

中学校教育を終えた人の数学に対するスタンスの多様性について

～負の数の乗法の理解の仕方と数学のスタンスとの相関～

1210409 大石美優

高知工科大学 経済・マネジメント学群

1. 概要

負の数の乗法というすべての数学のあらゆる単元の基礎となる単元に関して、教員による指導のアプローチの仕方が様々であることは既存研究より明らかであるが、生徒の負の数の乗法に対する理解の仕方によって、数学に対する意識やスタンスにはどのように影響しているのかは明らかになっていない。そこで本研究では、負の数の乗法の理解の仕方と、数学に対するスタンスに相関があるのかについて明らかにすることを目的とする。方法は、大学生に中学校1～3年生での学習内容のプリントを配布して個別でインタビューを行った後、書き起こしを行い、分析する。その結果、負の数の乗法の学び方によって、数学に対する意識やスタンスの違いに影響があることが明らかとなった。

2. 背景

現在の数学教育の課題として、文部科学省の算数・数学科の現状と課題、改善の方向性（検討素案）では、「学力調査の結果から、基礎的な計算技能の定着について低下傾向は見られないが、計算の意味を理解することなどに課題が見られた。また、身に付けた知識・技能を実生活や学習等で活用することが十分にできない。」が挙げられている。ここから、計算の技能を身に着

け、活用できる力と、計算の意味を理解する力の2つが課題とされていることが分かる。これより、数学教育においては問題が解けることと、解き方の意味や原理を理解することの2つがポイントになると考える。

そこで本研究では、算数から数学に変わる中学校数学に着目していく。その中でも、算数からの新しい概念の一つであり、中学1年生の初めに学習する単元であることから、本研究では負の数の乗法に着目している。負の数の乗法は導入する際の教員による指導法は大きく4つのアプローチに分けられると、小林(2010)では以下のように述べられている。具体的には、(1)定義的アプローチ(2)物理的アプローチ(3)発見的アプローチ(4)公理的アプローチである。

(1)定義的アプローチ

このアプローチは次の2つを定義して示すものである。

- ・ 同じ符号を持つ2つ数の乗法は正数
 - ・ 異なる符号を持つ2つ数の乗法は負数
- そのため生徒に対して、なぜそのように定義されるのかという理由は示されない。

(2)物理的アプローチ

これは、様々な方法が例示されている。例としては、列車、車、オートバイ、飛行機、フットボール選手などがある。この全

での例で、時間と方向の概念が正数・負数を用いてそれぞれ示されている。このアプローチ法の例として「道路に沿って歩いている人」を挙げる。規則は次の2つである。

- ・ 右の方向に進むことは正の方向に進むことにすると、左に進むことは負の方向に進むことになる。

- ・ 未来の時間は正数、過去の時間は負数によって示される。

この方法では、生徒それぞれが各自の経験と関連付けて考えることができる。

(3) 発見的アプローチ

これは、類似している計算を比較する活動を通して負数掛ける負数が正数であることを推測させる方法である。例として、次のように示される。

$$\begin{aligned} (-4) \cdot (+3) &= -12 \\ (-4) \cdot (+2) &= -8 \\ (-4) \cdot (+1) &= -4 \\ (-4) \cdot (0) &= 0 \\ (-4) \cdot (-1) &= ? \\ (-4) \cdot (-2) &= ? \\ (-4) \cdot (-3) &= ? \end{aligned}$$

この考えでは、異符号の2数の積が負であることを生徒が知っていることで、上記のようにいくつかの計算を順番に並べることでパターンを作り出していることに気づくことができる。また、負数×正数を理解する場合には、正数の掛け方に関する知識も必要である。

(4) 公理的アプローチ

これは、算数で身に付けた数学的原理を用いて答えを導くものである。例としては、加法原理で構成されている積に対して1つの値を見つけるように指導を行うもの

である。

$$\begin{aligned} 3 + (-3) &= 0 \\ (-4) \cdot (3 + -3) &= (-4) \cdot 0 \\ (-4) \cdot (3) + (-4) \cdot (-3) &= 0 \\ -12 + (-4) \cdot (-3) &= 0 \\ (-4) \cdot (-3) &= ? \end{aligned}$$

