ハイブリッド非構造格子を用いた直接流束再構築法による高次精度流体解析

High-order Accurate Flow Simulation using Direct Flux Reconstruction Method On Hybrid Unstructured Grid

航空宇宙工学コース

航空エンジン超音速流研究室　1265026　岩田　雄太郎

1. 緒論

現在の航空機の設計開発ではその空力性能の評価のために数値流体力学が重要な役割を果たしている．航空機の離陸から巡行時、そして着陸までを通して求められる視点や空力性能の評価精度などは多様でありまたその用途にもよって異なるが，CFD から得られる航空機まわりの流動情報や空力係数値は非常に有用で，多彩な情報源ともなる．そういった解析を実現するための手段の一つとして，複雑な航空機形状へ非常に柔軟に対応可能な非構造計算格子と，実運用可能な演算量メモリ量に抑えた高次精度計算手法の組み合わせが有効である．機体形状に適合するための三角形表面格子と壁面近傍の境界層流れの解像のため非常に細かい層状の四角形格子によって航空機近傍を解く．また機体と干渉したことで周囲に誘起される様々なスケールを持つ流動の解析も重要となる．

従来用いられてきた非構造格子有限体積法では隣接セルの情報を用いてセル境界の流束を再構築するためで定式通りの高次精度化は難しい．その一方，Discontinuous Galerkin（DG）法[1]が提案されてきた．セル内に自由度と基底関数を導入し，その線形和からセル内の保存量分布を構築する．セル境界の流束は保存量分布から求めるため、コンパクトな計算手法である．しかし，DG 法は自由度毎に時間積分を行うため計算コストが著しく増大する．

その後，セル内にノード点を導入しラグランジュ補間によって流束分布を再構築する Flux Reconstruction（FR）法[2]が提案されており，航空機の空力評価や音響問題へも適応され素晴らしい成果を示している[3][4]．この FR 法ではセル境界値の算出にあたって修正関数を用いて流束分布を再構築するが，Direct FR 法[5]では修正関数を用いずに連続な流束分布を再構築する．本研究では DFR 法を用いたハイブリッド非構造格子対応の高次精度流体計算コードの構築を目的とする．本報告では，DFR 法を四面体，プリズムセルへの拡張と移流拡散方程式を用いて精度検証と平板境界層問題を行った結果について報告する．

2. 数値計算法

2.1 支配方程式

3 次元移流拡散方程式を考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot \boldsymbol{f} = 0 \tag{1}$$

流束ベクトル$\boldsymbol{f}$は移流項と拡散項の流束に分けられ次式のように表せる．

$$\boldsymbol{f_c} = \boldsymbol{c}u \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f_v} = D\boldsymbol{\nabla_x}u \tag{3}$$

ここで $\boldsymbol{c}$ は移流速度ベクトル，D は拡散係数を表す．物理座標系（x,y,z）に生成した任意の格子を参照座標系（r,s,t）に変換する参照座標系での移流拡散方程式は次式のように与えられる．

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{1}{|\boldsymbol{J}_n|}\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}} = 0 \tag{4}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_n = |\boldsymbol{J}_n|\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{n}}^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}} \tag{5}$$

ここで，n はセルのインデックスである．座標変換のヤコビ行列は$\boldsymbol{J} = \partial(x,y,z)/\partial(r,s,t)$と定義する．また，^付きの変数は参照座標系で定義される変数である．

2.2 3 次元 DFR 法

2.2.1 移流項の離散化

六面体を使用した際の DFR 法の手順を示す．DFR 法では各セル内に Solution Point（SP）と呼ばれる内点を導入する．Figure1 に六面体の座標変換の模式図を示す．参照座標系内において式（4）のように各方向のラグランジュ多項式のテンソル積から，セル内の保存量分布を得る．

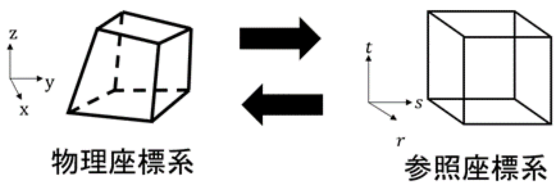


Fig.1 六面体の座標変換

$$\hat{u}_n = \sum_{i,j,k=1}^{P+1} \hat{u}_{n,i,j,k}\, l_i(r) l_j(s) l_k(t) \tag{6}$$

$$l_i(r) = \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq i}}^{P+1} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} \tag{7}$$

