

2022（令和4）年度 修士学位論文

直接流束再構築法を用いた圧縮性ナビエーストークス方程式
の高次精度計算

A High-Order Accurate Computation of Compressible Navier-
Stokes Equations using Direct Flux Reconstruction Method

2023年3月3日

高知工科大学大学院 工学研究科基盤工学専攻
知能機械工学コース

1255007 笠石 丈二

指導教員 荻野 要介, 野崎 理

目次

第 1 章	3
緒論	3
1.1 研究背景	3
1.1.1 航空機開発における数値流体力学の優位性	3
1.1.2 航空機開発における代表的な計算手法	3
1.1.3 DFR 法	4
1.2 研究目的	5
第 2 章	6
数値計算法	6
2.1 1 次元線形移流方程式 DFR 法	6
2.1.1 支配方程式	6
2.1.2 座標系	6
2.1.3 離散化	7
2.1.4 保存性の確認	9
2.2 2 次元圧縮性流体 DFR 法	10
2.2.1 支配方程式	10
2.2.2 離散化	11
2.3 2 次元圧縮性粘性流体 DFR 法	13
2.3.1 支配方程式	13
2.3.2 離散化	13
第 3 章	17
DFR 計算コード検証	17
3.1 1 次元線形移流問題	17
3.1.1 精度検証	18
3.1.2 有限体積法, WENO 法との比較	19
3.2 Sod の衝撃波管問題	21
3.3 平板境界層問題	24
第 4 章	27
結論	27
参考文献	28
謝辞	29

第1章

緒論

1.1 研究背景

1.1.1 航空機開発における数値流体力学の優位性

航空機開発は、1903年のライト兄弟による世界初の有人飛行機から始まった。ライト兄弟は、自作の設備で風洞試験を行い、成功を収めた。現在の風洞は、規模が拡大し、大型の物では高さ6.5m、幅5.5mの物も存在する。性能も向上しており、マッハ数変動が $\pm 0.3\%$ 以内の高精度な物も存在する。風洞試験は、実際に航空機が飛行する条件と同じ条件で試験を行わなければならない。風洞や模型の作成に莫大な費用と時間が必要である。そのため、コンピューターの発展した近年の航空機設計では、数値流体力学(Computational Fluid Dynamics, 以下CFD)が用いられる。CFDを使用することで航空機まわりの揚力係数や抗力係数を算出することができる。特に、離着陸時の揚力特性や巡航時の抵抗値は航空機開発において非常に重要である。例えば、巡航状態での抗力係数は必要推力に相当するため、燃費に直結する。そのため、非常に高い精度のCFDによる空力特性評価が必須である。また一方で、航空機全体で見ても、その形状は複雑であるため、機体形状に適合させた非構造格子を採用すると有利である。現在の航空機開発の現場では、格子の形状適合性が高く、高次精度かつ計算時間が短い、CFDコードが求められる。

1.1.2 航空機開発における代表的な計算手法

現在、広く用いられている計算手法が有限体積法である。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。しかし、有限体積法には二つの欠点が存在する。一つ目は、多次元の場合、定式通りの計算精

度を得ることができないことである。セル境界面の物理量の補間精度は隣接セルの品質に大きく依存するため、隣接セルの品質が悪い場合に定式通りの計算精度を得ることができない。二つ目は、並列化効率が低いことである。有限体積法の高次精度化には、多くのステンシルが必要となり、コンパクト性を失う。そのため、領域分割による並列化において通信コストが高くなり、並列化効率が下がる。従って、有限体積法は複雑形状への適合性では優れているが、計算精度と並列化効率に欠点がある。そこで、様々な研究機関が高次精度スキームの開発を進めている。

その中で、最も広く知られている非構造高次精度スキームは不連続ガレルキン法[1](Discontinuous Galerkin method, 以下 DG 法)である。DG 法は、セル内の物理量分布を基底関数で級数展開し、セル境界面ではガウス求積法により数値流束を計算する。DG 法は積分型の保存則を解き、 K 個の自由度から $2K - 1$ 次の空間精度を得る。自セルのみで計算が完結できるためコンパクトな手法であり、隣接セルの品質に影響されることなく、定式通りの計算精度を得ることができる。セル内に K 個の自由度を持つため計算コストは増加するが、並列計算に向く。一セルあたり自由度の分だけデータ量が増加し、時間積分に陰解法を用いる際、巨大な逆行列計算が必要となるので、計算コストが著しく高いという欠点を持つ。

1.1.3 DFR 法

そこで、新たに高次精度で計算コストの削減が見込める手法が Huynh によって考案された直接流束再構築法[2](Direct Flux Reconstruction method, 以下 DFR 法)である。DFR 法は、セル内部に複数のデータ点(Solution Point 以下 SP)を持ち、SP での物理量からセル内部の流束分布を構築する。構築したセル内部の流束分布とセル境界での数値流束を用いて、連続な流束分布を再構築する。再構築された流束は不連続点が存在しないため、流束の空間微分を求めることができる。従って、DFR 法は微分型の保存則を解くことができ、 K 個の自由度から $2K - 2$ 次の空間精度を得る。また、自セルと隣接セルのみの情報で計算が完結できるため、コンパクトな手法である。

航空機まわりの圧縮性流体では衝撃波が発生するため、不連続面を含んだ計算をしなければならない。線形移流問題に対する Godunov の定理[3]より、2 次精度以上の空間精度の場合、不連続面付近では必ず数値振動が発生するため、不連続検知と数値振動の抑制方法を考える必要がある。不連続面の対処方法として広く知られているのが、Cook らが考案した人工粘性法の一つの Localized Artificial Diffusivity 法(LAD)[4][5]である。宮路は LAD を流束再構築法[6](Flux Reconstruction method, 以下 FR 法)に適用し、衝撃波関連のベンチマーク問題を解いている[7]。また、芳賀と河合[8]は FR-LAD を航空宇宙工学分野の実践的な問題に適用し、非常に良好な結果を得ている。

1.2 研究目的

本研究では、航空機まわり流れ場の粘性圧縮性を考慮した DFR 計算コードの構築を目的とする。そのためにまず、線形移流方程式を計算対象とした DFR 法の計算コード開発とその検証を行う。さらに、圧縮性流体のベンチマーク問題の一つである Sod の衝撃波管問題によって計算コードを検証する。最後に、境界層問題を対象に粘性流計算し、厳密解と比較する。

第2章

数値計算法

2.1 1次元線形移流方程式 DFR 法

2.1.1 支配方程式

1次元線形移流方程式を考える.

$$u_t + f_x = 0. \quad (2.1)$$

ここで, f は流束を表し, 流束は移流速度 c と保存量 u の積として与えられる.

2.1.2 座標系

ルジャンドル多項式の直交性を利用するため, 物理座標系 x に代えて, $I = [-1, 1]$ の閉区間である一般座標系 ξ を用いる. 一般座標系から物理座標系への変換式は,

$$x(\xi) = x_j + \frac{h_j}{2} \xi. \quad (2.2)$$

ここで, x_j はセル E_j の中心座標を, h_j はセル E_j の格子幅を表している. 物理座標系から一般座標系への座標変換は,

$$\xi(x) = \frac{2}{h_j} (x - x_j). \quad (2.3)$$

一般座標系での関数 $r_j(\xi)$ を物理座標系のセル E_j 内で分布する関数 $r_j(x)$ で表すことができ,

$$r_j(\xi) = r_j(x(\xi)), \quad (2.4)$$

となるので, それぞれの座標系での空間微分は次式の関係になる.

$$\frac{dr_j(x)}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{dr_j(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{h_j} \frac{dr_j(\xi)}{d\xi}. \quad (2.5)$$

2.1.3 離散化

計算領域をセル E_j , ($j = \dots - 1, 0, 1, \dots$)に分割し, 各セル内に K 個の内点(自由度)を導入する. 自由度を Solution Point(以下 SP)と呼ぶ. セル E_j における SP の位置 $x_{j,k}$ ($k = 1, \dots, K$)での保存量を $u_{j,k}$ と表すと, 式(2.1)は

$$(u_t)_{j,k} + (f_x)_{j,k} = 0, \quad (2.6)$$

となる. 物理座標系セル E_j から一般座標系 I へ座標変換する.

$$\xi_k = \xi(x_{j,k}) = \frac{2}{h_j}(x_{j,k} - x_j), \quad (2.7)$$

$$(u_t)_{j,k} + \frac{2}{h_j}(f_\xi)_{j,k} = 0. \quad (2.8)$$

次に流束の空間微分を求める. 線形移流方程式を考えているので, SP での流束は移流速度 c と保存量 u の積で求まる.

$$f_{j,k} = cu_{j,k}. \quad (2.9)$$

流束の $K - 1$ 次近似関数をラグランジュ補間により求める.

$$f_j(\xi) = \sum_{k=1}^K f_{j,k} \Phi_k(\xi), \quad (2.10)$$

$$\Phi_k(\xi) = \prod_{l=1, l \neq k}^K \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l}. \quad (2.11)$$

図 2.1 に $K = 3$ の場合, 上式で求めた流束関数 $f_j(\xi)$ を示す. ただし, セル境界で不連続となる.