上記に示した4つのアプローチ法を、数学教育の2つのポイントである「①問題が解けることを重視する②解き方の意味を理解して解く」で分けると以下のようになると考えられる。

- ① 問題が解けることを重視する
⇒(1)定義的アプローチ
- ② 解き方の意味を理解して解く
⇒(2)物理的アプローチ(3)発見的アプローチ(4)公理的アプローチ

よって、教育現場での負の数の乗法は指導のあり方が様々であることから、生徒の理解の仕方にも違いがあると考えられる。また、負の数の乗法の学びは、中学1年生の初めの単元なので、この先の`数学`に対する意識やスタンスに反映してくるのではないかと思い、本研究を進めていく。

3. 目的

そこで本研究では、2つのリサーチクエストションを明らかにすることを目的とする。

- Q1「大学生は負の数の乗法を中学生当時と今でどのように記憶しているのか」
- Q2「中学1年生の負の数の乗法の理解の仕方と、数学に対するスタンスに相関があるのか。」

ここでの数学に対するスタンスとは、次の3つとする。

- ①問題が解けることを重視するか、解き方

の意味を理解して解くか

②得意意識があるか、不得意意識があるか

③図形問題において、具体的な問題から抽象的な内容を理解するか、内容を理解してから問題を解いているか

この③では、図形問題は視覚的に理解しやすい単元であることから、負の乗法のような代数的な内容の理解との相関を見るために、スタンスとしてあげている。

4. 方法

本研究では、大学生に個別でインタビューを行う。その際に、中学校 1~3 年生までの学習内容を各学年 1 枚のプリントにまとめたものを配布する。実際に使用したプリントを 1 枚例示する。(図 1) インタビューの内容は、まず、対象者に中学生当時の数学について思い出してもらおう中で、負の数の乗法について、どのように教えてもらったか振り返る。3 枚の配布プリントを見て、印象に残っている単元やエピソードは何かを聞き出していく。インタビュー後に、書き起こしを行い、対象者それぞれの数学のスタンスの表われを分析する。

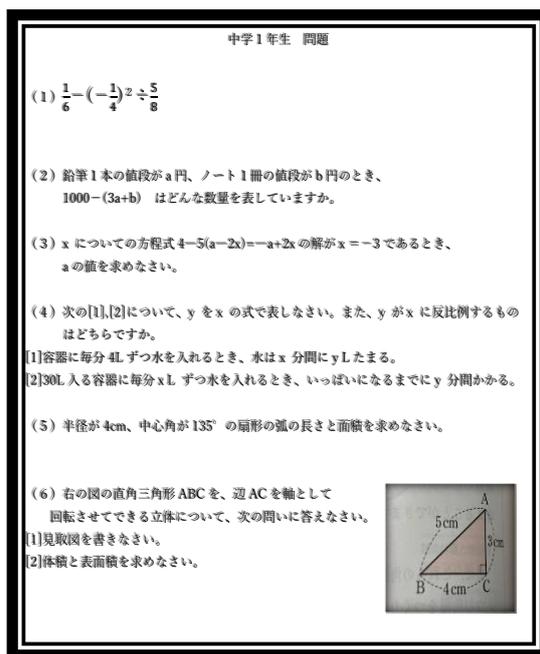


図 1 実際に使用したプリント
(中学 1 年生)

5. インタビューの結果

本研究では、高知工科大学の学生 3 人にインタビューを行った。具体的な結果を以下に示す。

5-1. F さんのインタビュー結果

ここでは、3 つの単元に着目していく。1 つ目は、中学 1 年生の「負の数の乗法」の単元について。中学生当時は、理屈の理解より計算の仕方の理解に専念した。今(インタビュー時)になって、理屈を自分で理解できることから、中学生当時自分が教わったことを今、再現しようとした。(マイナス)×(マイナス)=(プラス)になる理由は、マイナスをかけたなら負の方向に、プラスをかけたなら正の方向に矢印を引き、数直線で説明しようとした。ただし、最後まで説明するのは難しかった。

