

D³X の色付き厳密被覆問題への拡張

1250371 松本 吏司 【 アルゴリズム研究室 】

1 はじめに

色付き厳密被覆問題は制約充足問題を包含する問題であり、スケジューリングやワードサーチ、グラフ彩色などの幅広い問題を比較的簡単に記述できる。しかし、定式化した際のインスタンスの大きさが巨大になる場合がある。厳密被覆問題に対してはインスタンスを圧縮し、その表現上で探索を行う手法が存在する。本稿では、XC に対するこの手法を拡張して、XCC へ対応させたデータ構造及びアルゴリズムを提案する。

2 色付き厳密被覆問題

厳密被覆問題 (Exact Cover, XC) は、アイテム集合 U と U の冪集合の部分集合であるオプション集合 $\mathcal{F}$ に対し、 U の分割となる $\mathcal{F}$ の部分集合を求める問題である。

Knuth はこれを拡張した色付き厳密被覆問題 (Exact Covering with Colors, XCC) を示している。アイテム集合 U をプライマリアイテムの集合 U_P とセカンダリアイテムの集合 U_S に分割して、セカンダリアイテムに対して色と呼ばれる属性を新たに付与している。各プライマリアイテムは、XC と同様に丁度一度被覆しなければならない、各セカンダリアイテムは、高々一度被覆してよい。ただし、セカンダリアイテムに色が付けられている場合、同じ色であれば重複して被覆できる。

下記の例では、 $\{a, b, y\}, \{c, x, B\}$ の組合せが解となる。

$$\begin{aligned} U_P &= \{a, b, c\}, U_S = \{x, y\}, \\ \mathcal{F} &= \{\{a, x: A\}, \{a, b, y\}, \{a, c, x, y: A\}, \\ &\quad \{b, x: A, y: B\}, \{b, c, x: B, y: A\}, \\ &\quad \{c, x: B\}, \{c, y\}\}. \end{aligned} \quad (1)$$

3 アルゴリズム D³X

巨大な XC を扱うアルゴリズムとして、Nishino らは文献 [Nishino 21] で DanceDD と呼ばれるデータ構造とアルゴリズム D³X を示している。DanceDD は、ゼロサプレス型二分決定グラフ (Zero-Suppressed Binary Decision Diagram, ZDD) を用いて入力インスタンスを表現したものに、アイテムの被覆状況を示すノードを加え、それぞれのノードを双方向リンクで接続したデータ構造である。D³X は ZDD 上で探索を行うバックトラックアルゴリズムであり、選択したオプションが持つ各アイテムに対応するノードを ZDD から削除する事で部分問題を縮小して、探索を進める。

4 XCC への拡張

D³X は巨大な入力の XC を効率よく解くことができるが、XCC を扱うことはできないため、DanceDD と

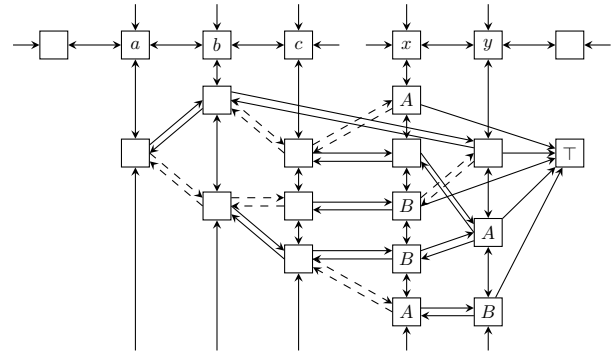


図 1 式 (1) に対応する DanceDD-C

D³X を拡張する。

初めに、XCC のインスタンスを XC と同様に ZDD で表現する。複数の色を持つセカンダリアイテムを表現するため、色ごとに異なる変数を用意する。式 (1) はプライマリアイテムが 3 個、3 種類の色を持つセカンダリアイテムが 2 個あるため、ZDD の変数の数は 9 となる。次に DanceDD を拡張した DanceDD-C を構築する。各アイテムの被覆状況を示すヘッダ部を、プライマリアイテムとセカンダリアイテムに分割し、各アイテムと対応する ZDD の変数を双方向リンクで順に接続する。この時、複数の変数に別れたセカンダリアイテムは同一のアイテムとして接続する。これにより、複数の色を単一のセカンダリアイテムで管理する。構築される DanceDD-C の例を図 1 に示す。

アルゴリズム D³C は D³X と同様に探索を進めるが、色が付いたセカンダリアイテムに対する操作が異なる。色が付いたセカンダリアイテムを削除する場合、その色と異なる色が付与されたノードについて削除操作を行う。これにより、色が同じセカンダリアイテムは重複して被覆することを許し、色が異なるセカンダリアイテムは被覆できないようにデータ構造が更新される。

5 おわりに

本稿では、アルゴリズム D³X を拡張した D³C を提案した。オプションの表現に ZDD ではなく MDD や SDD 等のデータ構造を用いることでより効率よく XCC を解く手法を考案することが今後の課題である。

参考文献

- [Nishino 21] Nishino, M., Yasuda, N., and Kengo, N.: Compressing Exact Cover Problems with Zero-suppressed Binary Decision Diagrams, in *IJCAI*, pp. 1996–2004 (2021)