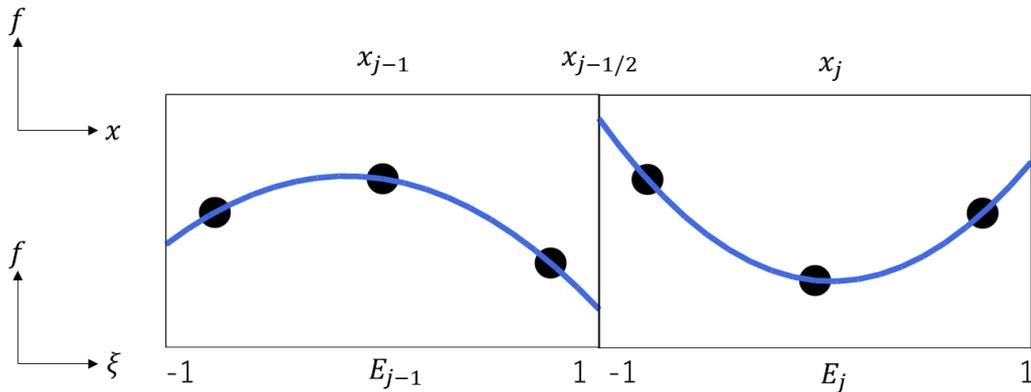


図 2.1 不連続流束分布($K = 3$)の模式図

連続な流束関数を得るには、セル境界 $x_{j-1/2}$ で共通の流束値を持つ必要がある。共通の流束値は左右のセル境界の保存量から求める。セル E_j 内の保存量の $K-1$ 次近似関数を式(2.10)と同様の方法で求める。まず、セル境界の位置座標 $x_{j-1/2}$ は以下のように求める。

$$x_{j-\frac{1}{2}} = x_j + \frac{h_j}{2} \times (-1) = x_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{2} \times 1 \quad (2.12)$$

この $x_{j-1/2}$ 点で共通の流束値を持つ必要がある。

$$u_j(\xi) = \sum_{k=1}^K u_{j,k} \Phi_k(\xi). \quad (2.13)$$

上式の再構築した保存量の分布から左右のセル境界 $x_{j-\frac{1}{2}}$ での保存量を求める。

$$u_L = u_{j-1}(1), \quad (2.14)$$

$$u_R = u_j(-1). \quad (2.15)$$

添え字 L は左側セル境界、添え字 R は右側セル境界を意味する。式(2.14)、(2.15)より、共通流束 f^{com} を風上差分で求める。

$$f^{com}(u^L + u^R) = \frac{1}{2}c(u^L + u^R) - \frac{1}{2}|c|(u^R - u^L). \quad (2.16)$$

左右のセル境界の座標位置、共通流束を以下のように設定する。

$$x_{j,0} = x_{j-1/2}, \quad x_{j,K+1} = x_{j+1/2}, \quad (2.17)$$

$$f_{j,0} = f_{j-1/2}^{com}, \quad f_{j,K+1} = f_{j+1/2}^{com}. \quad (2.18)$$

式(2.9)、(2.17)、(2.18)より、 $K+1$ 次の連続流束関数 $F_j(x_{j,k})$ を求める。

$$F_j(x_{j,k}) = \sum_{k=0}^{K+1} f_{j,k} \Phi_k(x). \quad (2.19)$$

$$\Phi_k(x) = \prod_{l=1, l \neq k}^K \frac{x - x_l}{x_k - x_l}. \quad (2.20)$$

図 2.2 に $K = 3$ の場合、上式で求めた連続流束関数を示す。

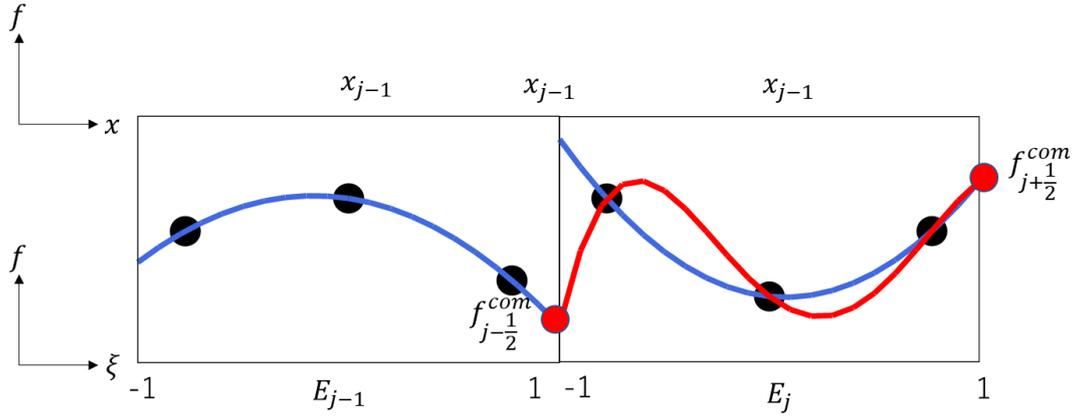


図 2.2 連続流束分布 ($K = 3$) の模式図

連続流束関数は微分可能であるので、流束の空間微分 $(f_x)_{j,k}$ は

$$(f_x)_{j,k} = (F_j)_x(x_{j,k}), \quad (2.21)$$

となる。従って、式(2.6)を次式のように半離散式で表すことができる。

$$\frac{du_{j,k}}{dt} = -(F_j)_x(x_{j,k}). \quad (2.22)$$

式(2.22)に対して、時間積分を行うことで保存量を時間更新する。

本研究では SP は $K = 3$ のガウス点を用いる。また、時間積分には TVD 3 次ルンゲクッタ法[9]を用いる。

2.1.4 保存性の確認

$u_j(\xi)$ は K 個の SP により、 $K - 1$ 次関数に近似する。SP での重みを w_k とすると、

$$\int_{-1}^1 u_j(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}, \quad (2.23)$$

と表すことができる。式(2.3)より、一般座標系から物理座標系へ座標変換する。

$$\int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}. \quad (2.24)$$

式(2.24)の両辺の時間微分を取る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}. \quad (2.25)$$

多少の式変形を行う。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k \frac{du_{j,k}}{dt}. \quad (2.26)$$

式(2.22)より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = -\frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k (F_j)_x(x_{j,k}). \quad (2.27)$$

と変形できる. 連続流束関数の空間微分 $f_j(x)$ に対しても式(2.22)と同様の変形が可能である.

$$\int_{E_j} (f_j)_x(x_j) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k (F_j)_x(x_{j,k}). \quad (2.28)$$

式(2.28)右辺を物理座標系から一般座標系に座標変換する.

$$\int_{E_j} (f_j)_x(x_j) dx = \int_{-1}^1 (F_\xi)_j(\xi) d\xi. \quad (2.29)$$

式(2.29)左辺より

$$\int_{E_j} (f_j)_x(x_j) dx = f_{j+1/2}^{com} - f_{j-1/2}^{com}, \quad (2.30)$$

となる. 式(2.26), (2.28), (2.30)より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = f_{j+1/2}^{com} - f_{j-1/2}^{com}. \quad (2.31)$$

よって, 1次元DFR法は保存則を満たす. ただし, $f_{j+1/2}^{com}$ と $f_{j-1/2}^{com}$ は風上流束とする.

