

卒業論文要旨

二重吊台上のメトロノームの同期現象

Synchronization of Two Metronomes on Double Hanging Plates

システム工学群

人工知能システム論研究室 1250140 福留 雅斗

1. はじめに

同期現象とは、複数の振動子が相互作用し、その振動数が徐々に揃っていく現象のことである。こうした現象は生物学や物理学など様々な分野で見られ⁽¹⁾、興味深い現象として以前から研究がなされている。

同期現象が観察できる例として、メトロノームが挙げられる。メトロノームの同期現象とは、ある構造体に設置された複数のメトロノームが構造体を介して相互作用し、針の振動数が徐々に揃うというものである。

文献⁽²⁾では、吊り下げられた台の上に設置された2台のメトロノームの同期現象を考え、同期時のメトロノームの針の振舞いを理論的に解析する問題を検討した。一方、ここでは、二重に吊り下げられた「2つの台」にメトロノームを1台ずつ設置することを考える。この場合、2台のメトロノームは同じ台を介しておらず、台が1つの場合に比べて、メトロノームが互いに及ぼす影響は小さいと予想される。それゆえ、同期現象が発生するかは自明ではない。

そこで本研究では、この二重吊台上の2台のメトロノームを対象に、同期現象が発生するかを調べ、発生した場合はそれを理論的に解析することを目的とする。

記法： $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ はそれぞれ実数、正の実数、複素数の集合を表す。虚数単位を j と記す。複素数 z に対し、 $\angle(z)$ は z の偏角を表す。関数 $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[f(t)]$ と表記する。

2. 同期現象の観察

二重吊台上のメトロノームが同期するかをシミュレーションと実験によって検証する。

二重吊台上の2台のメトロノームを図1のようにモデル化する。ここで、振子がメトロノームに対応する。このモデルの運動方程式を導出すると、

$$M(\varphi(t))\ddot{\varphi}(t) + C(\varphi(t), \dot{\varphi}(t))\dot{\varphi}(t) + G(\varphi(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tau_1(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_2(t)) \\ \tau_2(\varphi_1(t), \dot{\varphi}_2(t)) \end{bmatrix} \quad (1)$$

が得られる。ここで、 $\varphi(t) := [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \varphi_3(t) \ \varphi_4(t)]^T$ であり、 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbb{R}$ は振子の角度、 $\varphi_3(t), \varphi_4(t) \in \mathbb{R}$ は吊台の紐の角度を表す。また、 $M(\varphi(t)), C(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ と $G(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^4$ はそれぞれある行列とベクトルである。 $\tau_i(t) \in \mathbb{R}$ は振子 i ($i \in \{1, 2\}$)にかかるトルクを表し、次式で記述される⁽²⁾。

$$\tau(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t)) := \begin{cases} \delta & \text{if } 0 < \varphi_i(t) < \gamma, \dot{\varphi}_i(t) > 0 \\ -\delta & \text{if } -\gamma < \varphi_i(t) < 0, \dot{\varphi}_i(t) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $\delta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ はある正の定数である。式(2)は、振子が真

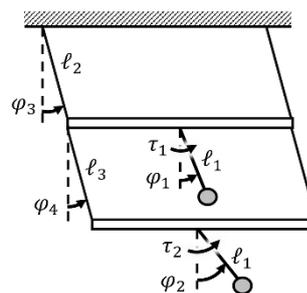


Fig. 1 Model of two metronomes on double hanging plates

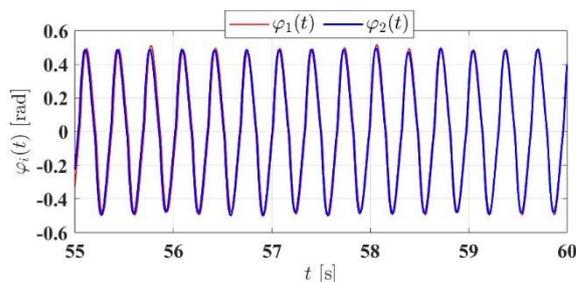


Fig. 2 Time evolution of $\varphi_1(t)$ and $\varphi_2(t)$

下を通過した直後に、その運動を加速させるようなトルクが加わることを意味する。

式(1), (2)を用いてシミュレーションを行う。モデルのパラメータの値は文献⁽³⁾のものを参考に選んだ。シミュレーション結果の一例として、 $t \in [55, 60]$ における振子の角度 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ の時間変化を図2に示す。ここで、初期条件は $\varphi(0) := [-0.785 \ 1.507 \ 0 \ 0]^T$, $\dot{\varphi}(0) := [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ である。図2を見ると、一定時間経過後では、2つの振子が同じ周波数で振動しており、同期現象が起きていることがわかる。

つぎに、実験検証を行うために、図3の実験装置を製作した。これは板を紐で吊るし、そこにメトロノームを設置したものである。板は長さ300mm、幅200mmのステンレス板であり、メトロノームは日工精機株式会社の331型である。この装置を用いた実験の結果、同期現象が見られた。

3. 同期現象の解析

二重吊台上の2台のメトロノームが同期することが確認されたため、同期時のメトロノームの針の振舞いを解析する。

3.1 問題設定

図1のモデルに対し、振子の振動周波数 $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$ が共通の値に収束するとき、振子が同期すると定める。本研究で



Fig. 3 Experimental system

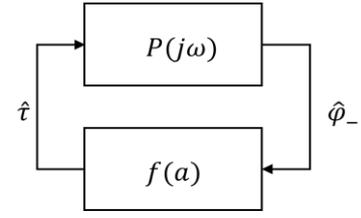


Fig. 4 Feedback system

$$\theta_d = \angle \left(\frac{1}{2P_{12}(j\omega)} \left(P_{22}(j\omega) - P_{11}(j\omega) \pm \left((P_{11}(j\omega) - P_{22}(j\omega))^2 + 4P_{12}^2(j\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (5)$$

