

令和6年度
修士学位論文

都市集住における三種族分居モデルと相転移

Three-ethnic segregation model and phase transitions in urban
agglomeration

指導教員 全 卓樹 教授

高知工科大学 大学院 工学研究科
基盤工学専攻 環境数理コース

学籍番号 1275066

尾木 七海

Nanami Ogi

2025年3月

概要

分居現象は、人種や民族、宗教、経済、文化など様々な理由によって生じる社会問題である。Thomas C. Shelling が 1971 年に発表した「分居モデル」では、2 種が存在する場合に、他種族に嫌悪感が無くとも分居が生じることが確認されたが、限られた条件下での数値実験であったこと、同種族間の関係性のみに着目していたことが課題とされた。また、2 種族でのシミュレーションの先行研究では、他種族に対しての嫌悪感が強い場合に一次相転移を確認され、自種族への依存性が中程度の場合に二次相転移が確認できた。この先行研究の課題として、エージェント数を増やすことが挙げられた。

本研究では、3 種族を対象に分居条件とそのメカニズムを検討するため、数式処理システム Mathematica を使用し、マルチエージェントシミュレーション、現実データと仮想空間の比較を行った。正方形のセルの空間に 3 種族が存在するモデルを考え、近傍 8 つのセルの他種族、自種族の数により、エージェントが移動を決定するようにした。また、中心のセルと近傍のセルとの相関係数を考え、縦軸に相関係数、横軸に空間内の密度のグラフにより空間内の変化を可視化した。自種族および他種族への依存性や排除性の強弱を基に、全排除モデル、被排除モデル、循環型モデル、領域分割モデルの 4 つのモデルを検討した。

3 種族の場合、一次相転移は、他種族への排除性のパラメータが 2、自種族への依存性のパラメータが 6~8 の場合で生じ、他種族に排他的であり、同種族に依存的な場合であると言える。二次相転移は、他種族に対して排他的、もしくは中程度の嫌悪感を示している場合であり、他種族への排除性より自種族への依存性が強い条件が一種類でも存在すれば分居現象が生じることが確認できた。

仮想空間と現実データとの比較では、ボスニア・ヘルツェゴビナのデータを使用し比較を行った。当時の背景から各々への嫌悪感の予想をし、今回検討を行ったモデルから似ているパラメータを特定した。現実データとの比較を行うことで分居の大まかな特徴は理解できたが、実際の社会では人口密度や地形など複雑な要素が絡み合っているため、上記モデルだけでは完全な説明を行うことが困難であることも明らかとなった。

目次

第 1 章	序論	4
1.1	研究背景	4
1.2	先行研究	4
1.3	先行研究と本研究との相違点	5
第 2 章	準備	7
2.1	分居現象	7
2.2	時間ステップ	8
2.3	相転移	8
2.4	MAS (Multi-Agent Simulation)	9
第 3 章	仮想空間での検討方法	10
3.1	研究方法	10
3.2	モデルの説明	11
第 4 章	実際の画像データからの検討方法	15
4.1	対象データの決定	15
4.2	画像処理による評価	17
4.3	仮想空間でのシミュレーションとの比較	18
4.4	ResNet-50 とコサイン類似度を用いた評価	18
第 5 章	仮想空間でのシミュレーション結果	20
5.1	基本的な挙動	20
5.2	異種族、同種族ともに同じパラメータの場合	20
5.3	一次相転移	21
5.4	二次相転移	25
5.5	疑似一次相転移	41
5.6	シミュレーション結果まとめ	44
第 6 章	現実画像でのシミュレーション結果	45
6.1	1940 年のボスニアヘルツェゴビナ	45
6.2	1991 年のボスニアヘルツェゴビナ	48
6.3	現実データとの比較検討のまとめ	52

第 7 章	結論	54
7.1	本研究のまとめ・考察	54
7.2	今後の課題	54
参考文献		56

第 1 章

序論

1.1 研究背景

分居現象は、同一の特性を持ったグループが集結し、異なる特性のグループと分離して居住する現象である。人種や民族、宗教、経済、文化など様々な理由によって起こり、社会問題となっている。各々が周囲の要素に影響されることにより、集団化し、対立を起こすことがある。

Thomas C. Shelling によって 1971 年に発表された「分居モデル」では、2 種が存在する場合に、他種族に嫌悪感が無くとも分居現象が起こることが確認された。

先行研究は、2 種族の相互作用に基づいて分居現象について検討を行っていたが、実社会では 3 種族以上で相互作用が働いている場合が多い。また、先行研究では仮想空間でのシミュレーションを行っており、実際に分居が観察される都市のデータとの比較検討が十分に行われていない。

そこで、本研究では上記の分居現象、シェリングの分居モデル等の先行研究を基にシミュレーションと現実の分居現象が生じた地域の画像データを用いて、仮想空間との比較検討を行う。分居の様子を相転移として捉え、分居現象が生じる条件や仕組みを明らかにし、実際の分居現象が生じた例に類似したパラメータを特定することを目的とする。

1.2 先行研究

先行研究として、シェリングの分居モデルと 2 種族を対象としたシミュレーションが挙げられる。以降に詳細を記載していく。

1.2.1 シェリングの分居モデル

分居モデルは、シェリングによって発表されたアメリカの都市で見られる人種による分居現象を説明するために構成されたモデルである。

シェリングは 8×8 のチェスボードに 2 種類のコイン、計 45 枚をランダムに置き、仮想空間によってモデルの考察を行った。ある一定数の同種が周囲にいるという条件下で、そのコインの周囲の状況がある条件を満たしている場合は、その場にとどまるが、満足できない場合は満足できる環境を探し、空いているマスへ移動を繰り返す作業を 1 回のステップで 1 枚ずつ行う。

この数値実験により、時間の経過するにつれてコインの分居が起こることが確認された。この現象はコインを人間と置き換えることができ、2 種族間での分居現象に相当する。コインの周囲に同種が一定数存在しなければ移動するということを繰り返すことで、コインの分離が生じてしまうという結果が得られた。シェリングの数値実験により、異種族が周囲に存在することに嫌悪感が無くとも、居住する地域が分かれてしまうこと

が明らかになった。

1.2.2 シェリングの分居モデルの問題点

このモデルの問題点として、限られた条件で行っていること、全ての作業を人間が行っていたことが挙げられる。

シェリングは 8×8 という狭い空間で、1枚ずつ移動させる作業を手作業で繰り返していた。

しかし実際の社会に近づけるためには、2種族を配置する空間を広げ、同種のみならず異種についても考慮する必要がある。また、社会では様々な構成要素が互いに作用しながら共存しているため、エージェント数を増やす必要がある。

1.2.3 2種族でのシミュレーションの概要

シェリングの分居モデルに対し、コンピュータ上でMASを構築して、2種族が共存する空間において、同種のみならず異種族に対する排除性や依存性を考慮したモデルでコンピュータシミュレーションを行った。

「異種回避モデル」、「異種集結モデル」、「同種集結モデル」、上記3つのモデルを組み合わせた「混合モデル1」、「混合モデル2」の5つのモデルで分居現象について検討した。

異種を回避するモデルでは、排除パラメータが2という排除性が高い場合に一次相転移が起こり、分居が生じていた2種族の均衡が崩れる結果となった。

同種で集まるモデルでは、依存パラメータが3で疑似一次相転移を確認できた。先行研究と同様に、異種への嫌悪感の有無に関わらず、分居現象が生じてしまうことが確認できた。異種を考慮しない場合はパラメータが4、異種を考慮した場合はパラメータが5で縞模様を形成し、二次相転移を確認できた。

混合モデル1においては、あるセルを中心に8近傍に異種が2以上かつ同種が7未満である場合に移動するとき、分居が確認できるような状態から、均衡が崩れた状態に変化し、一次相転移を確認できた。

また、あるセルを中心に8近傍に異種が0以上かつ同種が4未満である場合に移動するとき、急激な分居を生じ、疑似一次相転移を確認することができた。

あるセルを中心に8近傍に異種が0以上かつ同種が5未満である場合に移動するとき、縞模様を形成し、二次相転移を生じることが明らかになった。

1.3 先行研究と本研究との相違点

本研究は、シェリングの分居モデルと2種族についてシミュレーションを行った先行研究を基に、3種族を対象としてMASに用いて検討を行った。同種のみならず異種についても考慮し、より現実に近付けたモデルでのシミュレーションを行うことにした。

また、分居現象が生じた実際の画像データを用いて、仮想空間のシミュレーションとの分居現象との比較を行った。

1.3.1 シェリングの数値実験との相違点

先行研究では、コインなどを用いて限られた空間、条件で行われた。同種に対する受容性の強弱を設定し、分居現象の変化を調査した。

本研究では、同種のみではなく、MAS を用いて異種と同種に対する排除性と依存性の強弱を設定し、分居現象の変化を調査することとした。

1.3.2 2 種族でのシミュレーションとの相違点

先行研究では、2 種族が存在する空間でのシミュレーションを行った。一方、本研究では先行研究を拡張し、3 種族が存在する空間でのシミュレーションとなっている。

エージェント数を増やすことで、より現実に近い状態で分居が起こる条件について検討を行った。

また、実際に分居現象が起こっていた地域の過去の画像データと仮想空間でのシミュレーションの結果の比較を行い、分居が生じる条件の特定を目的とした。

第2章

準備

2.1 分居現象

2.1.1 定義

分居現象とは、同一の民族や社会的な特性を持ったグループが集まり、異なる特性や性質のグループと分離して居住することである。自然にこの現象が生じることもあるが、政治的、社会的な要因で発生する場合もある。

2.1.2 分居現象の影響

プラス面

分居することにより、同様の特性を持った人々とのまとまりが生まれ、集団として安定感や文化の継承に繋がると言える。チャイナタウンやコリアンタウンのように、特定の地域に文化圏を作ることで、経済的な発展や観光地としての成功を遂げた。