ここで，i,j,k は各方向の SP のインデックスを示す．本研究では SP にガウス点を用いる． P は多項式の次数を示し，各方向に P+1 個の SP を用いることで P+1 次の空間精度が得られる．

各 SP における流束の r 方向微分を計算する手順を示す．流束分布は隣接セルと分布を連続にする必要があるため，セル境界の流束を用いて再構築する．本研究では風上側の値を用いてセル境界の流束を求めた．流束の r 方向微分は次式より得られる．

$$\frac{\partial \hat{f}_{r_n}}{\partial r} = \sum_{j,k=1}^{P+1} \left\| \boldsymbol{n}_{0,j,k} \right\| f^I_{n,(0,j,k)} \frac{dl_0(r)}{dr}\, l_j(s) l_k(t) + \sum_{i,j,k=1}^{P+1} \hat{f}_{n,(i,j,k)} \frac{dl_i(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) + \sum_{j,k=1}^{P+1} \left\| \boldsymbol{n}_{P+2,j,k} \right\| f^I_{n,(p+2,j,k)} \frac{dl_{p+2}(r)}{dr}\, l_j(s) l_k(t) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{n}_{i,j,k} = \left| \boldsymbol{J}_{n,i,j,k} \right| \boldsymbol{J}^{-\boldsymbol{T}}_{n,i,j,k} \hat{\boldsymbol{n}}_{i,j,k} \tag{9}$$

ここで，f^Iはセル境界の流束，$\tilde{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{i,j,k}}$は参照座標系における外向き法線ベクトルを示す．$s,t$ 方向微分も同様の手順で求められる．

四面体では Fig.2 に示すような参照座標系に変換し，参照座標系内において次式のようにラグランジュ多項式を用いることで，セル内の保存量分布を得る(6, 7).

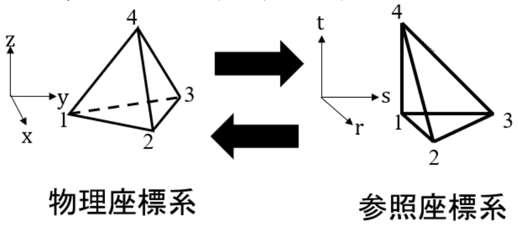


Fig.2 四面体の座標変換

$$\hat{u}_n = \sum_{j}^{N_{SP}} \hat{u}_{n,j} L_j(r,s,t) \tag{10}$$

ここで，j は SP のインデックス，N_{SP}はセル内の SP の総数，L_jは 3 次元ラグランジュ多項式である．四面体内の SP は Shunn らが導出した求積点(8)を使用する．四面体セル内には $(P+1)(P+2)(P+3)/6$ 個の SP を持ち，P 次の近似多項式から空間 P+1 次精度が得られる．

次に移流項の計算手順を示す．流束分布の再構築には，Raviart-Thomas（RT）基底関数ベクトル$\boldsymbol{\psi_k}$(9) を使用する．流束分布の発散は次式で与えられる．

$$\boldsymbol{\nabla_r} \cdot \hat{\boldsymbol{f}}_n = \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\boldsymbol{\nabla_r} \cdot \boldsymbol{\psi_k}) \tag{11}$$

$$f_k = \begin{cases} \left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{f}_{n,j} \cdot \boldsymbol{e}_r & k \le N_{sp} \\ \left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{f}_{n,j} \cdot \boldsymbol{e}_s & N_s < k \le 2N_{sp} \\ \left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{f}_{n,j} \cdot \boldsymbol{e}_t & 2\,N_{sp} < k \le 3N_{sp} \\ \left\|n_k\right\| f^I_k & k > 3N_{sp} \end{cases} \tag{12}$$

ここで，N_{RT}^{tet}は RT 基底関数ベクトルの数を表し $(P+2)(P+3)(P+5)/6$ 個持つ．$\boldsymbol{e}$は各方向の単位ベクトルである．

