\frac{du_{j,k}}{dt} = - (F_x)_{j,k}. \quad (10)$$

時間積分により保存量を更新する。本研究では SP に K=3 のガウス点、時間積分法に TVD3 次ルンゲクッタ法を用いた。

#### 2.2 数値振動の抑制

DFR 法は、SP と両端のセル境界の流束から連続流束関数  $F_\xi$  を得る。しかし、連続流束関数のセル内振動は解の数値振動の原因となる。本研究では、数値振動の抑制のための試みとして以下の方法を考案する。

##### 2.2.1 KXRFC 不連続検知<sup>(2)</sup>

連続流束関数のセル内振動を検知する方法として、セル境界での流束勾配の大きさによって判断する KXRFC 不連続検知を用いる。

$$\frac{|f_{j-1}(1) - f_j(-1)|}{|f_j(\xi)|} > C_k. \quad (11)$$

$$\frac{|f_{j+1}(-1) - f_j(1)|}{|f_j(\xi)|} > C_k. \quad (12)$$

ただし、 $C_k = 0.01$  である

##### 2.2.2 セル内分布の一次精度化

図 1 のように隣り合う SP の中点に境界を設定し、サブセルを作成する。各サブセルで保存量の平均値を求める。<sup>(3)</sup>

$$u'_{j,k} = \frac{1}{\Delta\xi} \int u_j(\xi) d\xi. \quad (13)$$

ただし、 $\Delta\xi$ はサブセル幅である。SP での保存量は変えずに  $u'_{j,k}$ を用いて式(5)と同様の方法で、セル境界の共通流束だけを求めることで保存性を保ち、1次精度化が可能である。

----- :sub-cell boundary      ● :SP

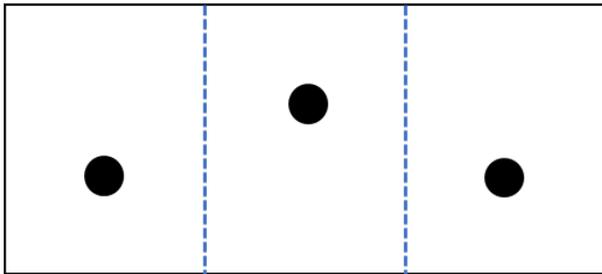


Fig. 1 SP and sub-cell boundary positions in cell

### 3. 計算結果

#### 3.1 1次元線形移流 DFR 法コードの精度検証

計算条件を表1のように設定する。図2に10000ステップ後の計算結果を示す。黒線は厳密解との誤差を表している。図3は10ステップ、格子点数30点、60点、120点での局所誤差の常用対数値から最小二乗法を用いて、近似直線を引いたグラフである。この直線の傾きから4次精度が得られた。

Table1 Calculation condition

格子点数	50点
計算領域(x方向)	[0, 1]
境界条件	周期境界
初期条件	$u_{init} = \sin(2\pi x)$
移流速度	$c = 1$

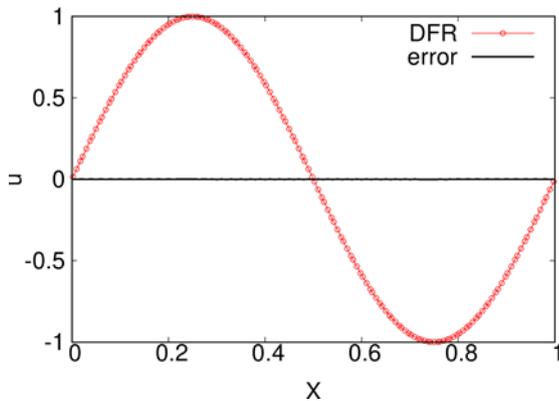


Fig. 2 Computed of sine wave advection

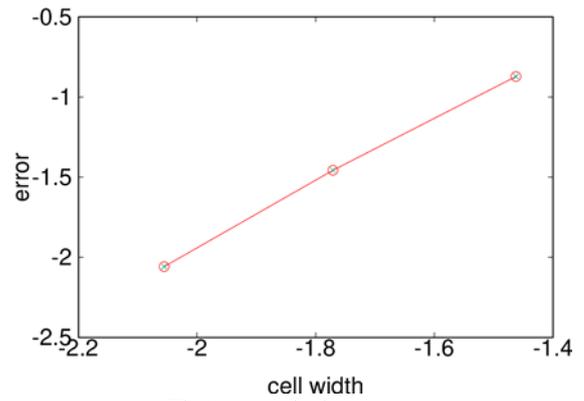


Fig. 3 numerical accuracy

#### 3.2 数値振動の抑制

境界条件を自由流入出とし、初期条件を次式として与え、それ以外の計算条件は表1を適用する。

$$u_{init}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0.5 \\ 0 & x \geq 0.5 \end{cases} \quad (14)$$

$C_k = 0.1$ とした時の計算結果を図4に示す。図4の赤線は、120ステップ後の計算結果であり、黒線は厳密解を表している。数値振動を抑制できた。

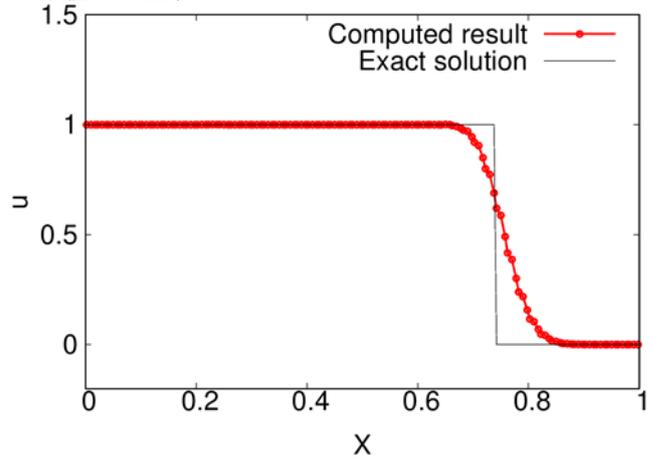


Fig. 4 Advection of step function with IPIS

### 4. まとめ

1次元の線形移流方程式に対し、DFR法の数値計算コードを作成した。一セル内にSPを3点持たせることで4次の精度が得られることを確認した。

DFR法の数値振動を抑制し、不連続面の計算ができることを確認した。

#### 参考文献

- (1) H. T. Huynh, "Discontinuous Galerkin via Interpolation: The Direct Flux Reconstruction Method," AIAA 2019-3064, (2010).
- (2) Krivodonova, L. Xin, J. Remacle, J.-F., Chevaugeon, N., and Flaherty, J. E., "Shock detection and limiting with

Fig. 1 Experimental system for measurement of DOC of FRP laminates during hot-press molding process.

discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws," *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 48(3), pp. 323-338, (2004).

- (3) Y. Lu, K. Liu, and Dawes W. K. "Flow simulation system based on high order space-time extension of flux reconstruction method," AIAA 2015-0833, (2015).