マイナス面

異なる集団との関わる機会が減ることにより、偏見や差別に繋がる場合がある。また、すでに存在する経済的な格差等を増長させる可能性もある。

2.1.3 分居現象の要因

大きく分けて3つの要因に分けられる。

- 社会的要因

文化や民族、言語の違いなどが影響し、類似した集団で集結しやすくなる。同種族を好む傾向により発生することもあれば、異種族を避ける傾向により発生することもある。

例えば、移住してきた人が似たような文化や境遇の人が多い地域を選択し、居住することが挙げられる。

- 経済的要因

所得の差など、似たような経済状況である地域に住みやすい傾向にある。低所得の多い地域と高所得の多い地域とが家賃や周辺状況に合わせて住み分かれることで、分居が進む原因となる。

- 政策的要因

戦争や紛争により対立が大きくなり、長期的に分居が生じたり、移民の受け入れや都市計画等により、居住地の形成が行われると分居が生じるきっかけになる。

2.2 時間ステップ

2.2.1 定義

時間ステップとは、シミュレーションにおいて系の状態を一定の間隔で更新する基本単位である。ステップを進めることで時間進行を疑似的に再現し、エージェントの動きや空間内の変化を表現する。

2.2.2 役割

時間ステップには、エージェントの行動決定、時間進行による空間内全体の変化の過程を表現する、エージェントの最終的な配置の変化を表現するという3つの役割がある。

時間ステップが小さいと細かく区切られるため、詳細な変化を見ることができるが、計算量が増えてシミュレーションを実行する時間が長くなってしまう。一方で時間ステップが大きい場合は、変化が急激になり精度が下がってしまうが、大まかな変化を把握することができるという利点がある。

2.3 相転移

相転移とは、系の状態が特定の閾値を超えた際に、急激にあるいはゆっくりと変化する現象を指す。

物理学における概念によるものであり、固体・液体・気体などの状態変化が知られている。分居モデルにおいてもパラメータの変化によって急激な変化あるいはゆるやかな変化が生じるため、同様にみなす。

2.3.1 一次相転移

パラメータによって系全体に急激な変化が生じる現象である。状態変化が不連続であり、ある閾値を超えると飛びが生じることが特徴である。

物理学における一次相転移の代表例は、凝固や気化が挙げられる。

分居現象における一次相転移は、ある閾値を超えたときに突然大きな分居が生じたり、分居していた状態から均衡が崩れ突如混合してしまう状況を指す。

2.3.2 二次相転移

パラメータによって系の状態がゆっくりと変化し、閾値を超えたときはっきりとした変化が確認できる現象である。一次相転移とは異なり、変化は連続的で、グラフは滑らかに変化し、飛びは見られないことが特徴である。

物理学における代表的例として、磁性体の強磁性-常磁性転移が挙げられる。

分居現象における二次相転移は、系全体に緩やかな変化が生じ、最終的に大きな分居が見られる状況を指す。

2.3.3 疑似一次相転移

疑似一次相転移は、一次相転移のように見えるが、実際には連続的な変化である現象である。

分居現象において、ある時間ステップでシミュレーションを行うと急激な分居が発生しているようにみえるが、時間ステップを変化させると小さな変化による結果であることが分かる場合を指す。

2.4 MAS (Multi-Agent Simulation)

複数のエージェントを用いて行うシミュレーションのことである。人の行動モデルを詳細に表現することができるが利点である。

社会は様々な構成要素が相互作用を受けながら成り立っており、MAS を用いることで、限られた条件だけでなく、複雑な現象も解析することができる。

第 3 章

仮想空間での検討方法

3.1 研究方法

数式処理システムのソフトウェア Mathematica を使用し、MAS を構成した。

以下の条件を基準として時間進行による分居現象の変化を調査する。3 種族が混在する状況で、1 つのエージェントが集団にどのような影響を与えるか分析することを目的とする。

- 64×64 の正方格子のセルに 3 種族が存在するモデル
- 空間内全体の密度 ρ を 0.01 ずつ 1.00 まで変化
- 時間ステップ $n_t = 5000$
- 排除・依存パラメータを 0 から 9 までを与える

64×64 の正方格子のセル空間を用いてシミュレーションを行った。空間内のセルは、1 種類のエージェントを含むか、何も入っていない空白であるかの二つの状態を持つ。

また、空間内のエージェントの占有割合を変化させ、密度によって分居状態がどのように変化するのかを調べることができるようにした。空間内の密度を 0.01 ずつ変化させ、1.00 まで増加させ、調査を行った。

あるセルを中心に近傍に 8 つのセルが存在するため、パラメータは 0 から 9 までとし、他種族や自種族がどの程度存在するかに応じて、エージェントの移動を決定する。

時間ステップを $n_t = 5000$ に統一し、時間進行によってどのように分居現象が進んでいくのかを分析する。

3.1.1 相関係数

空間内の変化を可視化するために相関係数について考える。相関係数 C は次のように表す。

$$C = \frac{\sum_s \sum_t x_s x_t}{\sum_s \sum_t}$$

ここで、中央に存在するセル s をとし、 t を s の近傍と定義する。 s というセルの周りに同種が存在する場合は $+1$ 、何も入っていない空白の場合であれば 0 、異種が存在する場合は -1 として考える。右図の場合は、中心の橙色のセルを基準として、赤枠の部分は、白色が空白のセルであり 0 、同種が $+1$ 、黄色と灰色のセルである異種族が -4 となる。この規則に従って相関係数 C を計算する (図 3.1)。

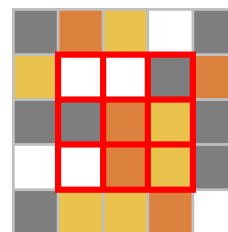


図 3.1 具体例

例えば、2 種族の場合に空間内が次のような状況であれば、相関係数はそれぞれ左から $C = 1$ の完全相関、 $C \approx 0$ の無相関、 $C = -0.5$ の逆相関となり、1 に近づくほど分居は大きくなり、0 に近づくほどランダムに配置されている状況である (図 3.2)。

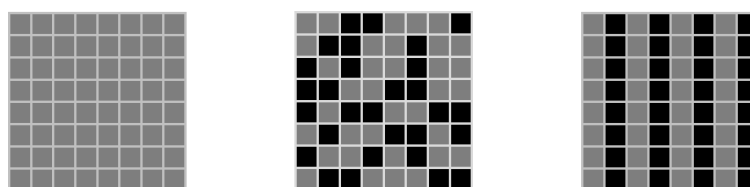


図 3.2 相関係数の例

3.2 モデルの説明

本研究では、大きく分けて 3 つのモデルを用いて検討を行い、それらのモデルを基に新たなモデルでの検討を行った。以下に計 4 つのモデルの詳細を記載する。

排除モデル
被排除モデル
循環型モデル
領域分割モデル

3.2.1 排除モデル

本モデルは、各種族からの他種族に対して示す関係性をパラメータで定義したものである。種族 1 から他種族への影響を示す排除パラメータを a 、種族 2 から他種族への影響を示す排除パラメータを b 、種族 3 から他種族への影響を示す排除パラメータを c として設定している。また、各種族が同種族に対して示す関係性は依存パラメータ n で表し、すべての種族において統一した値を用いている。あるセルを中心に、周囲 8 近傍にそれぞれ他種族が排除パラメータ以上存在するかかつ自種族が依存パラメータより多く存在しない場合に、空白のセルに移動するようにした。種族 1 が灰色、種族 2 が黄色、種族 3 が橙色としてシミュレーションを行う。

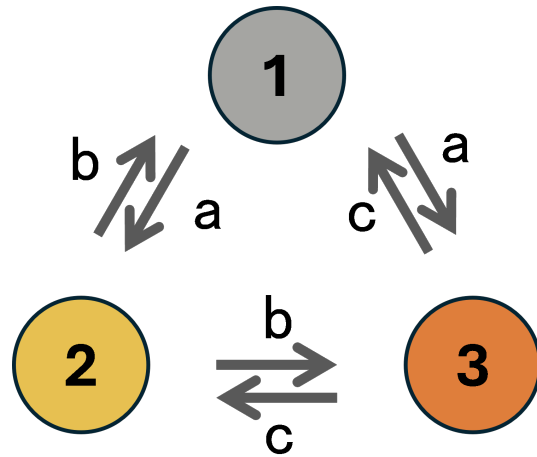


図 3.3 排除モデルの相関図

3.2.2 被排除モデル

本モデルは、他種族からの各種族への関係性をパラメータで定義したものである。他種族から種族 1 への影響を示す排除パラメータを a 、種族 2 への影響を示す排除パラメータを b 、種族 3 への影響を示す排除パラメータを c として設定している。また、各種族が同種族に対して示す関係性は依存パラメータ n で表し、すべての種族において統一した値を用いている。あるセルを中心に、周囲 8 近傍にそれぞれ他種族が排除パラメータ以上存在するかかつ自種族が依存パラメータより多く存在しない場合に、空白のセルに移動するようにした。種族 1 が灰色、種族 2 が黄色、種族 3 が橙色としてシミュレーションを行う。

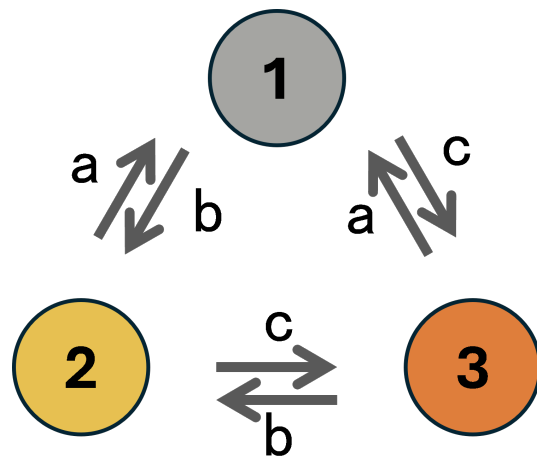


図 3.4 被排除モデルの相関図

3.2.3 循環型モデル

本モデルは、各種族間での関係性を双方向的に設定したものである。種族 1 から種族 2 への排除パラメータを a 、種族 1 から種族 3 への排除パラメータを b とし、これらの値をもとに、種族 2 および種族 3 から種族 1 への関係も対称的に設定している。また、各種族が同種族に対する態度を示す依存パラメータを n とし、すべての種族で同一の値となるよう統一している。あるセルを中心に、周囲 8 近傍にそれぞれ他種族が排除パラメータ以上存在するかつ自種族が依存パラメータより多く存在しない場合に、空白のセルに移動するようにした。種族 1 が灰色、種族 2 が黄色、種族 3 が橙色としてシミュレーションを行う。