2.2 2次元圧縮性流体DFR法

2.2.1 支配方程式

2次元オイラー方程式を考える.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = 0. \quad (2.32)$$

ここで, \mathbf{Q} は保存量ベクトル, \mathbf{E} と \mathbf{F} は対流流束ベクトルを表す.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E+p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E+p)v \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

ただし, ρ :密度, u : x 方向の移流速度, v : y 方向の移流速度, p :圧力, E :全エネルギーである.

2.2.2 離散化

初めに計算領域をセル $E_{i,j}$, ($i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$)に分割し, 各セル内に $K \times K$ 個の SP を導入する. セル $E_{i,j}$ における SP の位置 $(x_{i,k}, y_{j,l})$ ($k = 1, \dots, K$), ($l = 1, \dots, K$)での保存量ベクトルを $\mathbf{Q}_{i,j,k,l}$ とすると式(2.31)は

$$(\mathbf{Q}_t)_{i,j,k,l} + (\mathbf{E}_x)_{i,j,k,l} + (\mathbf{F}_y)_{i,j,k,l} = 0. \quad (2.34)$$

ここで物理座標系 $E_{i,j}$ から一般座標系 I に座標変換する.

$$\xi_k = \xi(x_{i,k}) = \frac{2}{h_i}(x_{i,k} - x_i), \quad (2.35)$$

$$\eta_l = \eta(y_{j,l}) = \frac{2}{h_j}(y_{j,l} - y_j), \quad (2.36)$$

$$(\mathbf{Q}_t)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_i}(\mathbf{E}_\xi)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_j}(\mathbf{F}_\eta)_{i,j,k,l} = 0. \quad (2.37)$$

次に対流流束の空間微分を求める. SP での対流流束ベクトル $\mathbf{E}_{i,j,k,l}$, $\mathbf{F}_{i,j,k,l}$ から対流流束の $K - 1$ 次近似関数を式(2.10)と同様の方法で求める.

$$\mathbf{E}_{i,j,k,l}(\xi) = \sum_{k=1}^K \mathbf{E}_{i,j,k,l} \Phi_k(\xi), \quad (2.38)$$

$$\mathbf{F}_{i,j,k,l}(\eta) = \sum_{l=1}^K \mathbf{F}_{i,j,k,l} \Phi_l(\eta), \quad (2.39)$$

$$\Phi_l(\eta) = \prod_{l=1, l \neq k}^K \frac{\eta - \eta_k}{\eta_l - \eta_k}. \quad (2.40)$$

上式で求めた対流流束関数はセル境界で不連続である. 対流流束関数を連続にするには, セル境界で共通の対流流束値を持つ必要がある. 共通の対流流束値は左右のセル境界の保存量から求める. セル $E_{i,j}$ 内の保存量の $K - 1$ 次近似関数を式(2.10)と同様の方法で求める.

$$\mathbf{Q}_{i,j,l}(\xi) = \sum_{k=1}^K \mathbf{Q}_{i,j,k,l} \Phi_k(\xi), \quad (2.41)$$

$$\mathbf{Q}_{i,j,k}(\eta) = \sum_{k=1}^K \mathbf{Q}_{i,j,k,l} \Phi_l(\eta). \quad (2.42)$$

保存量の再構築分布から上下左右のセル境界での保存量を求める.

$$\mathbf{q}_{L,j,l} = \mathbf{q}_{i-1,j,l}(1), \quad (2.42)$$

$$\mathbf{q}_{R,j,l} = \mathbf{q}_{i,j,l}(-1), \quad (2.43)$$

$$\mathbf{q}_{U,i,k} = \mathbf{q}_{i,j-1,k}(1), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{q}_{D,i,k} = \mathbf{q}_{i,j,k}(-1). \quad (2.45)$$

添え字 L は左側セル境界, 添え字 R は右側セル境界, 添え字 U は上側セル境界, 添え字 D は下側セル境界を意味する. 式(2.42), (2.43), (2.44), (2.45)より, Roe法[10]を用いてセル境界での共通対流流束 \mathbf{e}^{com} , \mathbf{f}^{com} を求める. 得られた共通対流流束を以下のように設定する.

$$\mathbf{e}_{i,j,0,l} = \mathbf{e}_{i-1/2,j,l}^{com} \quad \mathbf{e}_{i,j,K+1,l} = \mathbf{e}_{i+1/2,j,l}^{com} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{f}_{i,j,k,0} = \mathbf{f}_{i,j-1/2,k}^{com} \quad \mathbf{f}_{i,j,k,K+1} = \mathbf{f}_{i,j+1/2,k}^{com}. \quad (2.47)$$

式(2.18)と同様の方法で, 連続対流流束関数 $\mathbf{E}_i(\mathbf{x}_{i,k})$, $\mathbf{F}_j(\mathbf{y}_{j,l})$ を求める.

$$\mathbf{E}_{i,j,l}(\mathbf{x}_{i,k}) = \sum_{k=0}^{K+1} \mathbf{e}_{i,k} \Phi_k(x), \quad (2.48)$$

$$\mathbf{F}_{i,j,k}(\mathbf{y}_{j,l}) = \sum_{k=0}^{K+1} \mathbf{f}_{j,l} \Phi_l(y). \quad (2.49)$$

連続対流流束関数から対流流束の空間微分を求める.

$$(\mathbf{e}_x)_{i,j,l} = (\mathbf{E}_{i,j,l})_x(\mathbf{x}_{i,k}), \quad (2.50)$$

$$(\mathbf{f}_y)_{i,j,k} = (\mathbf{F}_{i,j,k})_y(\mathbf{y}_{j,l}). \quad (2.51)$$

従って, 式(2.33)は以下のような半離散式で表すことができる.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{i,j,k,l}}{\partial t} = -(\mathbf{E}_{i,j,l})_x(\mathbf{x}_{i,k}) - (\mathbf{F}_{i,j,k})_y(\mathbf{y}_{j,l}). \quad (2.52)$$

式(2.52)に対して, 時間積分を行うことで保存量を時間更新する.

2.3 2次元圧縮性粘性流体 DFR 法

2.3.1 支配方程式

2次元圧縮性ナビエーストークス方程式を考える.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{E}_v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}_v}{\partial y^2} = 0. \quad (2.53)$$

ここで, \mathbf{Q} は保存量ベクトル, \mathbf{E} , \mathbf{F} は対流流束ベクトル, \mathbf{E}_v , \mathbf{F}_v は粘性流束ベクトルを表す.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{pmatrix}, \mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_y \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

ただし, ρ :密度, u : x 方向の移流速度, v : y 方向の移流速度, p :圧力, E :全エネルギーである. また, $\boldsymbol{\tau}$ は粘性応力, \mathbf{q} は熱流束を示す. 粘性応力 $\boldsymbol{\tau}$ と熱流束 \mathbf{q} は Stokes の定理と Fourier の法則を用いて

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.56)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.57)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.58)$$

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\kappa \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (2.59)$$

のように与えられる. ここで κ は熱伝導係数, T は温度を示す.

