

卒業論文要旨

直接流束再構築法による非構造高次精度流体計算コード構築

システム工学群

航空エンジン超音速流研究室 1250176 結縁 千晶

1. 研究背景

近年, 航空機の設計開発での空力性能評価において, 数値流体力学が多用されている. 航空機まわりのように複雑な形状をもつ空間での流体計算では, あらゆる形状に適合する非構造格子を用いた高次精度計算手法が求められる. 現在使われている計算法の一つに有限体積法が挙げられる. 有限体積法は格子形状に依らず厳密に保存則を遵守し, 比較的計算コストが低いという利点をもつ. しかし, この手法は隣り合う格子情報をもとに格子境界上の流束を再構築するため, 計算精度が格子の品質に依存し定式通りの精度を保つのが困難である. また, 高次精度化にはより多くのステンシルが必要となり, 並列化計算には不向きである.

このような問題に対し, 格子内に自由度を与え, ラグランジュ補間により連続な流束分布を再構築する直接流束再構築法⁽¹⁾ (Direct Flux Reconstruction method, 以下 DFR 法) が提案された. DFR 法では, セル内部に複数のデータ点 (Solution Point 以下 SP) を配置し, SP がもつ物理量でセル内部の流束分布を構築する. 次に構築したセル内部の流束分布からセル境界上の流束を求め, SP での流束分布と境界上の流束から計算領域全体で連続した流束分布を再構築する. 再構築した流束分布には不連続点が存在しないため, 微分方程式である保存則を解くことができ, K 個の SP で $2K-2$ 次の空間精度が得られる. 加えて, 計算には自セルと隣接セルの情報のみで高次精度化が可能となり, かつ並列計算の通信コストを抑えられる手法である.

本研究では, 非構造格子と DFR 法を用いた三次元の流体計算コードを構築し, 平板境界層問題を解くことで計算コードを検証する.

2. 数値計算法

2.1 支配方程式

支配方程式を用いて 3 次元平板境界層問題を解く. 説明の簡略化の為, 1 次元移流拡散方程式で考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

流束ベクトル \mathbf{f} は移流項と拡散項の流束に分けられ次式のように表せる.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_c &= \mathbf{c}u \\ \mathbf{f}_v &= D\nabla_x u \end{aligned} \quad (2) \quad (3)$$

ここで \mathbf{c} は移流速度ベクトル, D は拡散係数を表す.

2.2 3次元 DFR 法

2.2.1 移流項の離散化

図 1 のように四面体格子内に求積点を用いて, $(P+1)(P+2)(P+3)/6$ 個の SP を配置し, P 次のラグランジュ近似的多項式より $P+1$ 次の空間精度を得る. また, 図 1 は 4 次精度の場合の SP の配置を示す.

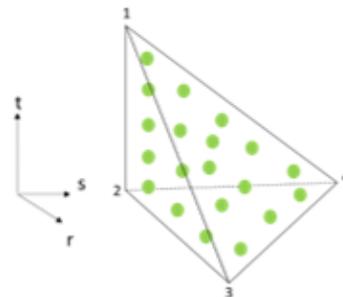


Fig.1 Tetra grid and solution point

移流項の計算手順を示す. Raviart-Thomas (RT) 基底関数ベクトル⁽²⁾ $\boldsymbol{\psi}_k$ を用いて, 四面体格子内の流束分布を再構築する. 移流項の流束分布の発散は式 (4) で与えられる. また, 式 (5) は各方向の流束と境界面の流束を示す. なお, 座標変換のヤコビ行列は $\mathbf{J} = \partial(x, y, z)/\partial(r, s, t)$ とし, \wedge 付きの変数は参照座標系で定義される変数である.

$$\nabla_r \cdot \hat{\mathbf{f}}_n = \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla_r \cdot \boldsymbol{\psi}_k) \quad (4)$$

$$\mathbf{f}_k = \begin{cases} |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_r & k \leq N_{sp} \\ |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_s & N_{sp} < k \leq 2N_{sp} \\ |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_t & 2N_{sp} < k \leq 3N_{sp} \\ \|n_k\| f_k^l & k > 3N_{sp} \end{cases} \quad (5)$$

ここで, j は SP のインデックス, N_{sp} はセル内の SP の総数を示す. N_{RT}^{tet} は RT 基底関数ベクトルの数を表し $(P+2)(P+3)(P+5)/6$ 個持つ. \mathbf{e} は各方向の単位ベクトルである. また, 流束ベクトル \mathbf{f}_n は式 (2) の \mathbf{f}_c に相当する.