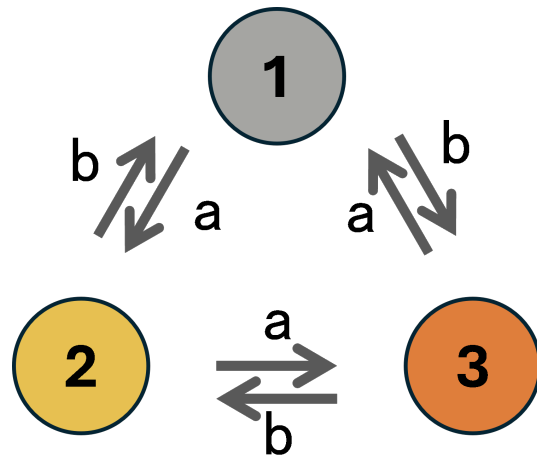


図 3.5 循環型モデルの相関図

3.2.4 領域分割モデル

本研究では、空間を 3 つのエリアに分割し、各エリアにおける種族の占有割合を調整したモデルを構築した。

左端のエリアは主に種族 1 が優勢となるように設定し、同エリアにおいて種族 3 が発生する確率は低く (5 %) と設定している。同様に、右端のエリアについても種族 2 を主体としつつ、種族 3 の出現確率を 5 % に設定した。一方、中央部のエリアは、3 種族が均等に混在する領域として設計している。あるセルを中心に、周囲 8 近傍にそれぞれ他種族が依存パラメータ以上存在するかつ自種族が依存パラメータより多く存在しない場合に、空白のセルに移動するようにした。種族 1 が黄色、種族 2 が緑色、種族 3 が灰色としてシミュレーションを行う。