2.3.2 離散化

初めに計算領域をセル $E_{i,j}$, ($i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$)に分割し, 各セル内に $K \times K$ 個の SP を導入する. セル $E_{i,j}$ における SP の位置 $(x_{i,k}, y_{j,l})$ ($k = 1, \dots, K, l = 1, \dots, K$)での保存量ベクトルを $\mathbf{Q}_{i,j,k,l}$ とすると式(2.52)は

$$(\mathbf{Q}_t)_{i,j,k,l} + (\mathbf{E}_x)_{i,j,k,l} + (\mathbf{F}_y)_{i,j,k,l} - (\mathbf{E}_{v_{xx}})_{i,j,k,l} - (\mathbf{F}_{v_{yy}})_{i,j,k,l} = 0. \quad (2.60)$$

ここで物理座標系 $E_{i,j}$ から一般座標系 I に座標変換する.

$$\xi_k = \xi(x_{i,k}) = \frac{2}{h_i}(x_{i,k} - x_i), \quad (2.61)$$

$$\eta_l = \eta(y_{j,l}) = \frac{2}{h_j}(y_{j,l} - y_j), \quad (2.62)$$

$$(\mathbf{Q}_t)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_i}(\mathbf{E}_\xi)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_j}(\mathbf{F}_\eta)_{i,j,k,l} - \frac{2}{h_i}(\mathbf{E}_{v\xi\xi})_{i,j,k,l} - \frac{2}{h_j}(\mathbf{F}_{v\eta\eta})_{i,j,k,l} = 0. \quad (2.63)$$

ただし、対流流束 $(\mathbf{E}_x)_{i,j,k,l}$, $(\mathbf{F}_y)_{i,j,k,l}$ の離散化は前節で示したため、今節は粘性流束

$(\mathbf{E}_{vxx})_{i,j,k,l}$, $(\mathbf{F}_{vyy})_{i,j,k,l}$ の離散化を示す。SPでの粘性流束 $\mathbf{E}_{v_{i,j,k,l}}$, $\mathbf{F}_{v_{i,j,k,l}}$ から粘性流束の

$K-1$ 次近似関数を式(2.10)と同様の方法で求める。

$$\mathbf{E}_{v_{i,j,l}}(\xi) = \sum_{k=1}^K \mathbf{E}_{v_{i,j,k,l}} \Phi_k(\xi), \quad (2.64)$$

$$\mathbf{F}_{v_{i,j,k}}(\eta) = \sum_{l=1}^K \mathbf{F}_{v_{i,j,k,l}} \Phi_l(\eta), \quad (2.65)$$

上式で求めた粘性流束関数から、SPでの粘性流束の1階微分値 $(\mathbf{e}_{v\xi})_{i,j,l}$, $(\mathbf{f}_{v\eta})_{i,j,k}$ を求める。

$$(\mathbf{e}_{v\xi})_{i,j,k,l} = (\mathbf{E}_{v_{i,j,l}})_\xi(\xi_{i,k}), \quad (2.66)$$

$$(\mathbf{f}_{v\eta})_{i,j,k,l} = (\mathbf{F}_{v_{i,j,k}})_\eta(\eta_{i,k}). \quad (2.67)$$

次に、セル境界で共通の粘性流束の1階微分値 $\mathbf{e}_{v_\xi}^{com}$, $\mathbf{f}_{v_\eta}^{com}$ を求める。共通の粘性流束の1階微分値は左右のセル境界の粘性流束の1階微分値から求める。式(2.64), (2.65)から上下左右のセル境界での粘性流束の1階微分値を求める。

$$\mathbf{e}_{v_{L,i,j,l}} = (\mathbf{E}_{v_{i-1,j,l}})_\xi(1), \quad (2.68)$$

$$\mathbf{e}_{v_{R,i,j,l}} = (\mathbf{E}_{v_{i,j,l}})_\xi(-1), \quad (2.69)$$

$$\mathbf{f}_{v_{U,i,j,k}} = (\mathbf{F}_{v_{i,j-1,k}})_\eta(1), \quad (2.70)$$

$$\mathbf{f}_{v_{D,i,j,k}} = (\mathbf{F}_{v_{i,j,k}})_\eta(-1). \quad (2.71)$$

添え字Lは左側セル境界，添え字Rは右側セル境界，添え字Uは上側セル境界，添え字Dは下側セル境界を意味する．粘性は左右の影響を均等に受ける必要があるため，セル境界での粘性流束の1階微分値は，左右の粘性流束の1階微分値の平均値とする．同様に上下方向のセル境界値も平均値とする．

$$\left(e_{v\xi}^{com}\right)_{i-1/2,j,l} = \frac{1}{2}(e_{vL_{i,j,l}} + e_{vR_{i,j,l}}), \quad (2.72)$$

$$\left(e_{v\xi}^{com}\right)_{i+1/2,j,l} = \frac{1}{2}(e_{vL_{i+1,j,l}} + e_{vR_{i+1,j,l}}), \quad (2.73)$$

$$\left(f_{v\eta}^{com}\right)_{i,j-1/2,k} = \frac{1}{2}(f_{vU_{i,j,k}} + f_{vD_{i,j,k}}), \quad (2.74)$$

$$\left(f_{v\eta}^{com}\right)_{i,j+1/2,k} = \frac{1}{2}(f_{vU_{i,j+1,k}} + f_{vD_{i,j+1,k}}). \quad (2.75)$$

得られた共通の粘性流束の1階微分値を以下のように設定する．

$$\left(e_{v\xi}\right)_{i,j,0,l} = \left(e_{v\xi}^{com}\right)_{i-1/2,j,l}, \left(e_{v\xi}\right)_{i,j,K+1,l} = \left(e_{v\xi}^{com}\right)_{i+1/2,j,l}, \quad (2.76)$$

$$\left(f_{v\eta}\right)_{i,j,k,0} = \left(f_{v\eta}^{com}\right)_{i,j-1/2,k}, \left(f_{v\eta}\right)_{i,j,k,K+1} = \left(f_{v\eta}^{com}\right)_{i,j+1/2,k}. \quad (2.77)$$

式(2.18)と同様の方法で，連続な粘性流束の1回微分の関数 $\left(\mathbf{E}_{v_{i,j,l}}\right)_x(x_{i,k})$ ，

$\left(\mathbf{F}_{i,j,k}\right)_y(y_{j,l})$ を求める．

$$\left(\mathbf{E}_{v_{i,j,l}}\right)_x(x_{i,k}) = \sum_{k=0}^{K+1} \left(e_{v\xi}\right)_{i,j,k,l} \Phi_k(\xi), \quad (2.78)$$

$$\left(\mathbf{F}_{v_{i,j,k}}\right)_y(y_{j,l}) = \sum_{l=0}^{K+1} \left(f_{v\eta}\right)_{i,j,k,l} \Phi_l(\eta). \quad (2.79)$$

連続な粘性流束の1回微分の関数から粘性流束の2階微分を求める．

$$\left(e_{v_{xx}}\right)_{i,j,k,l} = \left(\mathbf{E}_{v_{i,j,l}}\right)_{xx}(x_{i,k}), \quad (2.80)$$

$$\left(f_{v_{yy}}\right)_{i,j,k,l} = \left(\mathbf{F}_{v_{i,j,k}}\right)_{yy}(y_{j,l}). \quad (2.81)$$

従って、式(2.60)は以下のような半離散式で表すことができる.

$$\frac{\partial Q_{ij,k,l}}{\partial t} = -(\mathbf{E}_{i,j,l})_x(\mathbf{x}_{i,k}) - (\mathbf{F}_{i,j,k})_y(\mathbf{y}_{j,l}) + (\mathbf{E}_{v_{i,j,l}})_{xx}(\mathbf{x}_{i,k}) + (\mathbf{f}_{v_{i,j,k}})_{yy}(\mathbf{y}_{j,l}). \quad (2.82)$$

式(2.82)に対して、時間積分を行うことで保存量を時間更新する.

