

卒業論文要旨

血液流動における赤血球挙動の簡便なモデルの提案

Proposal for a simple model of erythrocyte behavior in blood flow

システム工学群

流体工学研究室 1210155 松岡 風雅

1. 緒言

血液流動の解析には、実験による方法と数値シミュレーションによる方法の2つがある。近年では、コンピューターの計算速度が飛躍的に向上しており、実際に観測せずともコンピューターによる数値シミュレーションによって、実験の場合と同等の結果が導き出せる。

一方、流路である血管は径によって、太さが2~3 cmである大動脈、太さが0.2~0.5 mmである細動脈、太さが5~10 μmである毛細血管に大別される。

血液は主として、赤血球、白血球、血漿から構成される。その内、赤血球は血液全体の半分近くを占めており、血液の流動特性に大きく関与している^[1]。

大動脈では赤血球を全体の平均量として連続体的に扱うことができる。一方、毛細血管では個々の挙動赤血球挙動と流動の両方の考え方をを用いて解析できる。毛細血管で用いられる和田ら^[2]の赤血球モデルでは、1つの赤血球に100個の質点を用いて構成している。赤血球は1 mm³中に500万個存在し、直径0.35 mm、流路の長さを10倍の3.5 mmの細動脈と仮定すれば168万個存在することになり、このモデルを用いて、赤血球挙動を解析するためには膨大な計算量とメモリが必要である。

そこで本研究では細動脈流れを解析するために、簡便な赤血球モデルを提案する。

2. 基礎方程式

図1に三軸赤血球モデルを示す。赤血球は伸縮可能な楕円体とし、楕円体を構成するためにそれぞれが直交する3つのベクトル $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ を以下のように定義する。

$$\mathbf{L} = L\mathbf{l}, \quad \mathbf{M} = M\mathbf{m}, \quad \mathbf{N} = N\mathbf{n} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ はそれぞれ $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ の単位ベクトルであり

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{L}}{\sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{M}}{\sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}}}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}} \quad (2)$$

L, M, N はそれぞれ $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ の長さ

$$L = \sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}}, \quad M = \sqrt{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}}, \quad N = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}} \quad (3)$$

である。

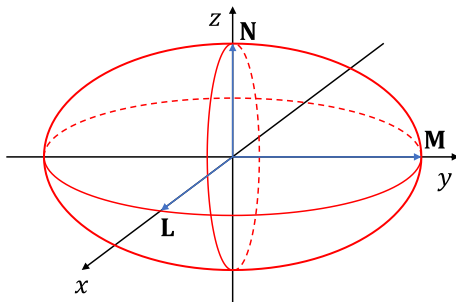


Fig. 1 Three axes erythrocyte model

赤血球がもつエネルギー E と赤血球に対するせん断流の影響より、基礎方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial t} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{L} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{L}} + \lambda_1 \mathbf{M} + \lambda_2 \mathbf{N} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{M} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{M}} + \lambda_3 \mathbf{L} + \lambda_4 \mathbf{N} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{N} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{N}} + \lambda_5 \mathbf{L} + \lambda_6 \mathbf{M} \quad (6)$$

ここで、 $\boldsymbol{\kappa}$ は速度勾配テンソル、 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ は直交条件によって決まる係数である。また、エネルギー E は次のように表される。

$$E = E^{\text{vol}} + E^{\text{surf}} + E^{\text{curv}} \quad (7)$$

ただし、 E^{vol} は赤血球の体積エネルギー、 E^{surf} は表面積エネルギー、 E^{curv} は曲率エネルギーである。 $E^{\text{vol}}, E^{\text{surf}}, E^{\text{curv}}$ はそれぞれ赤血球の体積を V 、表面積を S 、曲率を C として

$$E^{\text{vol}} = \frac{1}{2} k_v (V - V_0)^2 \quad (8)$$

$$E^{\text{surf}} = \frac{1}{2} k_s (S - S_0)^2 \quad (9)$$

$$E^{\text{curv}} = \frac{1}{2} k_c C^2 \quad (10)$$

ここで、 V_0, S_0 は平衡状態の赤血球の体積および表面積であり、 k_v は体積弾性定数、 k_s は表面積弾性定数、 k_c は曲率弾性定数である。赤血球の体積 V 、表面積 S ^[3]、曲率 C はそれぞれ次のようになる。