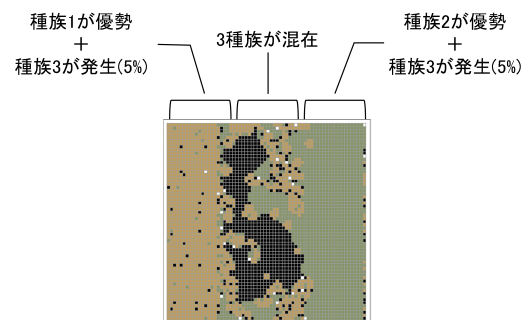


図 3.6 領域分割モデル

これら 4 つのモデルについて、空間内の種族密度を変えた 64×64 の正方格子のセルと縦軸に相関係数、横軸に種族密度をとったグラフを考える。

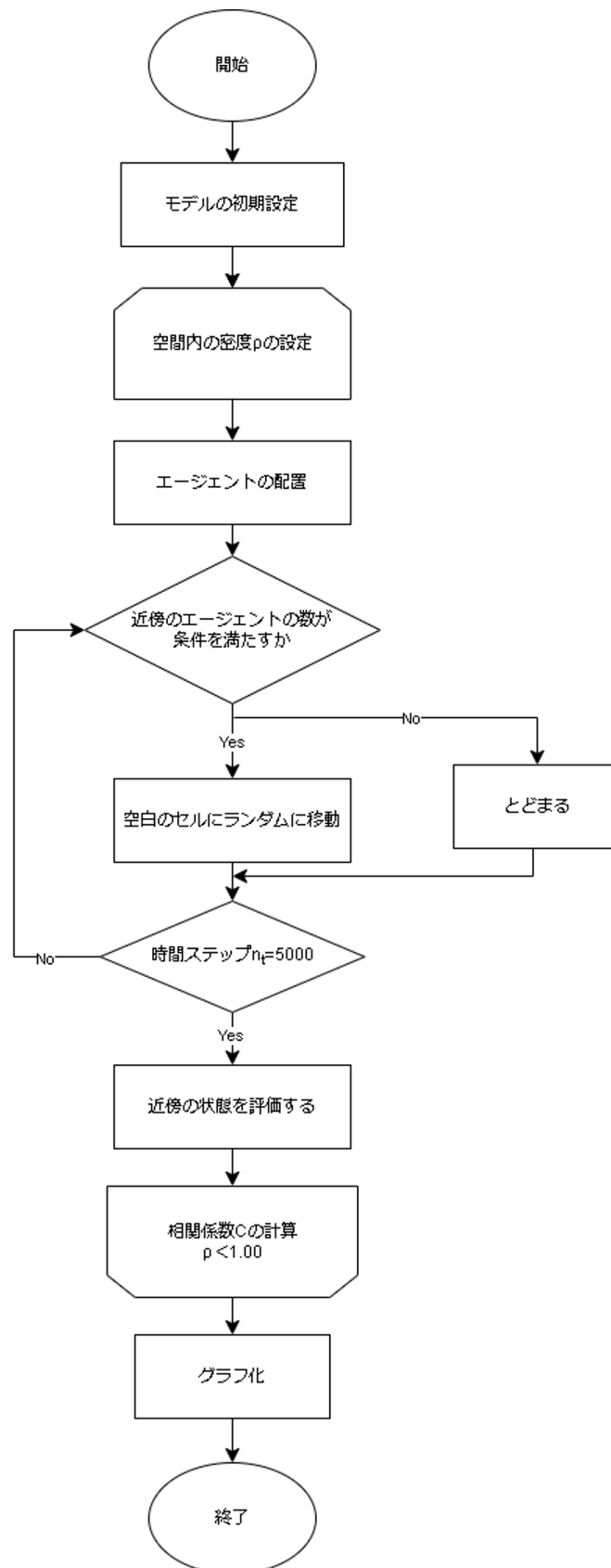


図 3.7 フローチャート
14

第4章

実際の画像データからの検討方法

4.1 対象データの決定

4.1.1 1940年のボスニアヘルツェゴビナ

1940年のサラエボ付近のデータを参考にする(図4.1)。この地域は3種族が混合している地域になっている。

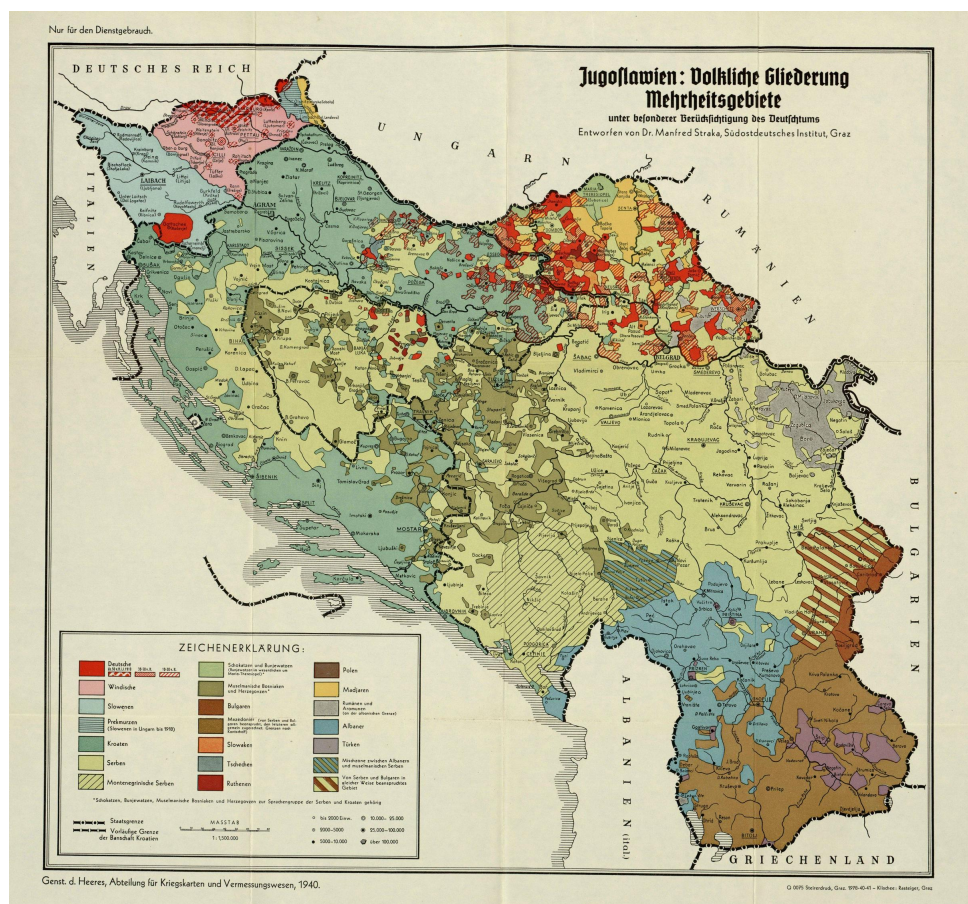


図 4.1 1940 年の旧ユーゴスラヴィア

4.1.2 1991 年のサラエボ付近

1991 年のサラエボ付近のデータを参考にする (図 4.2)。1940 年と同様に、この地域が 3 種族が混合している地域になっている。

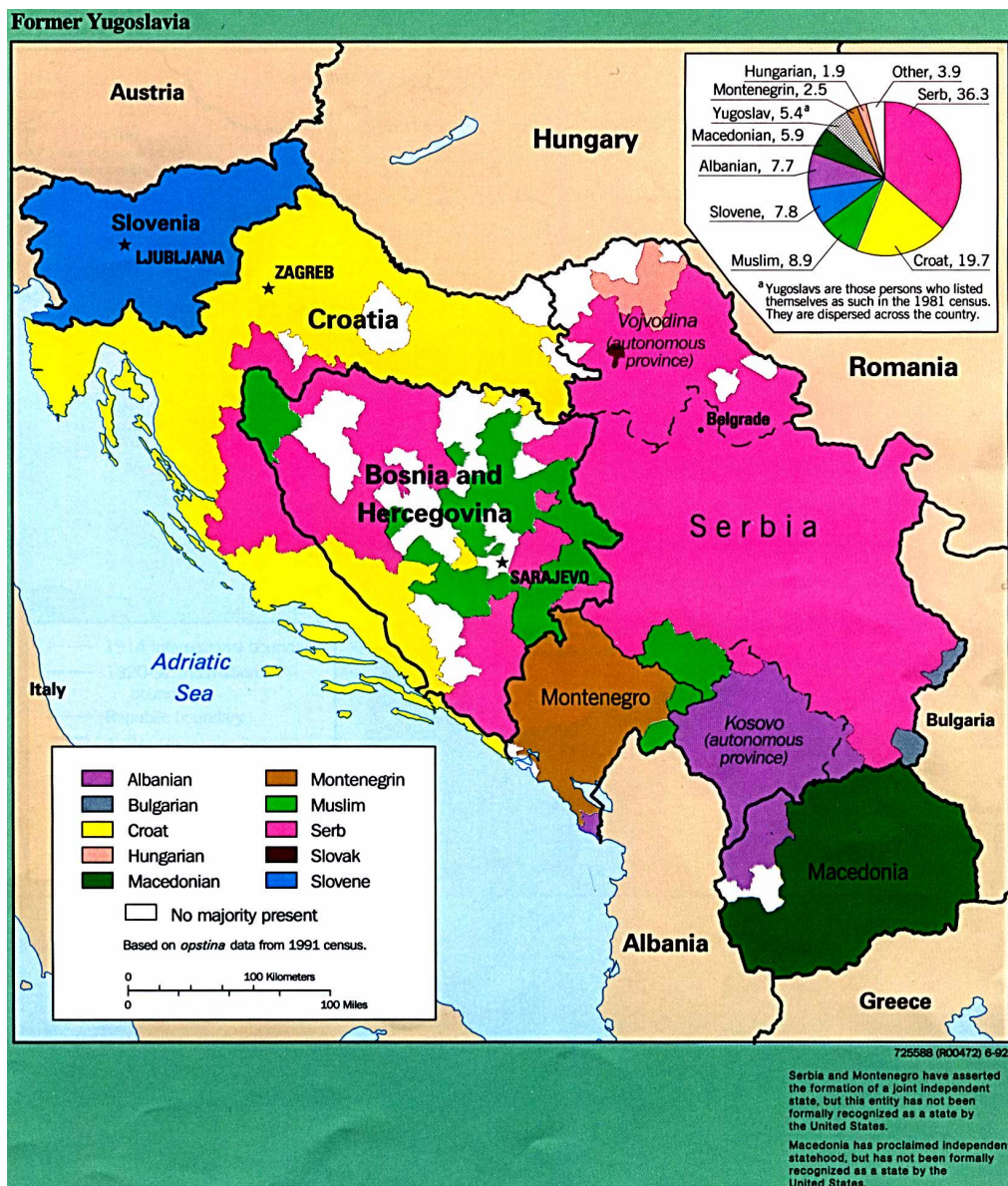


図 4.2 1991 年の旧ユーゴスラヴィア

4.2 画像処理による評価

以下のプロセスにより、画像データの処理及びデータ解析を行った。仮想空間におけるシミュレーション結果と分居現象が生じた実社会のデータを比較し、分居の仕組みや特徴を明らかにすることを目的とする。

1. 画像処理の準備
 - (a) 画像データを取得し、フォーマットを統一
 - (b) 各ピクセルの色情報（RGBA 値）を抽出
 - (c) 不要なアルファ値を除去し、RGB 値として整理
2. 色空間の変換
 - (a) RGB 値を CIE Lab 色空間に変換し、色の視覚的な特性を分析
 - (b) CIE Lab 空間での色距離を計算し、色間の類似性を数値化する
3. 色の分類
 - (a) 各ピクセルの色特徴を基に、主要な色（例えば赤、青、緑）に分類
4. ブロック単位での色計算
 - (a) データを扱いやすくするために、画像を一定サイズのブロックに分割
 - (b) 各ブロック内の色の支配率を計算し、全体的な分布を把握
5. 色の補完と修正
 - (a) 境界部分の色情報が欠損している場合、周囲の色情報を利用して補完
 - (b) 分析の精度向上のため、白色セルを赤、青、緑に置き換え
6. 結果の評価と出力
 - (a) シミュレーションの結果を画像で表示する
 - (b) シミュレーションの結果と仮想空間の結果の類似度を評価するための値を計算

以降に詳細を記載する。

4.2.1 手法の詳細

画像処理の準備

画像解析を行うために対象データのフォーマットを統一した。画像ファイルのインポート時には、異なるフォーマットが混在する可能性があるため、あらかじめ全ての画像を適切に統一して、扱いやすくした。仮想空間では正方形のセル空間での検討を行ったため、対象データを正方形に合わせた。その後、RGBA 値を抽出し、アルファ値を取り除くことで RGB データとした。

色空間の変換

RGB 色空間は人間の視覚とは少し異なる。人間の視覚的特性に基づいた分析を行うため、RGB 色空間を CIE Lab 色空間へと変換した。CIE Lab 空間は、輝度、赤と緑の表現、黄と青の表現の 3 つの要素で表されており、色の間の距離をより正確に測定し、色の違いを反映することが可能である。この変換後、ピクセルごとの色の距離を計算し、人間の視覚に近いものにした。

色の分類

得られた CIE Lab 空間のデータを用いて、それぞれのピクセルが赤、青、緑のどの色に属するのかを

分類し上書きした。この際、色の基準となる閾値を設定し、色を分類する際の曖昧さを減少させた。

ブロック単位での色計算

効率的に計算を行うため、画像全体を 64×64 の小さなブロック単位に区切り、解析を行った。ブロックごとにどの色のピクセルが多いかを計算し、その色でブロックの色を決定する。また、 64×64 に設定したことにより、仮想空間シミュレーションとの比較が容易となった。

色の補完と修正

画像内には国境や種族の分布の境界線があり、曖昧な色になり予期しない色が出ることによって、精度が落ちてしまう。これらを解消するために周囲のピクセルの色を参考にして、境界線部分周辺の情報からどの色が優勢かを判断し、そのブロックをその色で埋める。

結果の評価と出力

シミュレーションで得られたデータとの比較を行うために、以下の計算によって、仮想空間と同様に相関係数について計算を行った。

$$C = \frac{\sum_s \sum_t x_s x_t}{\sum_s \sum_t 1}$$

ここでも同様に、中央に存在するセル s をとし、 t を s の近傍と定義する。 s というセルの周りに同種が存在する場合は +1、何も入っていない場合は 0、異種が存在する場合は -1 として考える。

4.3 仮想空間でのシミュレーションとの比較

仮想空間でのシミュレーション結果と 3 色に分類した画像を、密度や相関係数、種族ごとに予想した嫌悪感を考慮して比較検討を行う。

4.4 ResNet-50 とコサイン類似度を用いた評価

ResNet-50 を用いて画像の特徴ベクトルを抽出し、抽出した特徴ベクトル同士をコサイン類似度を用いて計算し、画像同士の類似度を計算する。

4.4.1 ResNet-50

2015 年に発表された画像認識に用いられる CNN(畳み込みニューラルネットワーク) の一種である。CNN と異なり、残差ブロックとスキップ接続を用いることで 50 層もの深いネットワークにより、画像認識の精度が向上されている。

CNN のような深い層を持つネットワークでは勾配消失や過学習が問題視されてきたが、ResNet-50 では残差ブロックやスキップ接続により、これらの問題が解決されている。それにより、50 層もの深い層で行うことができることで、表現力を高め、学習の効率化を行うことができる。

4.4.2 コサイン類似度

コサイン類似度とは、2 つのベクトルの角度によってそれらのベクトルの類似度を測る手法である。

まず、ベクトルの内積は以下の 2 式で表すことができる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ここで、以下のように式変形を行う。

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

ここで、 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ である。以上より、以下の式をコサイン類似度とする。

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} * \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

コサイン類似度は $-1.0 \sim 1.0$ で表され、 -1.0 に近く、値が小さいほど負の相関があることを示し、 0 であれば相関が無い、 1.0 に近く、値が大きいほど相関があることを示す。

第 5 章

仮想空間でのシミュレーション結果

5.1 基本的な挙動

基本的に空間内の種族密度が低い場合、種族が空間内に均等に配置され、分居が生じることは少ない。種族密度が中程度の場合は、種族ごとのパラメータによる特性が表れ、小さなクラスターを形成するようになる。