第3章

DFR 計算コード検証

3.1 1次元線形移流問題

不連続面を含まない連続関数の例として、正弦波を初期条件として与える。1次元線形移流問題に対して、厳密解との誤差を求め、コード検証を行う。計算条件は表3.1のように設定する。

表 3.1 計算条件

格子点数	50 点
計算領域	$[0 \leq x \leq 1]$
境界条件	周期境界
初期条件	$u_{init} = \sin(2\pi x)$
移流速度	$c = 1$
クーラン数	0.1
ステップ数	10,000

図 3.1 に正弦波を左から右に 20 周期移流させた計算結果と誤差を示す。図 3.1 の赤線は 10,000 ステップ後の計算結果、黒線は誤差を示す。10,000 ステップ間で流れた周期 T は、

$$T = \frac{S \times dt \times c}{\lambda} = \frac{10,000 \times \frac{0.1 \times \frac{1}{50}}{1} \times 1}{1} = 20. \quad (3.1)$$

ただし、 S : ステップ数、 dt : 時間刻み幅、 λ : 波長である。図 3.1 は正弦波が 20 周期分流れた後の図であり、解が発散することなく、物理量の移流が解けていることを確認した。

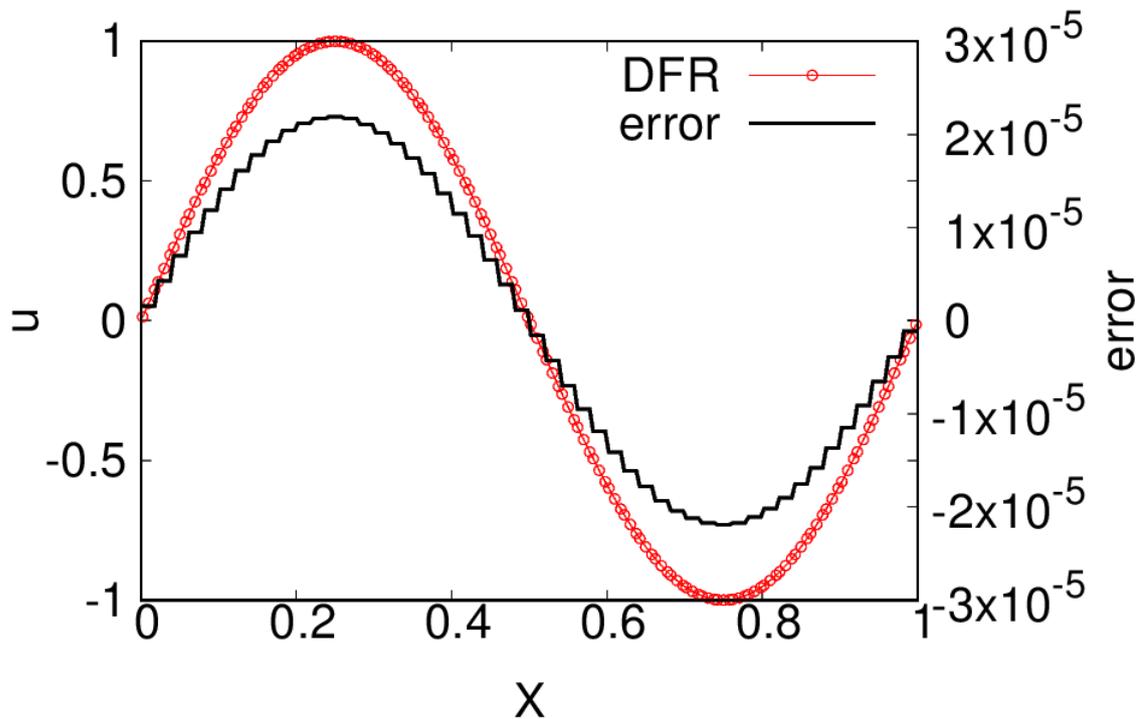


図 3.1 正弦波移流問題の計算結果と誤差

3.1.1 精度検証

図 3.2 に計算精度検証の結果を示す. 前節と同様の正弦波移流問題に対して, 時間更新ステップ数を 10,000 ステップとする. 格子点数 30 点, 60 点, 120 点での局所誤差の常用対数値をプロットし, 最小二乗法を用いて近似直線を引いた. 図 3.2 の赤線は DFR 法, 青線は 5 次精度 WENO 法 (Weighted Essentially Non-Oscillatory, WENO) [11], 緑線は 2 次精度有限体積法 (Finite Volume Method, FVM) を示す. 近似直線の傾きから, DFR 法は 4 次精度, WENO 法は 5 次精度, 有限体積法は 2 次精度を確認した.

SP に K 個のガウス点を用いた DFR 法では, $2K - 2$ 次の計算精度を持つことが示されている [1]. 今回作成した計算コードは $K = 3$ であり, 定式通りの 4 次精度を得ることができた.

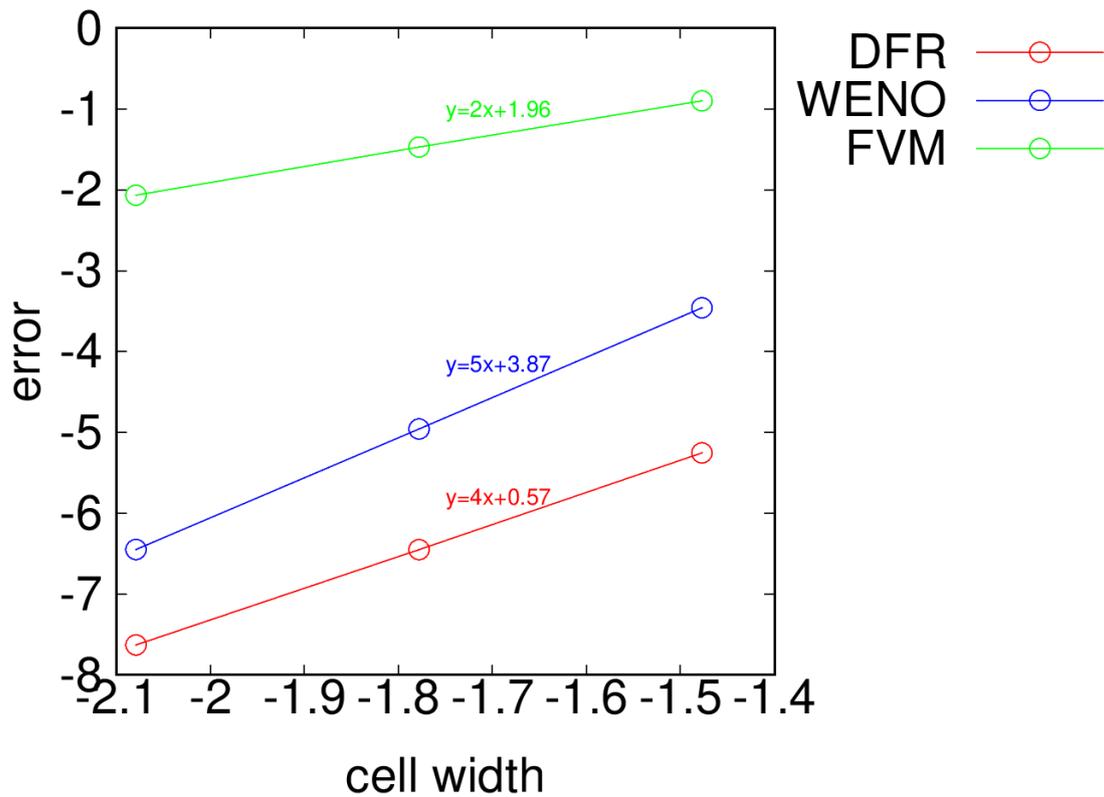


図 3.2 計算精度検証

3.1.2 有限体積法, WENO 法との比較

計算条件を表 3.2 のように設定する. 図 3.3 は正弦波移流問題での有限体積法, WENO 法, DFR 法の比較である. 図 3.3 の赤線は DFR 法, 青線は WENO 法, 緑線は有限体積法の計算結果を示す. ただし, 図 3.3 は 5 周期分の \sin 波が流れた後の図である. 計算精度が高い DFR 法と WENO 法は計算結果がほぼ一致し, 物理量の移流が解けているが, 有限体積法では, 波の最大と最小付近で解がなまっていることが確認できる. 今回の検証では, WENO との差は確認できなかった. ただし, WENO 法はその定式化から並列化効率が DFR 法よりは低いいため, 大規模な並列化計算となるほど DFR 法が優位になる.