$$V = \frac{4}{3} \pi LMN \quad (11)$$

$$S \approx 4\pi \left(\frac{L^p M^p + L^p N^p + M^p N^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (12)$$

$$C^2 = \left\{ (L - l_0)^2 + (M - l_0)^2 + (N - l_0)^2 \right\} \quad (13)$$

ただし、 $p = 1.6075$ ^[3]、 l_0 は L, M, N の平均値である。数値計算法は4次精度のルンゲ・クッタ法を用い、刻み幅は 1.0×10^{-6} とした。

3. 解析方法

図2に示すような $x-y$ 平面に単純せん断流れをかけた場合を考える。

せん断速度 $\dot{\gamma} = 10.0 / \text{s}$ の場合において、初期状態を $\mathbf{L} = (1.00, 0, 0)$ 、 $\mathbf{M} = (0, 4.00, 0)$ 、 $\mathbf{N} = (0, 0, 4.00)$ (14) の円盤状とする。条件1としての場合として

$$k_v = 100, \quad k_s = 100, \quad k_c = 100 \quad (15)$$

条件2の場合として

$$k_v = 1.00, \quad k_s = 0.1, \quad k_c = 0.1 \quad (16)$$

の2つを $t = 0 \sim 10.0 \text{ s}$ まで解析した。

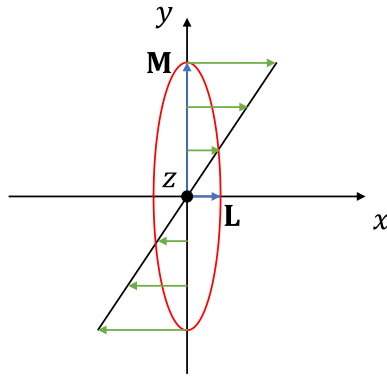


Fig. 2 Simple shear flow

4. 結果

図 3(a), (b)はそれぞれ条件 1 の場合の $t = 0.5$ s における赤血球の z 軸からの観測図および y 軸からの観測図である。図 3(a)を見ると、赤血球の長軸の長さおよび短軸の長さは変化せず、形状は円盤状のままであった。この時の回転角は、 y 軸に対して時計回りに 78.7° となった。

図 4(a), (b)はそれぞれ条件 2 の場合の $t = 0.5$ s における赤血球の z 軸からの観測図および y 軸からの観測図である。図 4(a)を見ると、赤血球の長軸の長さが増加し、短軸の長さは僅かに減少した。この原因は、弾性定数が小さくなると、赤血球がもつ復元力が小さくなり、せん断流れをかけた際に変形しやすくなるためだと考えられる。条件 1 と比較すると形状は楕円盤状となった。この時の回転角は、条件 1 の場合と同じく、 y 軸に対して時計回りに 78.7° となった。

図 5 は横軸に t 、縦軸に各ベクトルの長さをとり、弾性定数によるベクトルの長さの時間推移を示したものである。図 5 を見ると、条件 1 の場合では、時間が経過するにつれ、 M は緩やかに増加しピークに達した後、緩やかに減衰した。一方、 N, L は変化しなかった。条件 2 の場合は、時間が経過するにつれ、 M は急激に増加しピークに達した後、緩やかに減衰した。一方、 N は急激に減少しピークに達した後、緩やかに増加した。また、 L は変化しなかった。 M が最大となった時刻は、条件 1 では $t = 0.11$ s で $M = 4.05 \mu\text{m}$ 、条件 2 では、 $t = 0.24$ s で $M = 5.74 \mu\text{m}$ となった。また、条件 2 の N が最小となった時刻は、 $t = 0.24$ s で $N = 2.77 \mu\text{m}$ となった。