は、同期時の振子の振幅が同じであると仮定し、同期時の2つの振子の振幅、振動周波数、位相差を求める問題を考える。より具体的には、同期時の振子 i ($i \in \{1,2\}$)の振舞いが振幅 a 、振動周波数 ω 、位相 θ_i を用いて、 $\varphi_i(t) = a \sin(\omega t + \theta_i)$ で表されると仮定し、式(1),(2)から a 、 ω と位相差 $\theta_d := \theta_2 - \theta_1$ を求める問題を考える。

3.2 記述関数法による解析

この解析問題の難しさは、式(2)に示されるように、トルク $\tau_i(t)$ ($i \in \{1,2\}$)が不連続な関数として表されることにある。そこで本研究では、文献⁽²⁾で提案された、記述関数法を用いた解析を行う。

$i \in \{1,2\}$ に対し $\theta_i = 0$ とすると、振子 i の振舞いとして $\varphi_i(t) = a \sin(\omega t)$ を得る。このとき、式(2)の不連続関数 $\tau_i(\varphi_i(t), \dot{\varphi}_i(t))$ ($i \in \{1,2\}$)に対する記述関数 f は

$$f(a) := \begin{cases} \frac{2\delta(a - \sqrt{a^2 - \gamma^2})}{\pi a^2} + \frac{2\delta\gamma}{\pi a^2}j & \text{if } a \geq \gamma \\ \frac{2\delta}{\pi a} + \frac{2\delta}{\pi a}j & \text{if } a < \gamma \end{cases} \quad (3)$$

で与えられる⁽²⁾。記述関数 $f(a)$ を用いて、 $\tau_i(\varphi(t), \dot{\varphi}_i(t))$ ($i \in \{1,2\}$)をある正弦波関数によって近似する。つぎに、式(1)の運動方程式を真下平衡点 $[\varphi^T \ \dot{\varphi}^T]^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 近傍で線形化し、 $\tau(t) := [\tau_1(t) \ \tau_2(t)]^T$ 、 $\varphi_-(t) := [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t)]^T$ として、 $\mathcal{L}[\tau(t)]$ から $\mathcal{L}[\varphi_-(t)]$ までの伝達関数行列 $P(s) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ を求める。得られた $P(s)$ と式(3)の $f(a)$ を用いて、図4のフィードバック系を構成する。ここで、 $\hat{t}, \hat{\varphi}_- \in \mathbb{C}^2$ はそれぞれ $\tau(t), \varphi_-(t)$ のフェーザ表示である。図4のシステムは図1のモデルを周波数領域で近似したものである。それゆえ、このシステムの解として適当な (a, ω, θ_d) が存在すれば、それは解析問題の解になると考えられる。

本研究では、図4のシステムに関して、つぎの結果を得た。

定理 1: 図4のフィードバック系の解となる (a, ω, θ_d) に対し、 a と ω は以下の式を満たす。

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{2} \left(P_{11}(j\omega) + P_{22}(j\omega) \pm \left((P_{11}(j\omega) - P_{22}(j\omega))^2 + 4P_{12}^2(j\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4)$$

ここで、 $P_{ik}(j\omega)$ は伝達関数行列 $P(j\omega)$ の (i,k) 要素である。さらに、 θ_d は次式で与えられる。

ただし、式(4),(5)は複号同順である。

定理 1 より、式(4)を解いて式(5)を用いれば、同期時の振子の振舞いを解析できる。

得られた結果の有効性を数値例により検証する。図1のモデルに対し、パラメータの値を2章のものと同様に設定する。図的解法により、式(4)を満たす (a, ω) を求めると、 $(0.482, 20.037)$ と $(0.481, 20.093)$ が得られる。これらと式(5)を組み合わせると、同期の形態の候補として、 $(a, \omega, \theta_d) := (0.482, 20.037, -3.127), (0.481, 20.093, -0.014)$ が得られる。この解析結果とシミュレーション結果を比較したものを表1に示す。ここで、 a_i, ω_i ($i \in \{1,2\}$)はそれぞれ振子 i の振幅と周波数である。解析結果はシミュレーション結果に概ね近く、定理 1 によって同期時の振子の振舞いを予測できることが確認できる。

Table 1 Analysis and simulation results

	Type 1		Type 2	
	Analysis	Sim.	Analysis	Sim.
a_1 [rad]	0.482	0.477	0.481	0.485
a_2 [rad]	0.482	0.476	0.481	0.488
ω_1 [rad/s]	20.037	19.274	20.093	19.209
ω_2 [rad/s]	20.037	19.393	20.093	19.144
θ_d [rad]	-3.127	-3.692	-0.014	-0.112

4. おわりに

本研究では、二重吊台上のメトロノームの同期現象について議論した。まず、同期現象が起こることをシミュレーションと実機実験により確認した。その後、同期時のメトロノームの針の振舞いを、記述関数法を用いて解析した。

参考文献

- (1) H. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, 2003.
- (2) Y. Muraoka, X. Xin, S. Izumi, T. Yamasaki. Analysis of synchronization of two metronomes hanging from a plate via describing function approach, *Proceedings of the 35th Chinese Control Conference*, pp. 1110–1115, 2016.
- (3) 泉, 鴻上, 欣, 山崎. 吊台上のメトロノームの同期現象: モデルパラメータの同定と実験検証, システム制御情報学会論文誌, Vol. 31, No. 11, pp. 400–402, 2018.