表 3.2 有限体積法, WENO 法との比較の計算条件

	WENO 法, DFR 法	有限体積法
格子点数	50	150
計算領域	$[0 \leq x \leq 1]$	
初期条件	$u_{init} = \sin(2\pi x)$	
移流速度	$c = 1$	
クーラン数	0.1	
境界条件	周期境界	

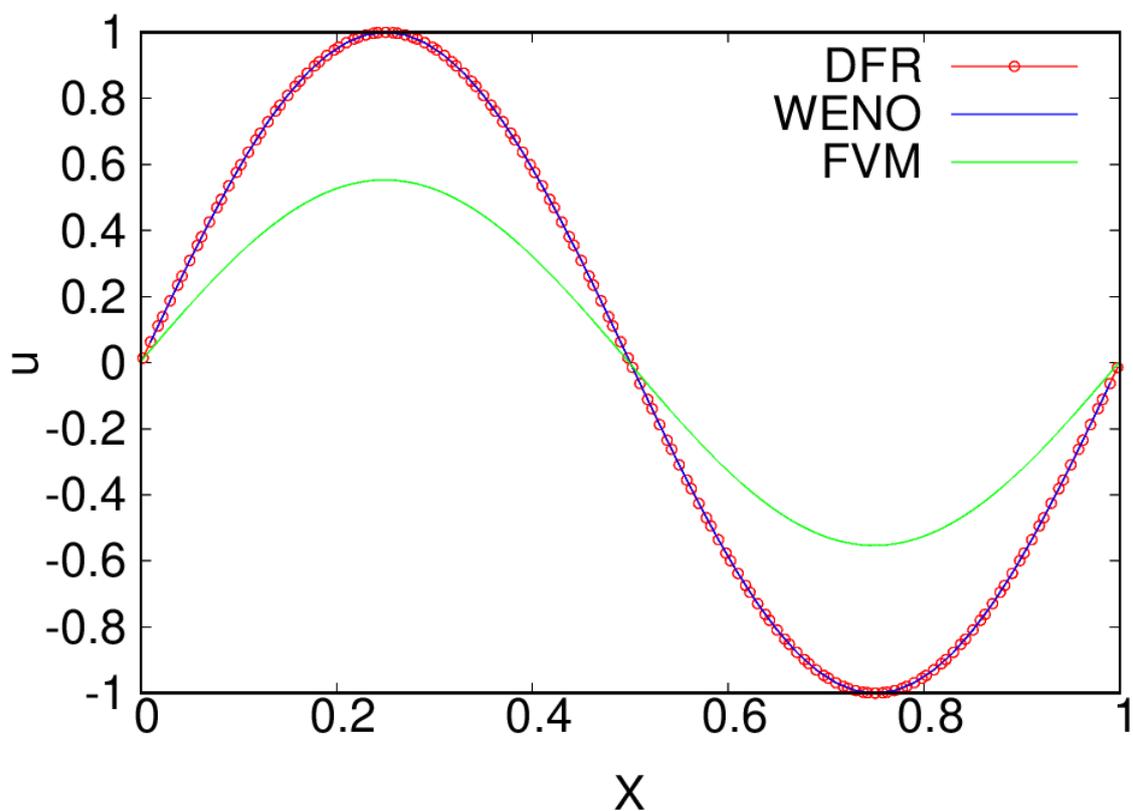


図 3.3 sin 波移流問題での FVM, WENO 法と DFR の比較

3.2 Sod の衝撃波管問題

圧縮性流体計算コードのベンチマーク問題である Sod の衝撃波管問題[12]に取り組む。管内に左右で熱力学的条件の異なる流体を薄い隔膜で仕切って封入する。隔膜を瞬時に取り去ることで、衝撃波、接触不連続、膨張波と3つの波が異なる速度で伝わる典型的な問題で、厳密解を算出できる。

計算条件を表 3.3 に示す。図 3.4(a)は DFR 法による衝撃波管問題の密度分布の計算結果、(b)は速度分布の計算結果、(c)は圧力分布の計算結果である。ただし、図 3.4(a), (b), (c)は $y = 0.5$ 位置での x 方向の断面図である。紫線は厳密解、緑線は計算結果、黒破線は初期条件である。衝撃波は $x = 0.75$ 付近、接触不連続面は $x = 0.65$ 付近、膨張波の先頭は $x = 0.35$ 付近まで進み、3種類の波が異なる速度で進むことが確認できる。

しかし、衝撃波の背後で振動がわずかに見られる。また、密度分布に見られる接触不連続面で位相誤差も発生している。格子点数を 200 点としたため、位相誤差は小さく抑えられているが、格子点数を減らすと誤差は大きくなる。将来的に 3 次元問題を対象とすることを目的としていることから、接触不連続面で発生する位相誤差を解決することも今後の課題である。

表 3.3 Sod 問題の計算条件

格子点数	200 点×200 点
計算領域	$[0 \leq x \leq 1], [0 \leq y \leq 1]$
境界条件	自由境界
初期条件	$\begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \\ v_L \\ P_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \\ v_R \\ P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$
クーラン数	0.1
時刻	$t = 0.14159$