下図の空間内全体の密度は左から 0.20、0.50、0.90 となっている（図 5.1）。

高密度になると、パラメータによってクラスターは形成され、その大きさは比較的大きい傾向にある。

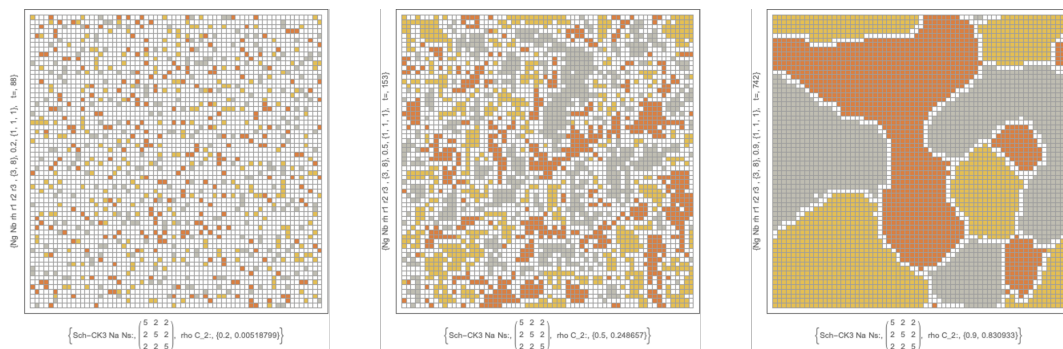


図 5.1 密度によるクラスターの変化

5.2 異種族、同種族ともに同じパラメータの場合

ここでは、自種族と他種族に対する嫌悪感が同程度の場合の結果を示す。他種族と自種族への嫌悪感が中程度、排除パラメータが 3～5 のときに分居現象及び二次相転移を確認することができた。

以下に分居現象を確認できた際の結果を一部記載する（図 5.2）。

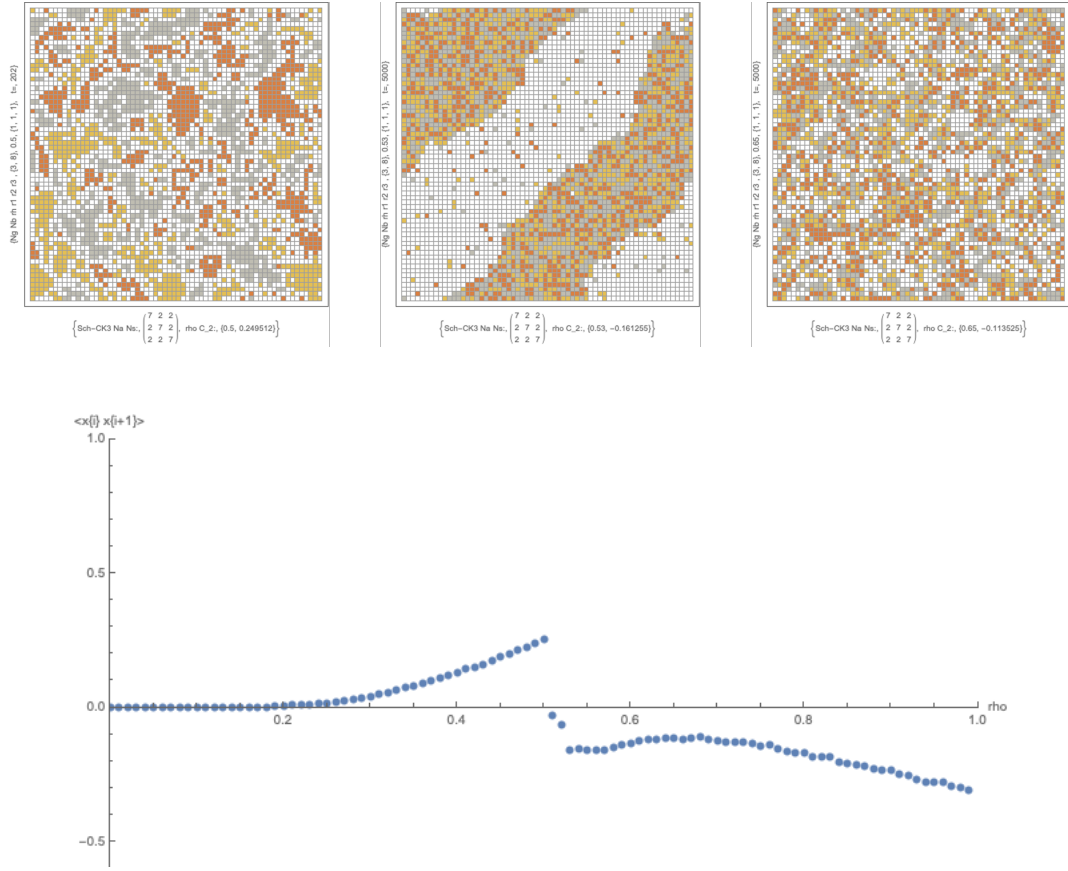
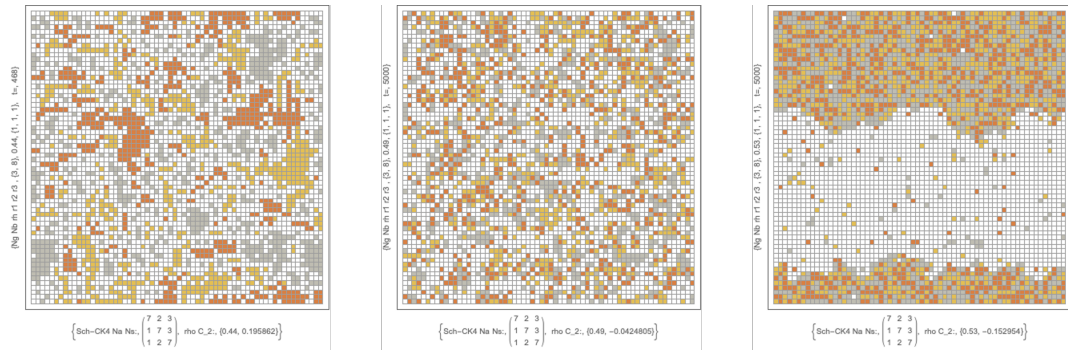


図 5.4 排除モデルの $a = 2, b = 2, c = 2, n = 7$ の場合

5.3.2 被排除モデル

他種族への排除性と比較し、同種族への依存性が高い場合のシミュレーションでは、小さいクラスターが形成された。その後は密度による条件で一次相転移が生じ、均衡が崩れる結果になった (図 5.5)。



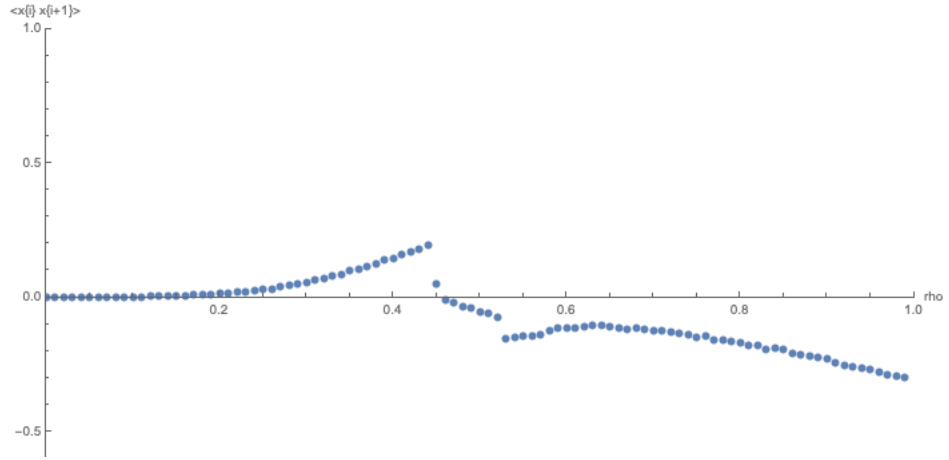
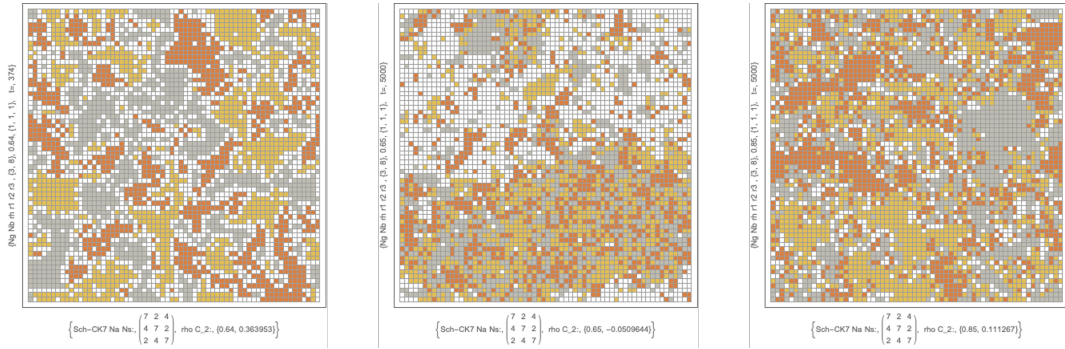


図 5.5 被排除モデルの $a = 1, b = 2, c = 3, n = 7$ の場合

5.3.3 循環型モデル

他種族への排除性が互いに強く、自種族への依存パラメータが 7 で依存性が強い場合には、小さなクラスターを形成した後、一次相転移を確認でき、その他のモデルとほぼ同様の結果を得られた (図 5.6)。