プリズムセルは，Fig.3 に示すような参照座標系へ変換し，保存量分布と流束分布の再構築を行う．セル内の保存量分布は次式から得られる．

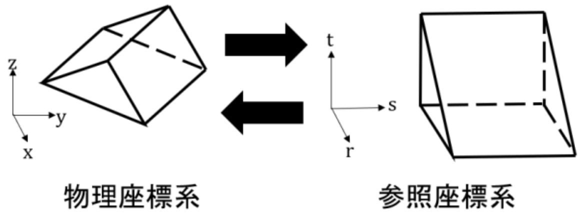


Fig.3 プリズムの座標変換

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{P+1} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \hat{u}_{n,i,j} L_j(r,t) l_i(s) \tag{13}$$

ここで，L_jは 2 次元のラグランジュ多項式，l_iは 1 次元のラグランジュ多項式である．プリズム格子内の SP は，s 方向に P+1 個のガウス点位置に Willian らが導出した三角形の求積点(10)を用いる．流束分布の再構築は，r,t 方向は RT 基底関数，s 方向はラグランジュ補間より再構築する．

$$\frac{\partial \hat{f}_{r\,n}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{f}_{s\,n}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tri}} f_{i,k} \left(\frac{\partial \psi_{r\,k}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{t\,k}}{\partial t} \right) \tag{14}$$

$$f_{i,k} = \begin{cases} \left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{f}_{n,j} \cdot \boldsymbol{e}_r & k \le N_{tri} \\ \left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{f}_{n,j} \cdot \boldsymbol{e}_t & N_{tri} < k \le 2N_{tri} \\ \left\|n_k\right\| f^I_k & k > 2N_{tri} \end{cases} \tag{15}$$

$$\frac{\partial \hat{f_s}}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N_{tri}} \left\{ \left\| \boldsymbol{n}_{i,0} \right\| f^I_{i,0} \frac{dl_0(s)}{ds} + \sum_{j=1}^{P+1} \hat{f}_{i,j} \frac{dl_i(s)}{ds} + \left\| \boldsymbol{n}_{i,P+2} \right\| f^I_{i,P+2} \frac{dl_{P+2}(s)}{ds} \right\} \tag{16}$$

2.2.2 拡散項の離散化

六面体での拡散項の計算手順を示す．保存量 u の r 方向微分の計算手順を示す．保存量分布を隣接セルと連続にする必要があるため，セル境界の保存量を用いて再構築する．保存量の r 方向微分は式（8）と同様の手順で求められる．s,t 方向微分も同様の手順で求められる．物理座標系への変換は次式の通りである．

$$\nabla_x u_{n,i,j,k} = \boldsymbol{J}^{-\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{n,i,j,k}} \nabla_r u_{n,i,j,k} \tag{17}$$

求めた保存量の勾配はラグランジュ補間を用いてセル内の分布を構築する．r 方向のみ示す．

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = \sum_{i=1}^{P+1} \frac{\partial \hat{u}_{n,i,j,k}}{\partial x} l_i(r) l_j(s) l_k(t) \tag{18}$$

四面体での拡散項の計算手順を示す．x 方向の保存量勾配はセル境界の値を用いて次式のように計算できる．

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{1}{\left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right|} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\boldsymbol{r})) \tag{19}$$

$$f_k = \begin{cases} \left(\left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{u}_{n,j}\right) \cdot \boldsymbol{e_r} & k \le N_s \\ \left(\left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{u}_{n,j}\right) \cdot \boldsymbol{e}_s & N_s < k \le 2N_s \\ \left(\left|\boldsymbol{J}_{n,k}\right| \boldsymbol{J}^{-1}_{n,k} \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{u}_{n,j}\right) \cdot \boldsymbol{e}_t 2N_s < & k > 3N_s \\ \left\|n_k\right\| f^I_k & k > 3N_s \end{cases} \tag{20}$$

$$f^I_k = \boldsymbol{e}_x u^I_{n,k} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_k \tag{21}$$

ここで，$\boldsymbol{e_x}$は x 方向の単位ベクトル，$u^I_{n,k}$はセル境界面の保存量である．y,z 方向は式（20）の単位ベクトルを y,z 方向にすることで計算できる．保存量勾配はラグランジュ補間を用いてセル内分布を構築する．

$$\nabla_x \hat{u}_n = \sum_{j}^{N_{SP}} \nabla_x \hat{u}_{n,j} L_j(r,s,t) \tag{22}$$