条件 1 と条件 2 でシミュレーション後の形状に相違点が見られるのは、条件 2 の方が条件 1 に比べて弾性定数が小さいため、伸長量も大きくなる。楕円盤状に伸長した状態から初期状態の円盤状に戻るには、弾性定数が小さいため、復元力が条件 1 より足りず、円盤状に戻ることができないと考えられる。

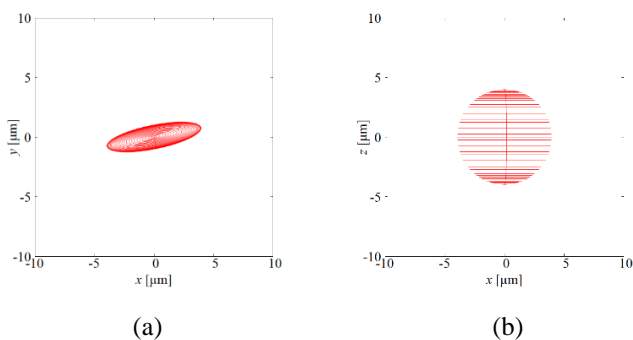


Fig. 3 Erythrocyte behavior at $t = 0.5$ s, $k_v = 100$, $k_s = 100$, $k_c = 100$

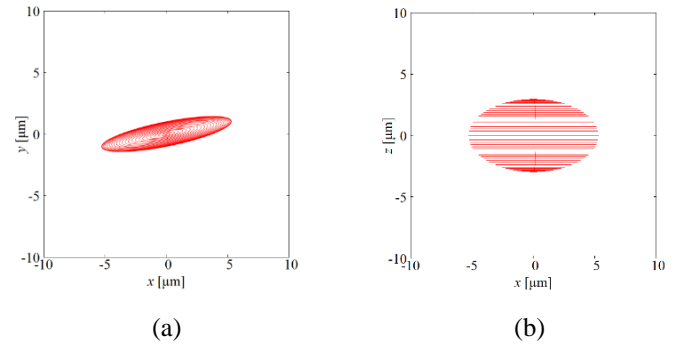


Fig. 4 Erythrocyte behavior at $t = 0.5$ s, $k_v = 1.0$, $k_s = 0.1$, $k_c = 0.1$

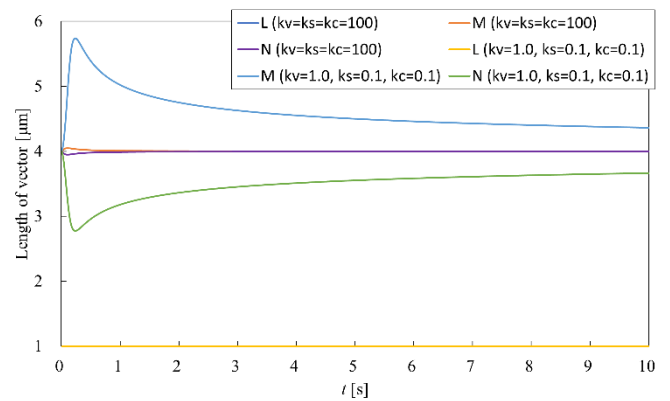


Fig. 5 Vector length over time due to modulus of elasticity ($\dot{\gamma} = 10.0$ /s)

5. 結言

本研究では細動脈流れを解析するために、赤血球挙動の簡便なモデルを提案し、単純せん断流れを与えた場合の赤血球挙動を解析した。

- 弾性定数を小さくすると赤血球の伸長量は増加し、円盤状から楕円盤状に変化した。
- 赤血球は容易に変形が知られており、実験事実と比較することで本モデルの整合性を確認していく。

文献

- 菅原基晃, 前田信治, “血液のレオロジーと血流”, コロナ社, 2003, pp2-4.
- 和田成生, 小林亮, “膨潤赤血球の体積減少に伴う形状変形のシミュレーション”, 日本機械学会文集 A 編, Vol. 69, No. 677, 2003, pp. 14-21.
- Gerard P. Michon, “Surface Area of an Ellipsoid - Scalene Ellipsoid - Numericana”, <https://www.numericana.com/answer/ellipsoid.htm#thomsen>.