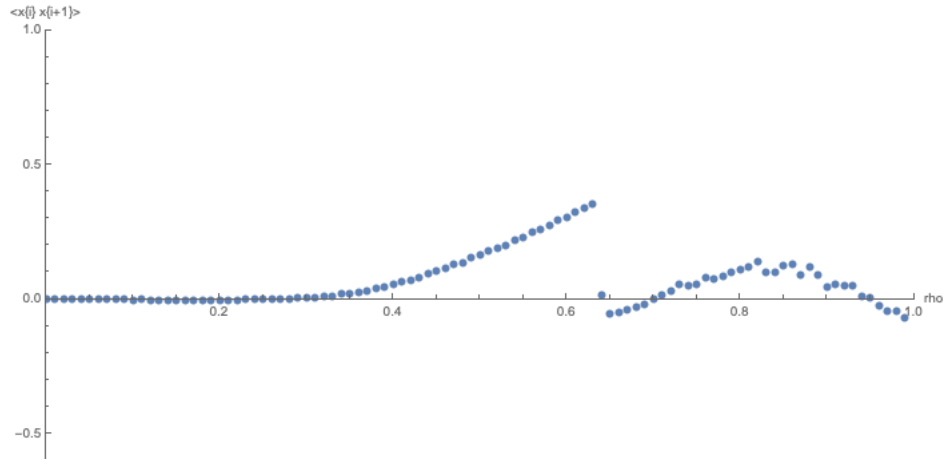
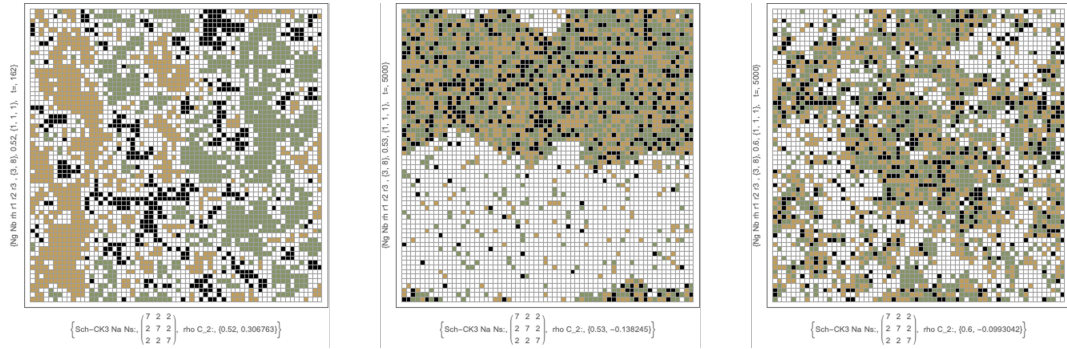


図 5.6 循環型モデルの $a = 2, b = 4, n = 7$ の場合

5.3.4 Model4

3 分割モデルにおいても、他のモデルと同様に、他種族への排除パラメータを 2、自種族への依存パラメータを 6~8 にすると空間内の均衡が崩れ、一次相転移を確認できた。一次相転移が確認できると、領域を分けていても、全種族が空間全体に混在した状態になる (図 5.7)。



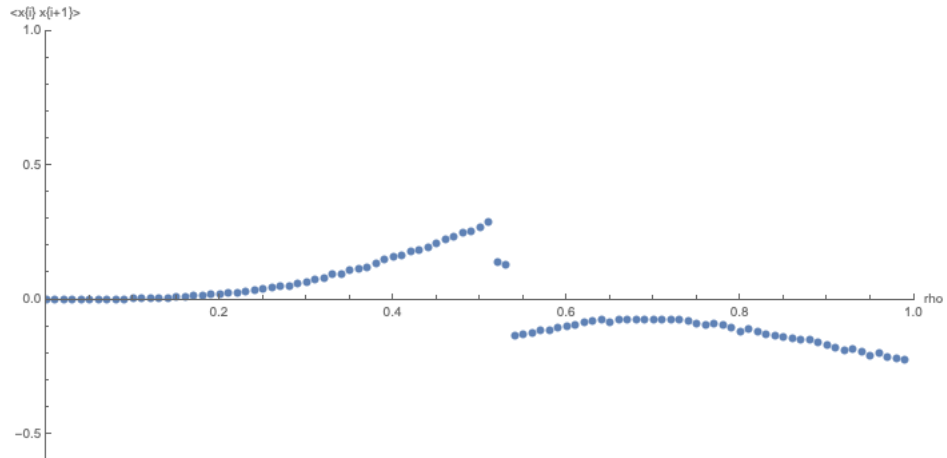


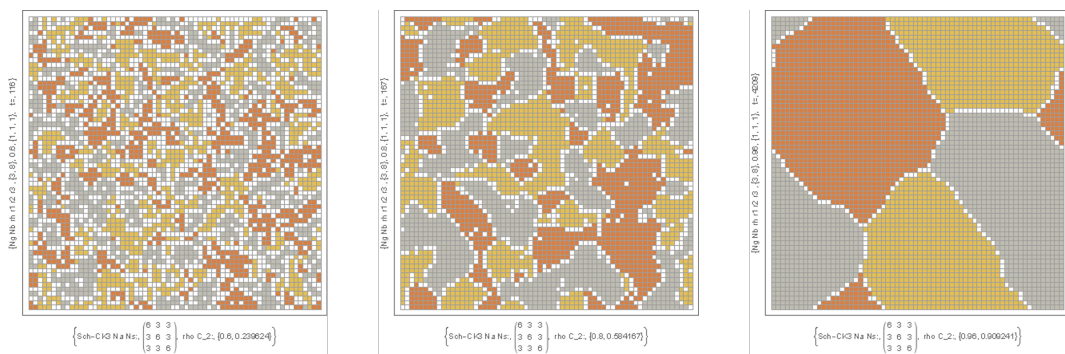
図 5.7 領域分割モデルの $a = 2, b = 7, c = 7, d = 2$ の場合

5.4 二次相転移

二次相転移が起こる条件は、他種族に対して排他的である、もしくは中程度の嫌悪感を示している場合であり、自種族への嫌悪感が他種族への嫌悪感を上回らない場合に生じると言える。以下に、それぞれのモデルでの相転移の例を挙げていく。

5.4.1 排除モデル

他種族への排除パラメータが 2~3、自種族への依存パラメータが 5~6、つまり、他種族に対して排他的、自種族に対して中程度の依存性の場合、空間内の密度を上げると分居現象が生じ、最終的に大きなクラスターが形成された (図 5.8)。



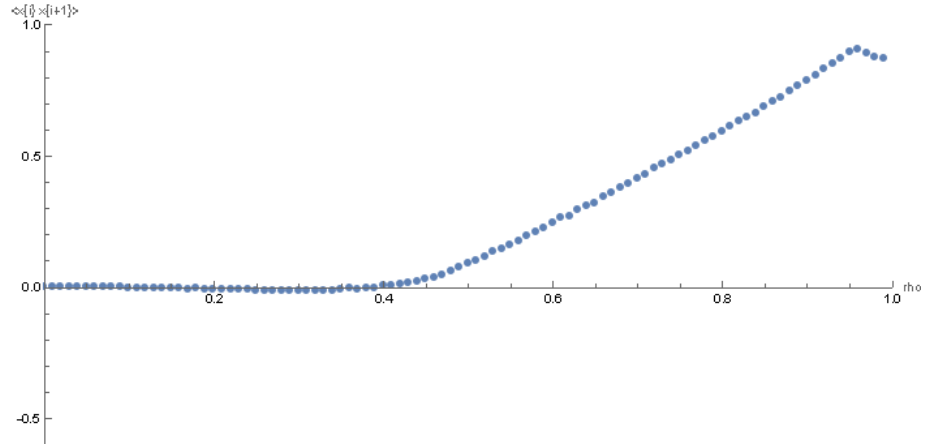


図 5.8 排除モデルの $a=3, b=3, c=3, n=6$ の場合

自種族に非常に依存的で他種族への排除性が強い場合、自種族で集結する動きが強くなり、最終的なクラスターは大きくなる。相関係数は 1 に近いかなり高い値を取った (図 5.9)。

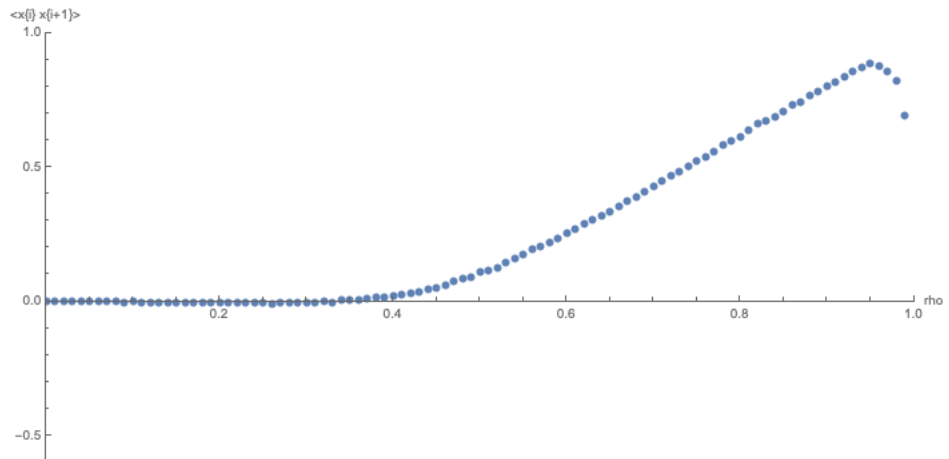
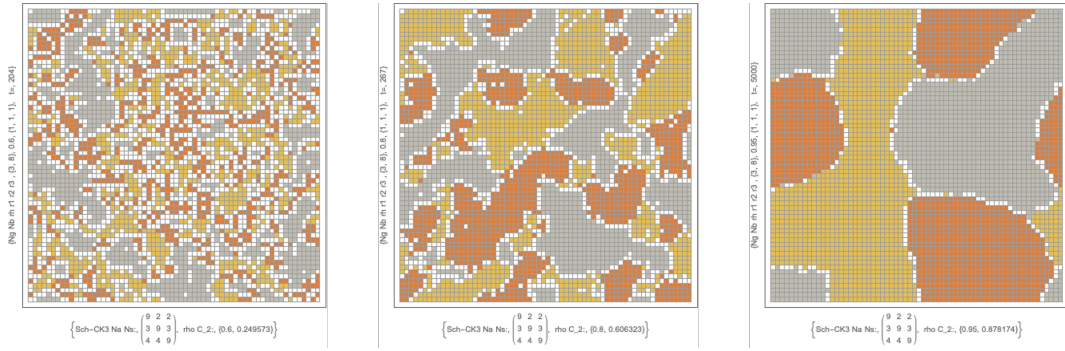