プリズム格子の拡散項の計算手順は三角形面の保存量勾配は式（19）~（21），三角形の押し出し方向は（8）と同様である．

セル境界面の拡散流束は BR2 法[11]を用いて求める． セル境界面の粘性流束f^Iは次式のように表現できる．

$$\hat{f}_v^I = \hat{A}_v \nabla_r u^I + \eta_e \hat{\delta}^I \tag{23}$$

ここで，δはリフティング演算子，η_eは安定化係数を表している．拡散流束は次のように与えられる．

$$A_v \nabla_x u^I = \begin{cases} \dfrac{(A_v \nabla_x u \cdot \boldsymbol{n})^- - (A_v \nabla_x u \cdot \boldsymbol{n})^+}{2} & (\mathrm{On}\ \partial\Omega_i) \\ (A_v \nabla_x u \cdot \boldsymbol{n})^- & (\mathrm{On}\ \partial\Omega_b) \end{cases} \tag{24}$$

法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，$\boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{n}^+$であるため，自セルと隣接セルの平均値をとる．またリフティング演算子は，

$$\hat{\delta} = \hat{A}_v^T \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} (u^I - u^-) \tag{25}$$

と与えられる．セル境界面のリフティング演算子も同様に隣接セルとの平均値をとる．SP とセル境界の拡散流束を用いて隣接セルと連続な拡散流束を再構築する．再構築の手順は移流項と同様である．

以上より， DFR 法の半離散式は以下のようになる．

・六面体

$$\frac{du_{n,(i,j,k)}}{dt} + \frac{1}{|\boldsymbol{J}_n|}\left(\frac{\partial \hat{f}_{r_n,(i,j,k)}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{f}_{s_n,(i,j,k)}}{\partial s} + \frac{\partial \hat{f}_{t_n,(i,j,k)}}{\partial t}\right) = 0 \tag{26}$$

・四面体

$$\frac{du_{n,i}}{dt} + \frac{1}{|\boldsymbol{J}_n|}\sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\psi}_k (\boldsymbol{r}_i)) = 0 \tag{27}$$

・プリズム

$$\frac{du_{n,i,j}}{dt} + \frac{1}{|\boldsymbol{J}_{n,i,j}|}\sum_{i=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{N_{RT}^{tri}} f_{i,k}\left(\frac{\partial \psi(r_{i,j})_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi(t_{i,j})_k}{\partial t}\right) + \frac{\partial \hat{f}_{s,(i,j)}}{\partial s} \tag{28}$$

時間積分は TVD3 次精度ルンゲクッタ法を用いる．

3. DFR 計算コード検証

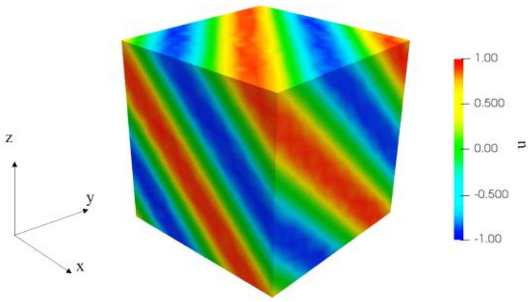
3.1 3 次元線形移流問題

3 次元移流問題を計算し厳密解との比較および空間精度の検証を行う．．計算領域は$0 \leq x, y, z \leq 1$の立方体とする．計算格子は計算領域を各方向に 20 分割した六面体格子とし，さらに四面体，プリズムに分割する．．また，格子アスペクト比（AR）の影響を検証するため，z 方向に 1/1000 に圧縮した格子も用いる．計算条件は table 1 の通りである．

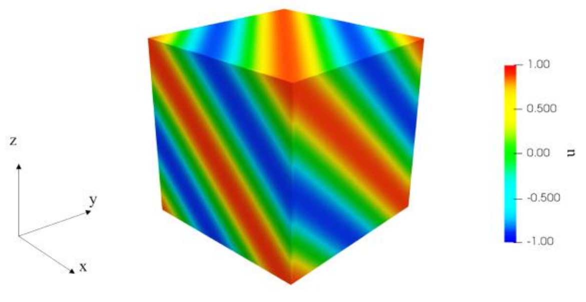
Table 1

境界条件	周期境界
移流速度	$\sqrt{3}$
初期条件	$u_{init} = \sin(2\pi(x+y+z))$
クーラン数	0.1
ステップ数	1000

まず，Fig.5 に四面体，プリズムを使用した際の計算結果の図を示す．格子アスペクト比 AR=1 とし，各方向 20 分割である．どの格子形状でも正弦波の移流が発散することなく解けていることが確認できた．