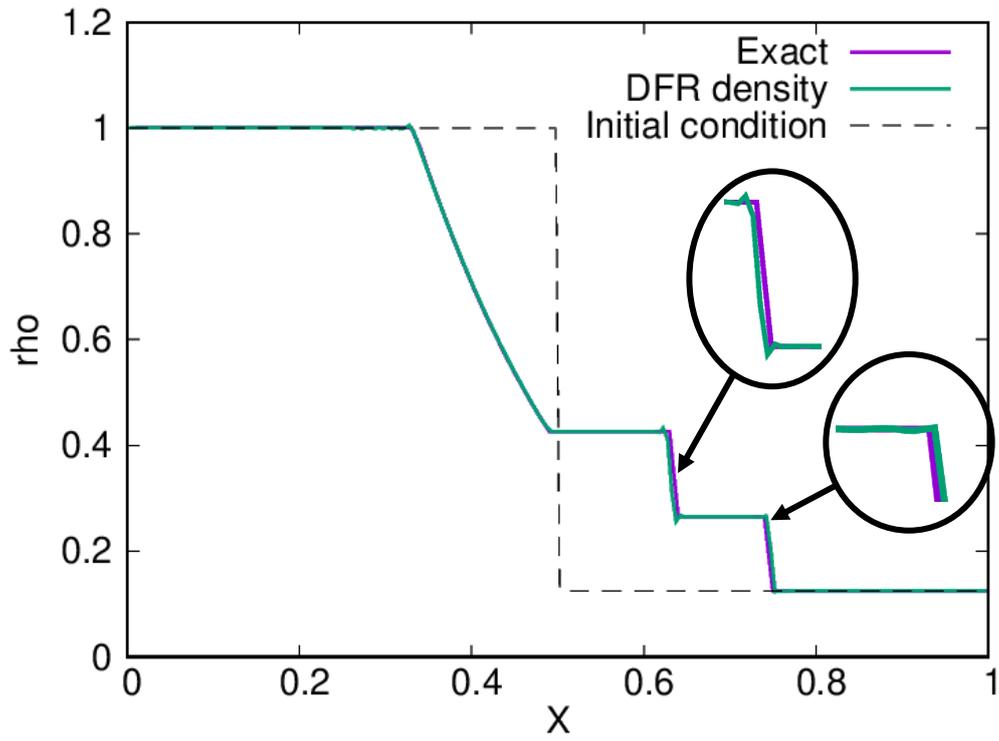


图 3.4 (a) 密度分布

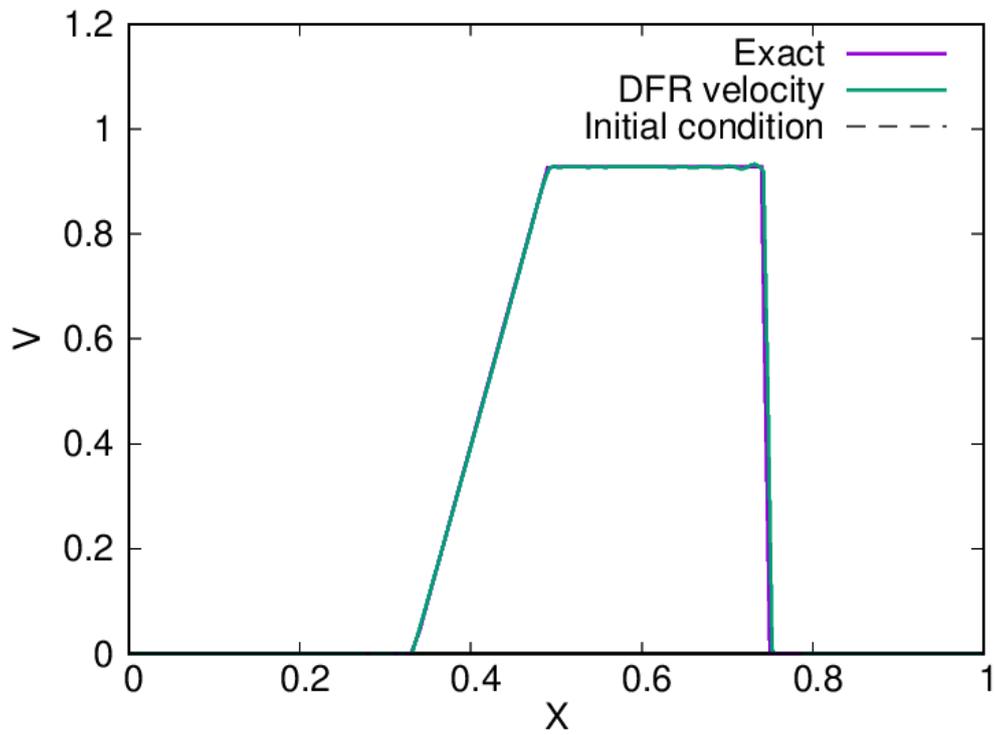


图 3.4 (b) 速度分布

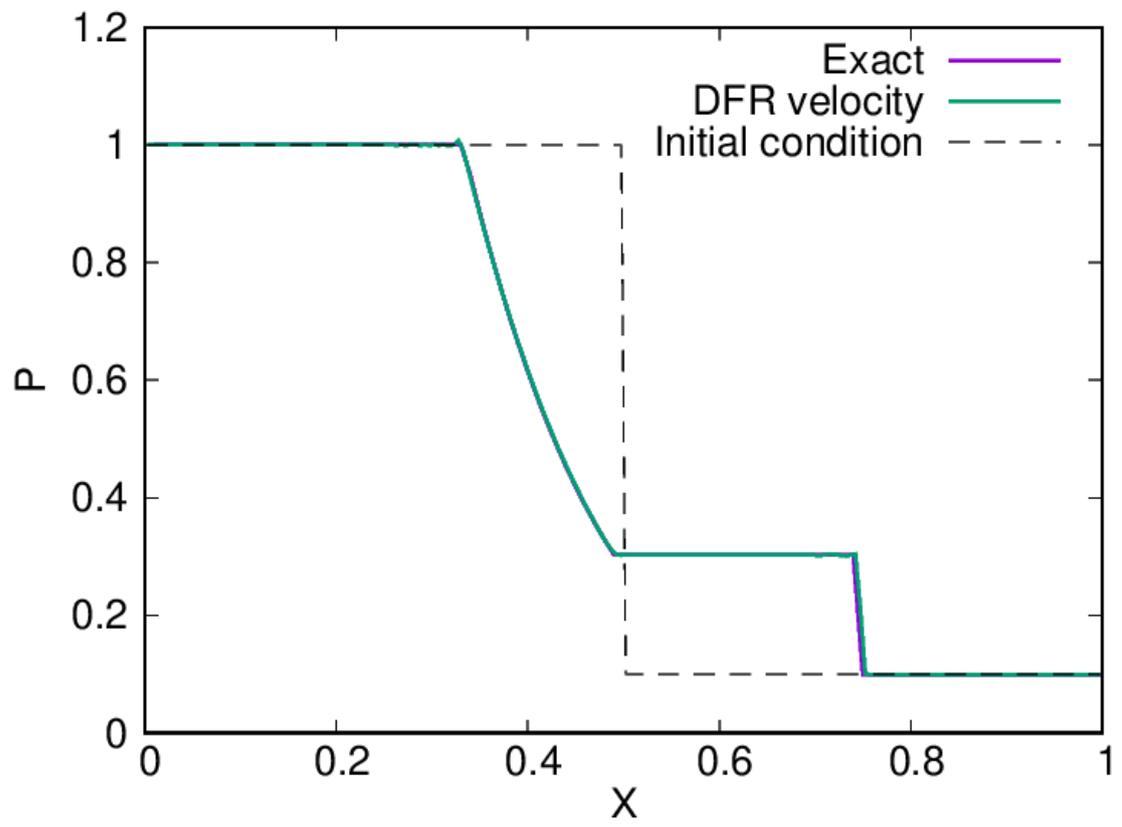


图 3.4(c) 压力分布

3.3 平板境界層問題

圧縮性粘性流体計算コードのベンチマーク問題である平板境界層問題に取り組む。計算領域全体に熱力学的条件の等しい流体を初期条件として与える。また、下側の境界条件は、 $0 \leq x \leq 1$ はすべりあり境界、 $(1 < x \leq 4)$ はすべりなし境界、左側は流入境界、上側と右側は流出境界とする。定常状態で境界層ができる典型的な問題で、厳密解を算出できる。計算条件を表 3.4 に示す。

表 3.4 平板境界層問題の計算条件

格子点数	200 点×100 点
計算領域(x 方向), (y 方向)	$[0 \leq x \leq 4]$, $[0 < y \leq 0.1]$
初期条件	圧力: $P = 1013$ 【hPa】 温度: $T = 300$ 【K】 マッハ数: $Ma = 0.1$ 【-】
クーラン数	0.01

初期条件から密度 ρ 【kg/m³】，音速 c 【m/s】， x 方向の移流速度 u 【m/s】 y 方向の移流速度 v 【m/s】 を求める。

$$\rho = \frac{M \times P}{T \times R} = \frac{0.029 \times 101300}{300 \times 8.314} = 1.178. \quad (3.2)$$

ここで、分子量 $M = 0.029$ 【kg/mol】，気体定数 $R = 8.314$ 【J/(K・mol)】 とする。

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \times P}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.4 \times 101300}{1.178}} = 346.97. \quad (3.3)$$

ただし、比熱比 $\gamma = 1.4$ 【-】 とする。

$$\begin{aligned} u &= Ma \times c \times \cos\left(\frac{\alpha \times \pi}{180}\right) \times \cos\left(\frac{\beta \times \pi}{180}\right) \\ &= 0.1 \times 346.97 \times \cos\left(\frac{0 \times \pi}{180}\right) \times \cos\left(\frac{0 \times \pi}{180}\right) = 34.7, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} v &= Ma \times c \times \sin\left(\frac{\alpha \times \pi}{180}\right) \times \sin\left(\frac{\beta \times \pi}{180}\right) \\ &= 0.1 \times 346.97 \times \sin\left(\frac{0 \times \pi}{180}\right) \times \sin\left(\frac{0 \times \pi}{180}\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$\alpha = \beta = 0$ とする。

レイノルズ数 Re 【-】 を求める。

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{34.7 \times 3.0}{0.1} = 1004.1 \quad (3.6)$$

代表長さ $L = 3.0$ 【m】，粘性係数 $\nu = 0.1$ 【Pa・s】 とする。

図 3.5 は $x = 1.0$ 【m】 付近での平板境界層問題の速度分布である。すべりなし境界が始まる $x = 1.0$ 【m】 付近で速度の減速が確認できる。また、 x が大きくなれば、壁面から離れた位置でも速度が減速され、境界層が確認できる。

図 3.6 は DFR 法による平板境界層問題のブラジウス解[13]との比較である。図 3.6 の横軸は主流速度 U_∞ と計算結果の速度比 $\frac{u}{U_\infty}$ ，縦軸は $\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$ である。ただし、図 3.6 は $x = 3.8$ 【m】 位置での計算結果である。緑線がブラジウス解，紫線が計算結果である。ブラジウス解と計算結果が一致しない理由として、壁面での格子幅が大きく、壁面近傍の速度変化を捉えられなかったことが原因と考えられる。ブラジウス解と計算結果を一致させるためには、計算格子を細かくする必要がある。