図 5.9 排除モデルの $a=2, b=3, c=4, n=9$ の場合

前述の結果と比べ、他種族を排除する傾向が強く、自種族への依存性が中程度の場合、大きなクラスターを

起こすことが確認できた。自種族への依存性が中程度の方が、かなりはっきりとした分層が生じ、相関係数も 1 に近い値を取る結果が得られた。

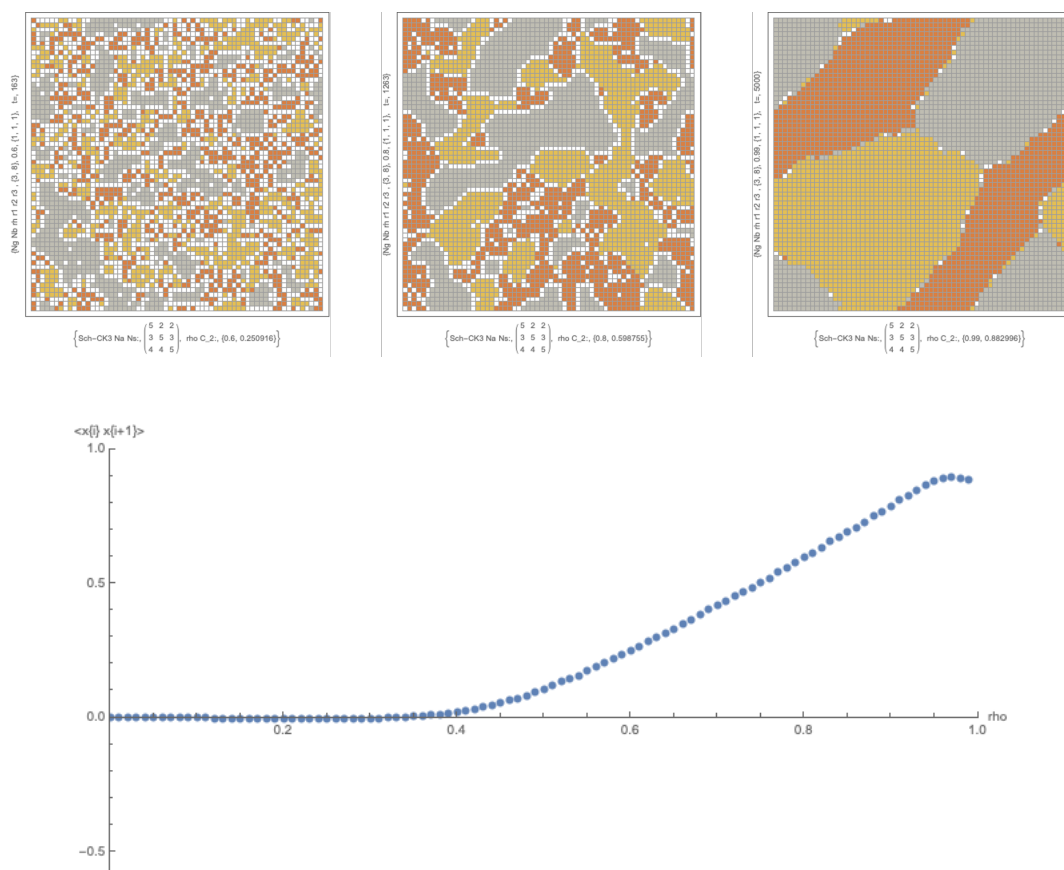
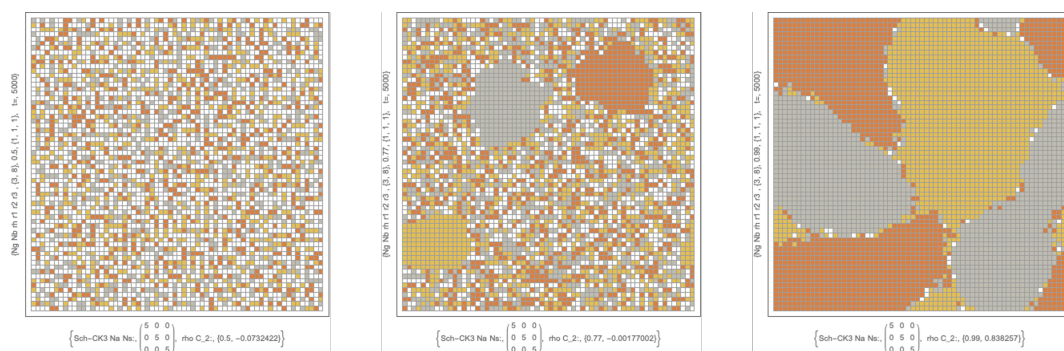


図 5.10 排除モデルの $a = 2, b = 3, c = 4, n = 5$ の場合

他種族が周囲にいることを一切許容しない、すなわち排除パラメータが 0、自種族への依存性が中程度の依存パラメータが 5 の場合、密度 0.50 のとき、縞模様似たものを形成し、密度が 0.77 のとき、分層が生じた。その後は大きなクラスターを形成し、最終的な相関係数も 1 に近付いた (図 5.11)。



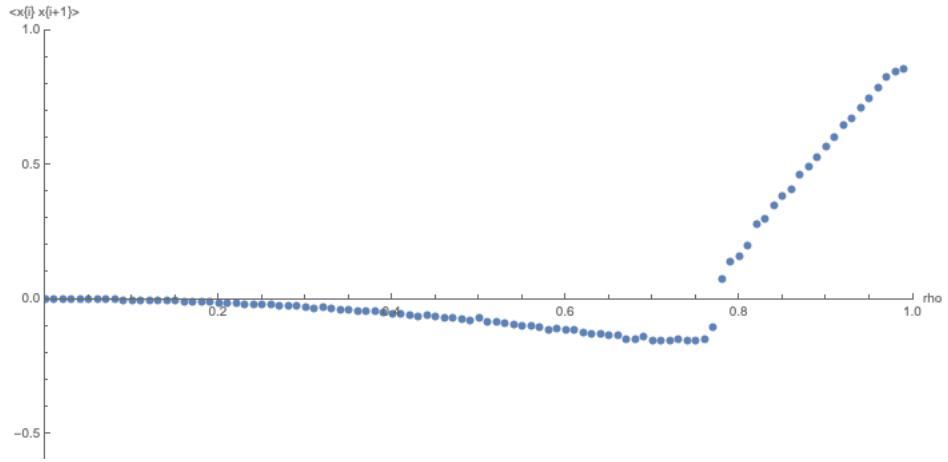


図 5.11 排除モデルの $a=0, b=0, c=0, n=5$ の場合

2 種族が他種族を強く排除する傾向にあり、残り 1 種族が他種族に受容的である場合、その 1 種族が対立する 2 種族の緩衝をする役割を果たす。以下の例では、残り 1 種族が自種族の依存性より他種族に対しての受容性が高い状態であるため、大きなクラスターが形成されなかったと考えられる (図 5.12)。

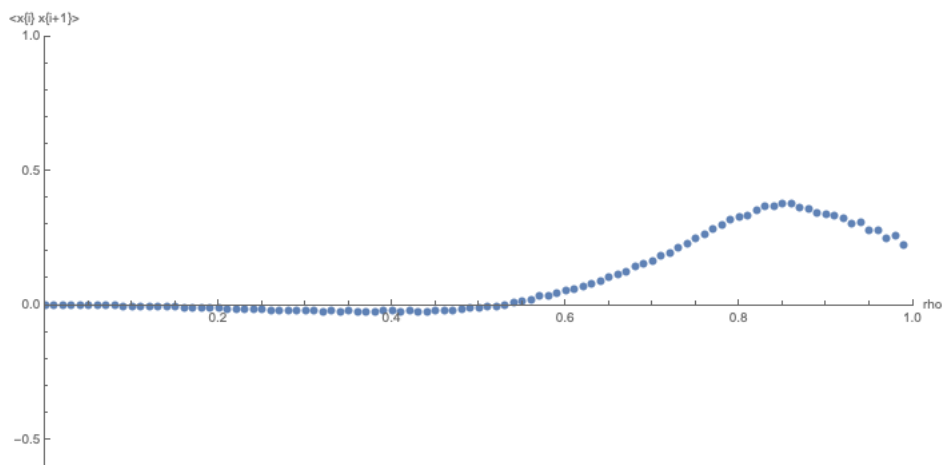
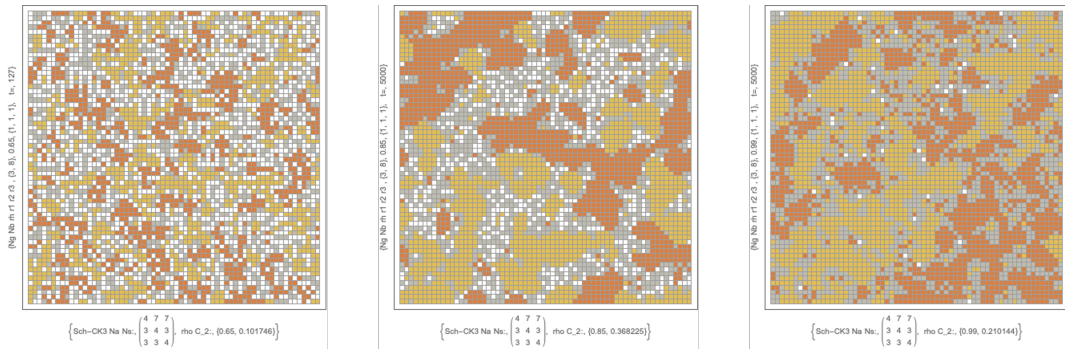


図 5.12 排除モデルの $a=7, b=3, c=3, n=4$ の場合

他種族への排除性が自種族への依存性より強い場合のシミュレーションでは、排除パラメータを高い場合、中程度の場合、低い場合と設定して行った。他種族の排除の強さによってクラスターの大きさが異なり、他種族への排除パラメータと自種族への依存パラメータの差が大きいほど大きなクラスターを形成する結果となった (図 5.13)。

