

3人プレイ Otrio の完全解析の実現可能性

1220326 久保田 留奈 【高度プログラミング研究室】

1 はじめに

Otrio とは、2~4 人で行う有限零和確定完全情報ゲームで、Tic-Tac-Toe を 3 次元・4 色のコマに拡張したようなボードゲームである。Otrio は、既に 3 人プレイ・4 人プレイにおいて弱解決（初期局面の勝敗及びその証明に必要な局面の最善手の解析）を試みた研究 [1] があり、ゲームのとりうる状態数から 3 人プレイでの完全解析（全局面の勝敗及び最善手の解析）が実現できるのではないかと考えられる。

そこで本研究では、Otrio の完全解析に必要なメモリ量及び計算時間を求め、3 人プレイでの Otrio の完全解析の実現可能性について報告する。

2 データ構造の最適化

3 人プレイにおける Otrio の状態数の上界は、 $4^{27} \approx 1.8 \times 10^{16}$ である。同一状態の重複除去のために、プレイヤー 1 と 2 のコマだけを考えた場合において勝敗が決定している状態及び対称な盤面の重複を除外する。さらに、残った状態についてのみプレイヤー 3 のコマを置いた状態を考え、各手数での状態数の概算を表 1 に示す。

表 1 各手数での状態数の概算

手数	状態数	手数	状態数	手数	状態数
1	6	10	2.0×10^9	19	1.3×10^{12}
2	69	11	8.0×10^9	20	8.8×10^{11}
3	1.7×10^3	12	3.2×10^{10}	21	8.8×10^{11}
4	1.6×10^4	13	8.2×10^{10}	22	2.8×10^{11}
5	1.6×10^5	14	1.9×10^{11}	23	7.7×10^{10}
6	1.8×10^6	15	5.1×10^{11}	24	3.8×10^{10}
7	1.2×10^7	16	7.5×10^{11}	25	3.1×10^9
8	7.6×10^7	17	1.0×10^{12}	26	1.7×10^8
9	4.8×10^8	18	1.7×10^{12}	27	1.9×10^7

表 1 より、状態数の上界は 7.7×10^{12} である。ゲームの完全解析のためには、状態の結果 (value) を保存する必要がある。3 人プレイ Otrio において各状態の value は、{プレイヤー 1 の勝利, プレイヤ 2 の勝利, プレイヤ 3 の勝利, 引き分け} のいずれかの値をとるので 2 ビットで保存可能である。

value のみを保存するために、状態と value の対応付けを行う必要がある。状態は決められた順序での列挙が可能であるので、value を配列に保存し、インデックスから状態を求める。状態からインデックスを計算する方法を以下に示す。

$$\text{ord1}(S_{12}) \times 27 - (p_1 + p_2) C_{p_3} + \text{ord2}(S_3) \quad (1)$$

式 (1) において、 $\text{ord1}(S_{12})$ はプレイヤー 1 と 2 がコマ

を置いた状態の順序を定義した関数、 p_x はプレイヤー x が置いたコマ数、 $\text{ord2}(S_3)$ は $27 - (p_1 + p_2)$ マスのうちプレイヤー 3 がコマを置いた状態の順序を定義した関数である。インデックスから状態を求めるには、その状態の $p_1 + p_2$ 及び p_3 を求め、式 (1) の逆の計算を行う。

全 value を RAM 上に常に展開するには、 $2/8 \times 7.7 \times 10^{12} \approx 1.9 \times 10^{12} \approx 1.9\text{TB}$ の記憶領域が必要である。手数により状態空間の分割を行うことでさらにメモリ量の削減を行うことが可能である。

3 実験

以下、簡略化のために x 個のコマを置いた状態の集合を T_x と表記する。

Otrio において、1 手で増えるコマの数は 1 個である。そのため、 T_{x+1} の状態の value から T_x の状態の value を計算することができる。実際には、 $x = 27$ の状態よりコマの数が増えることはないため、 $x = 27$ の状態集合から value を求めることになる。

表 1 から、メモリに保存する状態は T_{19} から T_{18} の状態に遷移する際に必要な状態数およそ $1.7 \times 10^{12} + 1.3 \times 10^{12} = 3.0 \times 10^{12}$ が最大である。1 状態の value を保存するために 2 ビット使用する必要があるため、約 750GB のメモリが必要である。

本研究では、次状態の value がメモリ上に既にあるものとして、現実的に計算可能な T_{10} から T_9 の状態への遷移にかかる時間をサンプリングによって計算し、全状態の value の計算にかかる時間を求める。

具体的には、 T_9 の中から 1000 状態をランダムに抽出し、 T_{10} の全 value を引き分けと仮定して、1 状態の value を求めるためにかかる時間の上限の平均値を求める。

実験結果として、1 状態の value の計算にかかる平均時間は約 1.5 ミリ秒である。

よって、Otrio の完全解析に必要なメモリ量は約 750GB、計算時間は約 366 年である。

4 まとめ

本研究では、Otrio の完全解析にかかるメモリ量及び計算時間の上界を求め、3 人プレイでの Otrio の完全解析の実現可能性について報告を行った。今後の課題として、実験プログラムの高速化による計算時間の改善が挙げられる。

参考文献

- [1] 松崎 公紀, 寺村 舞童華, “ゲーム Otrio の 3 人および 4 人プレイの解析”, 情報処理学会第 61 回プログラミングシンポジウム, 2020.