

卒業論文要旨

直接流束再構築法に基づく非構造格子を用いた流体計算コードの構築

システム工学群

航空エンジン超音速流研究室 1220024 岩田 雄太郎

1. 背景

航空機のような複雑形状まわりの流体計算では、形状適合性に優れた非構造格子法を用いることが多い。非構造格子法の計算手法で現在多く用いられているのが、有限体積法である。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。

しかし、有限体積法はセル境界面の物理量をセル外部のステンシルから補間するため、いくつかの問題を持つ。一つは空間精度が低いことである。セル境界面の物理量の補間精度は隣接セルの品質に大きく依存する。そのため、隣接セルの品質が悪い場合、定式通りの計算精度を得ることができない。もう一つの問題は並列化計算に適さないことである。有限体積法での高次精度化には、セル外部のステンシルがより多く必要となり、コンパクト性を失う。そのため、領域分割による並列化において通信コストが高くなり、並列化効率が下がる。

このような有限体積法がもつ欠点に対し、セル内部に自由度を持たせることで、有限体積法の欠点を回避することができる。Huynh によって考案された直接流束再構築法⁽¹⁾(Direct Flux Reconstruction method, 以下 DFR 法)は、DFR 法はセル内部に複数のデータ点(Solution Point 以下 SP)を持ち、SP での物理量からセル内部の流束分布を構築する。構築したセル内部の流束分布からセル境界での流束を求め、セル境界と SP での流束から計算領域全体で連続な流束分布を再構築する。再構築された流束は不連続点が存在しないため、微分型の保存則を解くことができる。DFR 法は K 個の SP から 2K-2 次の空間精度を得る。また、自セルと隣接セルのみの情報で高次精度化が可能であり、コンパクトな手法である。

本研究では、非構造格子を用いた DFR 法の 3 次元流体計算コードの構築と、その検証を目的とする。

2. 数値計算法

2.1 1次元 DFR 法

1次元線形移流方程式を考える。

$$u_t + f_x = 0 \quad (1)$$

計算領域はセル $E_j(j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots)$ に分割し、各セル内に K 個の SP を導入する。各セル内の SP の座標位置 $x_{j,k}(k=1, \dots, K)$ での解を $u_{j,k}$ と表す。

$$(u_t)_{j,k} + (f_x)_{j,k} \quad (2)$$

計算領域全体で連続な流束を再構築するには、セル境界 $x_{j+\frac{1}{2}}$ で共通の流束値 f^{com} を取る必要がある。

$$u^L = u_{j+\frac{1}{2}}^L = u_j(1), u^R = u_{j-\frac{1}{2}}^R = u_j(-1) \quad (3)$$

$$f^{com} = \frac{1}{2}c(u^L + u^R) - \frac{1}{2}|c|(u^R - u^L) \quad (4)$$

次に流束関数を再構築する。線形移流方程式を考えているので、SP とセル境界での流束は保存量から簡単に求まる。

$$f_{j,k} = cu_{j,k} \quad (5)$$

式(5)より、両端のセル境界での流束を求める。

$$f_{j,0} = f_{j-\frac{1}{2}}^{com}, f_{j,k+1} = f_{j+\frac{1}{2}}^{com} \quad (6)$$

式(3)と同様の方法でセル境界でも連続な連続流束関数 $(F_\xi)_{j,k}$ を構築する。

$$(F_\xi)_{j,k} = \sum_{K=0}^{K+1} u_{j,k} \phi_k(\xi), \quad \phi_k(\xi) = \prod_{l=0, l \neq k}^{K+1} \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l} \quad (7)$$

テンソル座標系(ξ 座標)から物理座標系(x 座標)に座標変換すると SP における流束の空間微分は、

$$(F_x)_{j,k} = \frac{2}{h_j}(F_\xi)_{j,k} \quad (8)$$

ただし、 h_j は格子幅を表す。従って、式(2)は半離散式で表せ、

$$\frac{du_{j,k}}{dt} = -(F_x)_{j,k} \quad (9)$$

時間積分により保存量を更新する。本研究では SP に K=3 のガウス点で空間 4 次精度、上式の時間積分には 3 次精度の TVD ルンゲクッタ法を用いた。

2.2 座標変換

任意形状物体まわりに生成した非構造格子をテンソル座標系へ変換する。テンソル座標系では、格子はすべて重心位置に原点をとった一辺の長さが 2 の立方体格子として考える。SP の位置はテンソル座標系のガウス点である。次に、テンソル座標系で求めた SP の座標変換を使い、物理座標系での SP の位置を求める。6 面体でのテンソル座標系から物理座標系への変換式は次式の通りである。