2 つ目は、「文字式」の単元について。

式を解くなど計算は得意だったので、苦戦しなかった。文字式において、移項して符号が変わることも、両辺に同じ値を足したり引いたりすることで、理屈を理解していた。

3つ目は、中学2年生の「図形」の単元の主に対頂角、同位角、錯角の分野について。当時は解き方を覚えて問題を解いていたので、数学全般に苦手意識はなかった。また、当時は、具体的に自分で書いてみて同位角や錯角の性質を確認していた。しかし、今振り返ってみて、平行線での同位角や錯角が等しくなる理由が分からない（理屈が理解できない）ことが、高校で図形問題につまずいた原因だったのではという気づき生まれた。

5-2. Kさんのインタビュー結果

ここでは、まず、三角形の合同の証明について。この単元でKさんは、抽象的な合同条件を理解ができず、苦手意識があったが、具体的な問題を解く中で、合同条件の意味を理解した。理解する上でKさんは次の2つのことがポイントだったという。①合同条件によって証明ができることが理解できた。②条件をもとに、複雑な図形での着目点が分かるようになった。

次に、数学に対する気持ちの変化について。Kさんは中学生の時から数学の教員を目指すようになった。そのきっかけは2つある。1つ目は、中学生の時は計算問題などで、解ける感覚があり、周りより数学が得意だったから。2つ目は、文字で問題を解くことを知り、数学の幅が広がったことから、数学が楽しいと思うようになったから。

しかし、高校3年生の数学Ⅲが解けないことで、数学への苦手意識が生まれた。同じ数学教員を目指す友人から数学Ⅲを教えてもらうことが多くなり、周りとの、違いや差に焦りを感じた。この時、Kさんにとって数学Ⅲは数学ではない印象を持った。理由は、問題や解答に文字や文章が多くなり、理解することが多くなったからである。Kさんのイメージする数学は、数字が多く計算問題のことだった。授業において新しい概念においても、定義としてとらえ、問題が解けることを重視して数学に取り組んできた。これは、負の数の乗法の単元においても同じで、定義として学び、インタビュー時にも理由を示すことはできなかった。

5-3. Mさんのインタビュー結果

Mさんは、数学全般が好きだったという。その理由は、主に2つある。1つ目は、小学校の頃からパズル系や百マス計算が好きで、幼いころから数字に触れあってきたから。2つ目は、数学には、覚える内容にも根拠があるからである。

そんなMさんにとって、中学1, 2年生の時の数学の先生の授業が印象に残っているという。その先生は、新しい分野ごとに、なぜその解き方をするのかを教えてくれる授業をしてくれた。Mさんは、解き方の理由を知ること、内容が理解できた。中学3年生以降も、Mさんは自分なりに解き方の理由を考える習慣がついた。その中で、問題の解き方を覚えるのではなく、なぜその解き方で答えにたどり着くのかを知ることが大切になるようになった。

その先生は、負の数の乗法について、

(マイナス)×(マイナス)=(プラス)になる理由を、黒板に大きく数直線を書いて、中学生に合わせた説明をされたという。Mさんが記憶されていた内容は、次の通りである。

- ①数直線の0の位置に人がいるとする
- ②1つ目の数字の符号で進む向きが決まる(例えば、-2なら数直線のマイナスの方向を向く)
- ③2つ目の数字の符号で、プラスなら前にマイナスなら後ろに進む
- ④進んだ後の位置にある、数直線上の符号が答えの符号になる

6. 考察

上記のインタビュー結果をもとに、リサーチクエスチョンに対する考察を行う。

まずは、Q1「大学生は負の数の乗法を中学生当時と今でどのように記憶しているのか」について考察する。中学生当時に(1)定義ツールで教わり、解き方の理解に専念したKさんは、大学生になった今でも同じ定義としての印象が残っている。それに対してFさんは、当時は定義としての解き方の理解に専念しましたが、大学生になって、中学生当時に教わった意味の説明の再現を試みた。

上記の2人とは対照的に、Mさんは中学生当時に数直線を用いて教わり、意味の理解をしていたので、大学生になった今でも教わって記憶していたことを説明できた。以上より、中学生当時の学び方の違いから、大学生になっても理解の仕方に違いが見えることが分かる。