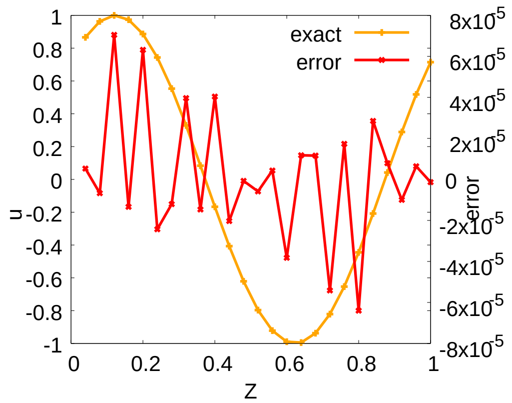
(a) 四面体



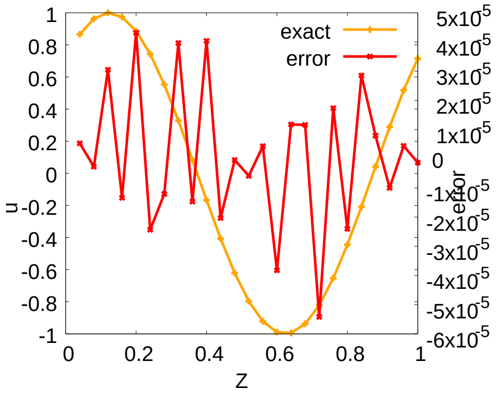
(b) プリズム

Fig. 4 計算結果

上図の結果に関して，Fig. 5 に厳密解との比較結果を示す．左縦軸が厳密解を右軸は数値解との局所誤差を表す．流れの z 方向中心軸 x=y=0.5 を横軸とし，格子数は各方向に 20 分割である．



(a) 四面体



(b) プリズム

Fig. 5 厳密解と誤差の関係（線形移流問題）

Fig. 6 にアスペクト比 1 のときの自由度と誤差 L2 ノルムの関係を示す．ハイブリッド格子では，z<0.をプリズムそれ以外を四面体で埋めた．すべての格子形状でおおよそ 4 次精度となることが確認できた．またハイブリッド格子のみ誤差が誤差の増加が見て取れるが，格子境目に誤差要因がないか現在検討している．

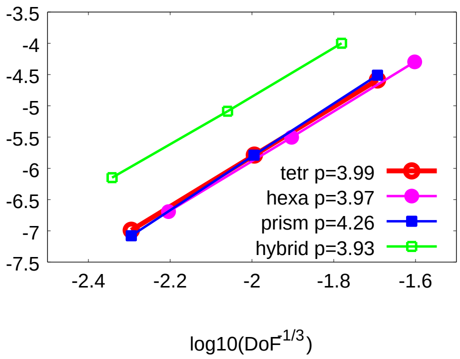


Fig. 6 自由度と誤差の関係（AR=1）

格子アスペクト比 AR=1000 の際の結果を示す．まずプリズム格子の場合は空間精度，誤差ともにアスペクト比 1 と同等となった．一方，四面体格子では，誤差が大きくなっている．空間精度も所定の 4 次に達しなかった．アスペクト比 1000 での四面体の精度低下は，RT 基底関数ベクトルの性質を含め，今後検討する必要がある．ただし，実際の航空機の空力評価では高 AR 四面体格子の生成を抑制すべきと考える．

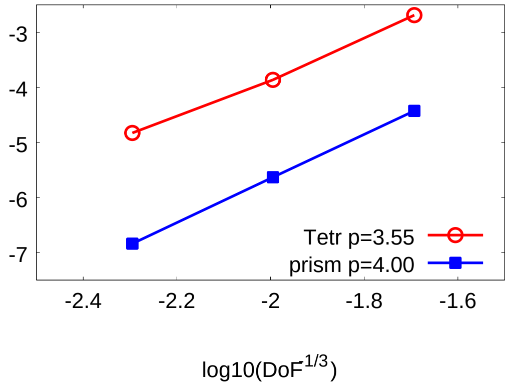
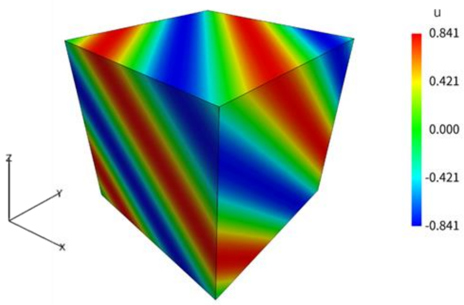