2.2.2 拡散項の離散化

四面体での拡散項の計算手順を示す. x 方向の保存量勾配はセル境界の値を用いて次式のように計算できる. 拡散項の流束の発散は式 (6) で与えられ, 式 (7) は式 (5) と同様である. また, \mathbf{f}_k^l はセル境界面の共通流束を示し, \mathbf{f}_k は式 (3) の \mathbf{f}_v と同等である.

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{1}{|J_{n,k}|} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r})) \quad (6)$$

$$f_k = \begin{cases} (J_{n,k}|J_{n,k}^{-1}e_x \cdot u_{n,j}) \cdot e_r & k \leq N_{sp} \\ (J_{n,k}|J_{n,k}^{-1}e_x \cdot u_{n,j}) \cdot e_s & N_{sp} < k \leq 2N_{sp} \\ (J_{n,k}|J_{n,k}^{-1}e_x \cdot u_{n,j}) \cdot e_t & 2N_{sp} < k \leq 3N_{sp} \\ \|n_k\|f_k^l & k > 3N_{sp} \end{cases} \quad (7)$$

$$f_k^l = e_x u_{n,k}^l \cdot \hat{n}_k \quad (8)$$

ここで、 $u_{n,k}^l$ はセル境界面の保存量である。ラグランジュ多項式 L_j を用いてセル内の保存量分布を構築する。

$$\nabla_x \hat{u}_n = \sum_j^{N_{sp}} \nabla_x \hat{u}_{n,j} L_j(r, s, t) \quad (9)$$

SP とセル境界の拡散流束を用いて隣接セルと連続な拡散流束を再構築する。以上より、DFR法の半離散式は以下のようになる。

$$\frac{du_{n,j}}{dt} + \frac{1}{|J_n|} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla \cdot \psi_k(r_j)) = 0 \quad (10)$$

時間積分は TVD3 次精度ルンゲクッタ法を用いる。

3. 計算結果と考察

3.1 平板境界層問題によるコード検証

4 次精度 DFR コードを用いて平板境界層問題に取り組む。計算条件は表 1 に示す通りである。

Number of grids	33200
Computational domain	$-2 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 2$ $0 \leq z \leq 0.05$
Initial conditions	x -direction velocity :10 y, z -direction velocity :0
Minimum grid width	10^{-4}
CFL number	0.01
Diffusion coefficient	0.0001
Reynolds number	2.0×10^5

計算格子は図 2 に示すように壁面付近にプリズム格子⁽³⁾、それ以外に四面体格子を配置し、ハイブリッド非構造格子とした。図 3 に壁面近傍の計算格子の拡大図を示す。

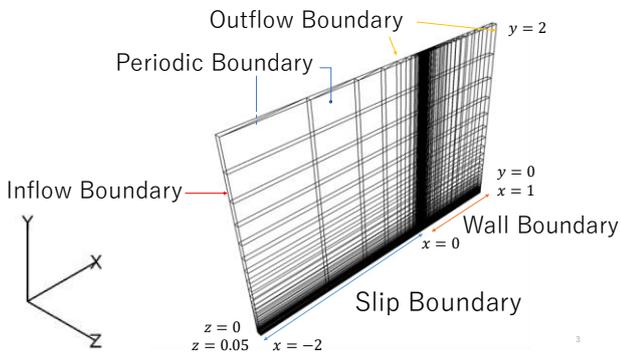


Fig .2 Entire computational grid and each boundary condition

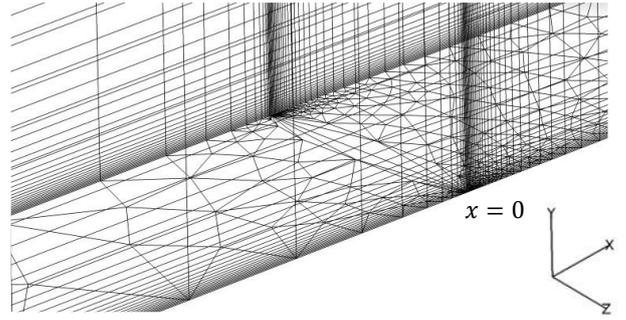


Fig .3 Enlarged view of the area near the wall

4. まとめ

非構造格子に対応する DFR 計算コードを構築し、平板境界層問題を解いた。

参考文献

- (1) J. Romero, K. Astana, and A. Jameson, “Simplified formulation of the flux reconstruction method”, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 67, (2016), pp. 351-374
- (2) Raviart, P. A., Thomas, J. H. “A mixed hybrid Finite element method for the second order elliptic problems” *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lectures Notes in Mathematics, (1977).
- (3) 岩田雄太郎 “ハイブリッド非構造格子を用いた直接流束再構築法による高精度流体解析”, 高知工科大学大学院 航空宇宙工学コース 修士学位論文,(2024)