次に、Q2「中学1年生の負の数の乗法の理解の仕方と、数学に対するスタンスに

相関があるのか。」について上記の`3.目的`で示した数学の①から③のスタンスをもとに考察する。Kさんは、問題が解けるようになることを重視する傾向にあり、解けることで数学にも得意意識があった。Fさんは、中学生までは問題を解くことに専念し、問題が解けていたことから数学に得意意識があった。しかし、高校生の数学でつまづいた際に苦手意識をもち、解き方の意味の理解が必要であるとスタンスの変化が見られた。Mさんは、解き方の意味や理由を理解した上で解いていることで、数学に対して得意意識がある。

③の図形問題のスタンスにおいては、FさんもKさんも共通して、具体的に作図したり問題を解いたりすることで抽象的な内容の理解をしている。

以上の考察より、定義的なアプローチなどをもとに負の数の乗法を教わった人は、その後の数学においても問題が解けるようになることを重視するスタンスになることがわかる。その中には、数学で苦手意識が出てきたときにスタンスの変化があり、意味の理解の必要性を実感する場合もある。一方で、物理的アプローチなどをもとに負の数の乗法を教わった人は、その後の数学においても解き方の意味や理由を理解することを重視するスタンスになることがわかる。3人の考察をまとめて比較した表を以下に示す。(表1)

| | Fさん | Kさん | Mさん |
|--|---|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 負の数の乗法の理解 (中学1年生当時) | 計算の解き方の理解に 専念した | 定義ツールで教わり、 解き方を理解した | 数直線を用いて教わり、 意味を理解した。 |
| 負の数の乗法の理解 (インタビュー時) | 当時教わったことを再 現し、説明を試みた | 中学生当時と同じ | 当時教わったことを説 明できた。 |
| 問題が解けることを重 視するか、解き方の意 味を理解して解くか | 中学生までは解くこと に専念。高校で、意味 の理解の必要性を実感。 | 高校まで問題が解ける ようになることを重視 する | 高校まで解き方の意味 や理由を理解した上で 解いている |
| 得意意識があるか、不 得意意識があるか | 中学生までは得意意識。 高校では、不得意意識。 | 中学でも高校でも、周 りより解けているとき は得意意識。 | 数学全般が好きで、得 意意識がある |
| 図形問題において、具 体的な問題から抽象的 な内容を理解するか、 内容を理解してから問 題を解いているか | 自分でも作図して、具 体的に示して理解した。 | 具体的な問題を解くこ とで、抽象的な合同条 件を理解した。 | |

表1 考察のまとめと比較

7. 結論と提言

以上より、中学1年生の負の数の乗法の学び方によって、その後の代数的な内容の数学に対する意識やスタンスに違いがあることが分かった。

ただし、図形に関しては代数の理解の仕方に関わらず、目に見えてわかることから、図を書いたり具体的な問題を解いたりして意味の理解をしている傾向がある。

このことから、数学教育の授業を行う上で次のことが大切になると考える。数学の中でも、特に代数的な内容を扱う授業では、定義としてだけでなく、中学生がイメージできるような指導の工夫が必要である。解き方の意味を理解して解く指導を行うことで、数学をはじめ、他の教科でも生徒自身に考える習慣を身に付けさせることができる。また、授業でなぜそうなるのかを生徒たちに考えさせることで言語活動にもつながると考える。

謝辞

本研究を進めるに当たり、指導教官の中川義典教授からは多大な助言を賜りました。厚く感謝申し上げます。また、インタビュー調査にご協力頂いた皆様にも厚く御礼申し上げます。

参考文献

文部科学省(2014), 算数・数学科の現状と課題, 改善の方向性(検討素案)(教育課程部会等の審議を踏まえて再整理したもの)
https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/004/siryo/_icsFiles/afieldfile/2014/10/08/1265524_002.pdf
 (2021年2月5日閲覧)

土屋守正, 横村国治, 荒木修一, 渡辺信(1996), 数学に関して大学生の抱いている意識について その2, 数学教育学会研究紀要 1996, 37(3-4), pp.35-44.

土屋守正, 横村国治, 荒木修一, 渡辺信
(1997), 数学に関して大学生が抱いている
意識について, 数学教育学会研究紀要
1996,36(3-4), pp.37-47.

小林孝至(2010), 教科書分析からみる「負
数の乗法」, 上越数学教育研究, 第 25
号, 上越教育大学数学教室, pp.77-86.

藤井斉亮、俣野博（平成 27 年検定済教科
書）新しい数学 1～3（東京書籍）.