Fig. 7 自由度と誤差の関係（AR=1000）

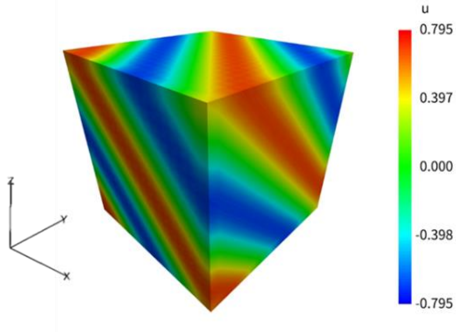
3.2　3 次元移流拡散問題

3 次元移流拡散問題に対して厳密解との誤差と空間精度を求めた．拡散係数 D は 0.01 とした．計算格子は前節の AR=1 の格子を使用し，計算条件は table 1 と同様である．

Fig. 8 に四面体，プリズムを使用した際の計算結果の図を示す．どちらの格子形状でも正弦波の移流が発散することなく解けていることが確認できた．



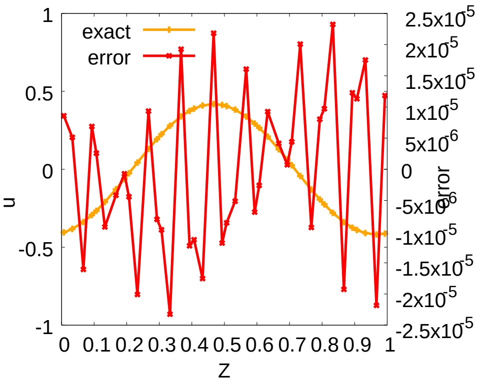
(a)　四面体



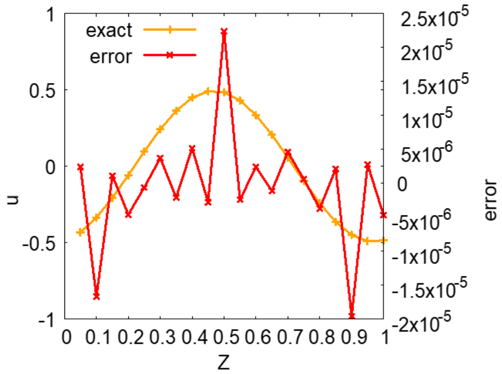
(b)　プリズム

Fig. 8 移流拡散問題の計算結果

上図の結果に関して，Fig. 9 に厳密解との比較結果を示す．．四面体，プリズムともに誤差は-5 乗のオーダーに収まっていることが確認できた．



(a)　四面体



(b)　プリズム

Fig. 9 厳密解と誤差の関係（移流拡散問題）

Fig. 10 自由度と誤差 L2 ノルムの関係を示す．すべての格子形状でおおよそ 4 次精度となることが確認できた．

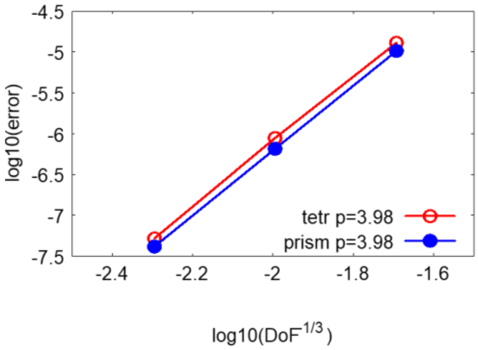


Fig.10　自由度と誤差の関係（移流拡散問題）

3.3　平板境界層問題

移流拡散問題の DFR コードを用いて平板境界層問題に取

り組む．計算条件は table 2 に示す通りである．計算格子は Fig. 13 に示すように壁面付近にプリズム格子，それ以外に四面体格子を配置した. 流入境界は x=0 の面, 周期境界は z=0, 0.05 の面，壁面境界は y=0 における $x\geq0$ の面，滑りあり境界を y=0 における x<0 の面，それ以外の面を流出境界とした．

Table 2 境界層問題の計算条件

格子数	18262
計算領域	$-2 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 0.05$
初期条件	x 方向速度：10 y,z 方向速度：0
最小格子幅	10^{-4}
クーラン数	0.01
拡張係数	0.0001
安定化係数	10