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \mathbf{x}_1 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \mathbf{x}_2 \\ & + \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \mathbf{x}_3 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)}{8} \mathbf{x}_4 \\ & + \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)}{8} \mathbf{x}_5 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)}{8} \mathbf{x}_6 \\ & + \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \mathbf{x}_7 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)}{8} \mathbf{x}_8 \end{aligned} \quad (10)$$

右辺の物理座標系の位置ベクトル \mathbf{x} の下添字は物理座標系での 6 面体セルの頂点位置を表している。テンソル座標系

にて算出した流束関数分布からセル境界面での流束を求め、物理座標系にて時間積分を実行する。

3. 計算結果と考察

3.1 3次元移流計算結果

今回構築した DFR コード検証のために、図1のような立方体領域内に正弦波を対角線方向へ移流させるテスト計算を行う。計算条件を表1のように設定する。計算格子数は20x20x20点で、格子は3次元的に歪ませている。図2に、30ステップ時間更新した後の計算結果と厳密解を示す。直線x=y=0.5で切り抜いたz方向分布の結果である。位相誤差は少ないが、波の極大値、極小値がなまっている。

Table1 Calculation condition

格子点数	8000
計算領域	[0,1]
境界条件	流入流出境界
初期条件	$u_{init} = \sin \{2\pi(x + y + z)\}$
移流速度	$c=\sqrt{3}$

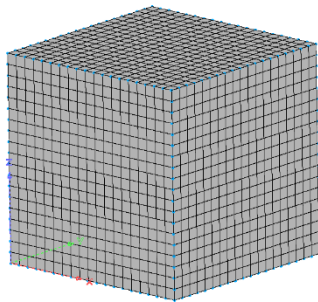


Fig.1 Computational grid

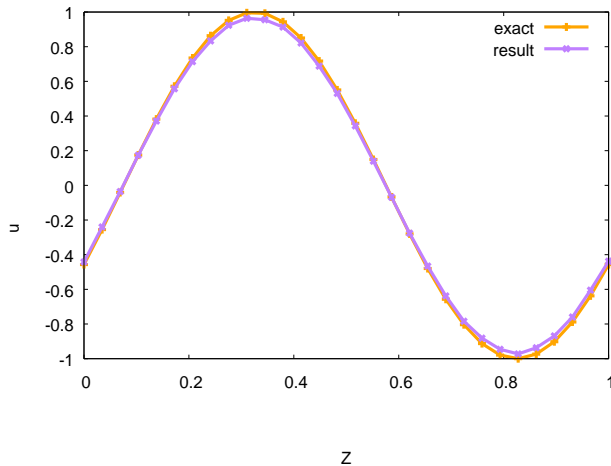


Fig. 2 Sine wave advection

4. まとめ

3次元移流方程式対応のDFR法の計算コードを構築し、正弦波の移流問題を解いた。厳密解と比較して、位相誤差は少なかったが、解がなまっていた。今後は解がなまっている原因を突き止め、非構造格子対応の計算コードの完成を目指す。

参考文献

- (1) H. T. Huynh, "Discontinuous Galerkin via Interpolation: The Direct Flux Reconstruction Method," AIAA 2019-3064, (2010)
- (2) K. Yasue, "Study of High Order Discontinuous Galerkin Finite Element CFD solver for aerospace Application", PhD thesis, Department of Aerospace Engineering, Tohoku University, (2012)
- (3) 浅田啓幸, "高次精度セル緩和型陰的不連続ガレルキン法の実用化に関する研究", 東北大学大学院 工学研究科 航空宇宙工学専攻 修士学位論文, (2015)