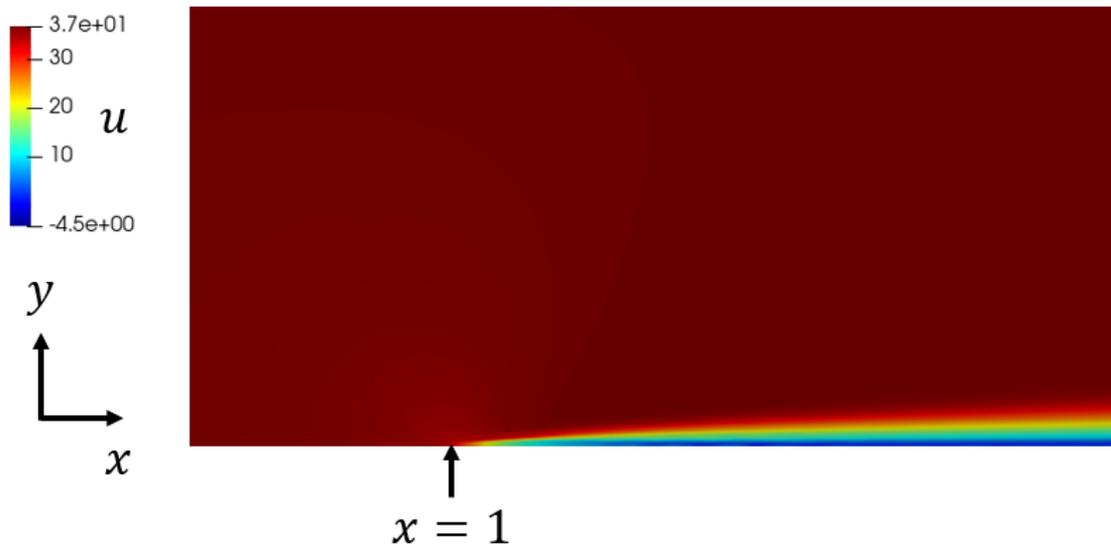


図 3.5 平板境界層速度分布

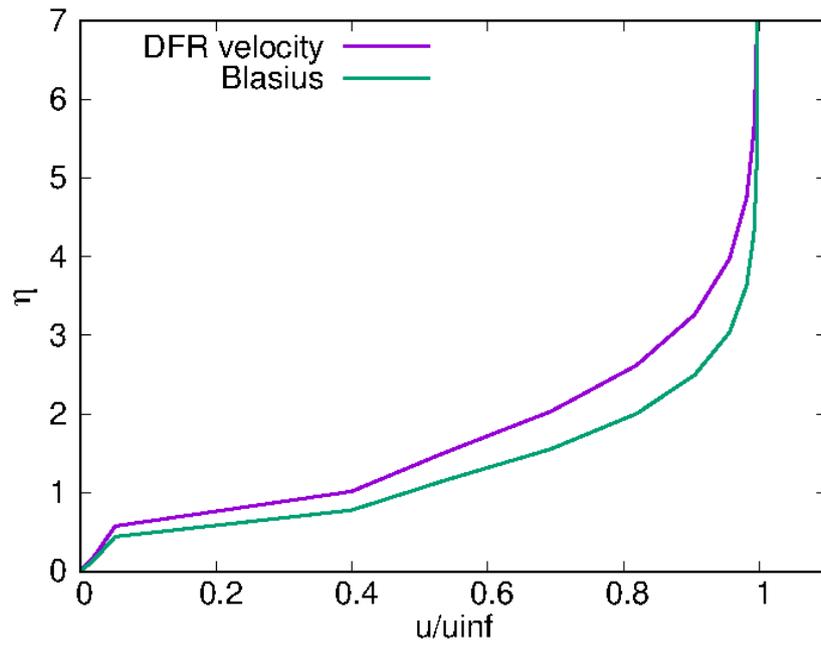


図 3.6 ブラジウス解との比較

第4章

結論

本研究では、航空機まわりの圧縮性流体計算の実行に向けたコード開発を行った。

まず、1次元線形移流方程式に対し、DFR法を用いた計算コードを開発した。微分可能な連続関数である正弦波の移流を解き、コード検証と精度検証を行った。定式通り4次の計算精度を得ることを確認した。

次に2次元圧縮性流体のベンチマーク問題の一つであるSodの衝撃波管問題に対し、DFR法を用いた計算コードを開発した。大域的には厳密解と一致したが、衝撃波の背後に数値振動が発生した。また、密度分布に見られる接触不連続面で位相誤差が発生した。将来的に3次元問題を対象とすることを目的としているため、衝撃波の背後の数値振動と接触不連続面での位相誤差を解決することは重要である。

最後に2次元圧縮性粘性流体のベンチマーク問題の一つである平板境界層問題に対し、DFR法を用いた計算コードを開発した。速度分布から境界層ができていく様子を確認した。しかし、ブラジウス解との比較では値が大きくズレてしまっていた。理由として、 y 方向の計算領域が狭く、圧力波の影響を受けてしまったことや、壁面での格子幅が大きかったことが原因と考えられる。

今後はSodの衝撃波管問題で発生した数値振動と位相誤差の課題を解決し、平板境界層問題の y 方向の計算領域と壁面での格子幅を見直し、最終的には非構造格子を用いた航空機まわりの高次精度流体解析コードの完成を目指す。

参考文献

- [1] Cockburn, B., and Shu, C-W., “TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws 2: General Framework”, *Mathematics of Computation*, Vol. 52, pp. 411-435, 1989.
- [2] Huynh, H. T., “A Flux Reconstruction Approach to High-Order Schemes Including Discontinuous Galerkin Methods”, AIAA paper 2007-4079, 2007.
- [3] S. K. Godunov. “Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics”, *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 47, pp. 251-306, 1959.
- [4] Cook, A. W., “Artificial Fluid Properties for Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Mixing”, *Physics of Fluids*, Vol. 19, No. 055103, 2007.
- [5] Cook, A. W., and Cabot, W. H., “A high-wavenumber viscosity for high-resolution numerical methods”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, pp. 594-601, 2004.
- [6] Huynh, H. T., Wang, Z. J., and Vincent, P. E., “High-Order method for computational fluid dynamics: A brief review of compact differential formulations on unstructured grids”, *Computers & Fluids*, Vol. 98, pp. 209-220, 2014.
- [7] Miyaji, K., “On the Compressible Flow Simulation with Shocks by a Flux Reconstruction Approach”, AIAA paper 2011-3057, 2011.
- [8] Haga, T., and Kawai, S., “On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 376, pp. 534-563, 2019.
- [9] Gottlieb, S., and Shu, C. W., “Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes”, *Mathematics of Computational Physics*, Vol. 67, pp. 73-85, 1998.
- [10] Roe, P. L., “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [11] Liu, X-D., Osher, S., and Chan, T., “Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, pp. 200-212, 1994.
- [12] Sod, G. A., “A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 27, pp. 1-31, 1978.
- [13] Howarth, L. , On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equations. Proc. Roy. Soc. , London, A164, 547-579(1938)

謝辞

本研究を行うにあたり、荻野要介講師には多くのことを指導していただきました。研究で行き詰まった際には、何度も部屋に行き、質問させていただきました。また、プライベートのことも相談させていただき、心より感謝申し上げます。

野崎理教授には全体報告会や発表練習の場でご指導いただき、人に何かを伝えることの難しさと大切さを知ることができました。また、就職活動の際にエントリーシートの添削や面接練習をしていただき、心より感謝申し上げます。

超音速流班のメンバーである浅井君、岩田君、久保田君、橋爪さん、磯部君、片岡さん、竹森君、堀内君、安田君には居心地の良い空間を作ってください、楽しい時間を過ごすことができました。

同期の安部君、板谷君、佐藤君、高島君、武田君、濱崎君には、研究の相談や雑談など関わる機会が多く、プライベートの問題で苦しい時も話し相手になってくださり、感謝しています。

最後に、充実した学生生活を送らせていただいた両親に心より感謝申し上げます。