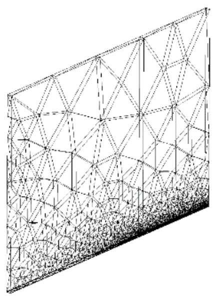


Fig. 11 計算格子（平板境界層問題）

Fig. 12 に x=0.3, 0.5, 0.9 位置における x 方向の速度分布とブラジウス解との比較の図を示す．横軸は主流速度U_{inf}との速度比で，縦軸は$eta = y\sqrt{\frac{U_{inf}}{Dx}}$である．どの位置でもブラジウス解とおおよそ一致していることが確認できた．

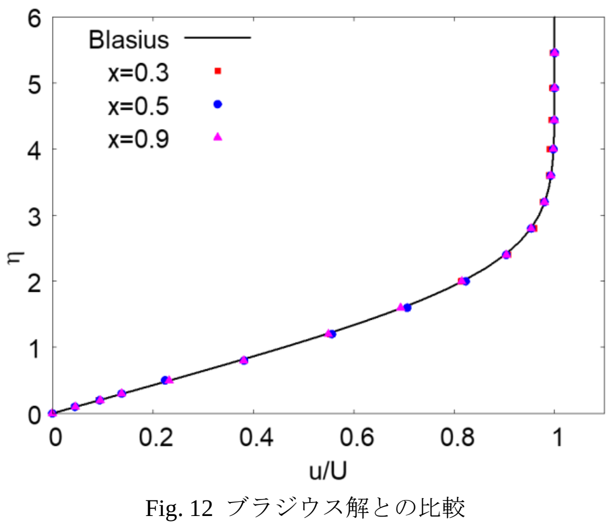


Fig. 12 ブラジウス解との比較

4. 結言

ハイブリッド非構造格子対応の DFR 計算コードを構築し，線形移流問題，移流拡散問題と平板境界層問題を解いた．線形移流問題，移流拡散問題では，誤差は十分小さく空間精度も定式通り得られた．しかし，線形移流問題で格子アスペクト比 1000 の四面体格子を使用した際, 空間精度が低下した．平板境界層問題では，速度分布がブラジウス解とおおよそ一致していることが確認できた．

参考文献

(1) Cockburn, B., Shu, C-W., “TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: Multi-dimensional Systems”, Journal of Computational Physic, Vol. 141. (1989), pp. 199-244.

(2) Huynh, H. T., “A Flux reconstruction Approach to High-order Schemes Including Discontinuous Galerkin Methods”, AIAA Paper 2007-4079, (2007).

(3) Haga, T., Kawai, K., “On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method”, Journal of Computational Physics, Vol. 376, 2019, pp. 534-563

(4) Haga, T., Kawai, S., “Large-Eddy Simulation of Supersonic Jet using High-Order Flux reconstruction”, AIAA Paper2015-0831, (2015)

(5) Huynh, H. T., “Discontinuous Galerkin via Interpolation: The Direct Flux Reconstruction Method,” AIAA Paper 2019-3064, (2019).

(6) Romero, J., Witherden, F. D., Jameson, A., “A Direct Flux Reconstruction Scheme for Advection–Diffusion Problems on Triangular Grids”, Journal of Scientific Computing, Vol. 73, Issue 2-3, December (2017), pp. 1115-1144.

(7) Romero, J., ”On The Development of The Direct Flux Reconstruction Scheme for High-order Fluid Flow Simulation”, Ph.D thesis, Stanford University, (2017)

(8) Shunn, L., Ham, F., “Symmetric Quadrature Rules for Tetrahedra Based on A Cubic Close-packed Lattice Arrangement”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol,236 No. (17), (2012), pp. 4348 – 4364.

(9) Raviart, P. A., Thomas, J. H., ” A mixed hybrid _Finite element method for the second order elliptic problems” Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lectures Notes in Mathematics, (1977).

(10) Williams, D., Shunn, L., Jameson, A., “Symmetric quadrature rules for simplexes based on sphere close packed lattice arrangements”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 266:18–38, (2014).

(11) Bassi, F., Rebay, S., “GMRES Discontinuous Galerkin Solution of the Compressible Navier-Stokes Equation”, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Vol. 11 Discontinuous Galerkin Method, (2000), pp. 197-208