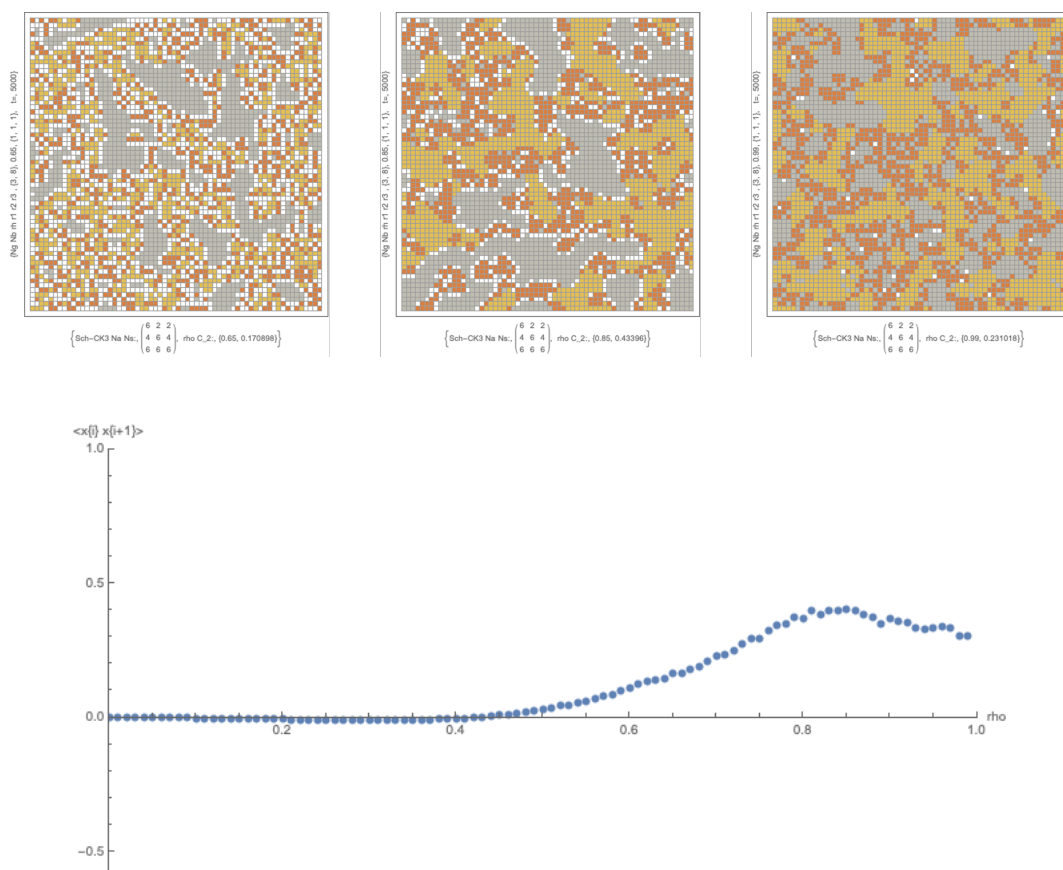


図 5.13 排除モデルの $a = 2, b = 4, c = 6, n = 6$ の場合

5.4.2 被排除モデル

自種族への依存パラメータ 5、つまり依存性が中程度の場合、他種族からの排除パラメータが 4~5 あるいは 9 の場合に、該当する 2 種族で縞模様を形成した。他種族からの排除パラメータが 0 で、他種族から避けられている灰色の 1 種族は自種族で集まり孤立する結果となった (図 5.14)。

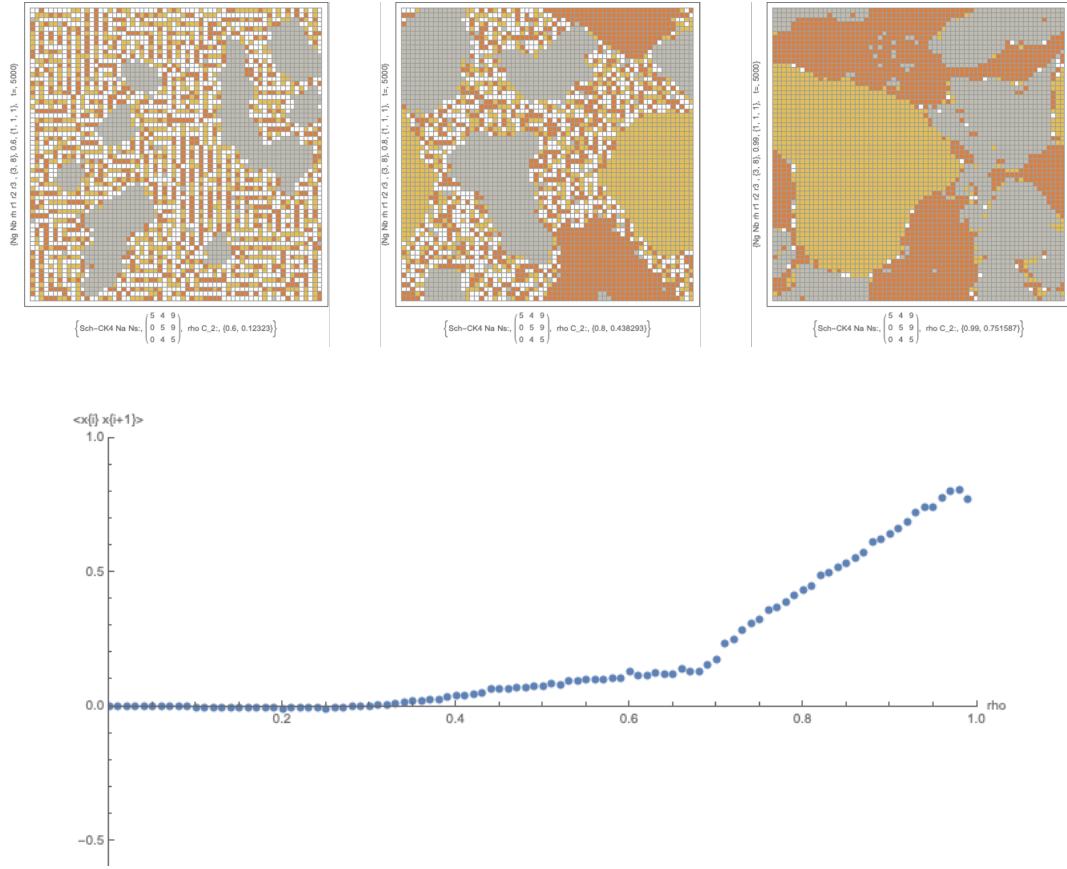
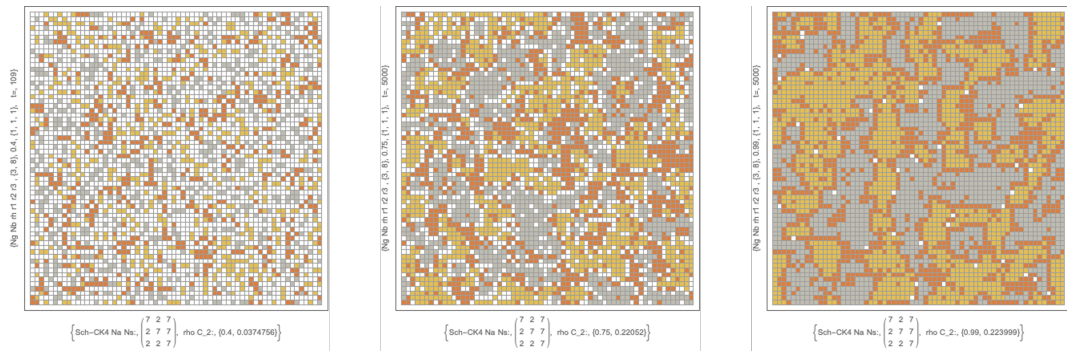


図 5.14 被排除モデルの $a = 0, b = 4, c = 9, n = 5$ の場合

同種族に対して依存的で、異種族から避けられる 2 種族が存在する空間で、残り 1 種族が他種族から避けられない場合、その 1 種族が 2 種族の周囲に存在し、緩衝する役割を果たす (図 5.15)。



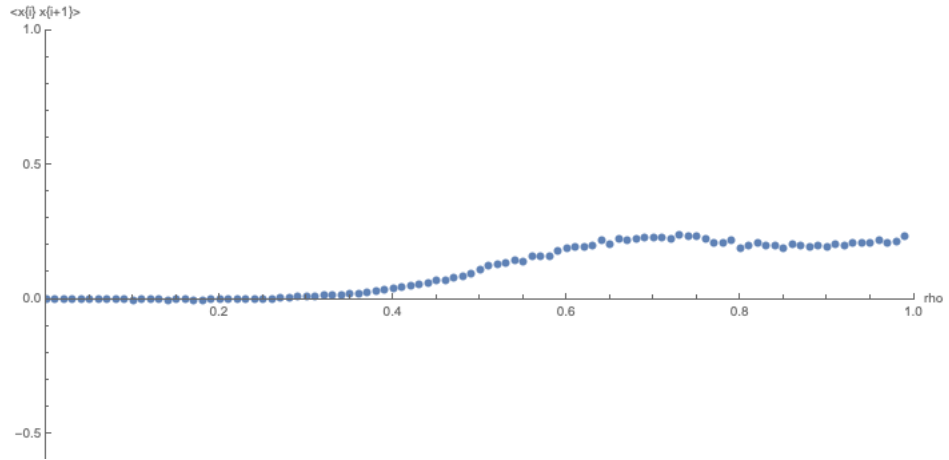


図 5.15 被排除モデルの $a = 2, b = 2, c = 7, n = 7$ の場合

他種族からの排除性が比較的に強いかつ自種族への依存性が高く、他種族からの排除パラメータと自種族への依存パラメータの差が大きい場合には、自種族で集結しやすくなり、最終的に大きなクラスターを形成した。相関係数に関しても上昇し、最終的に 1 に近い値を取るようになった (図 5.16)。

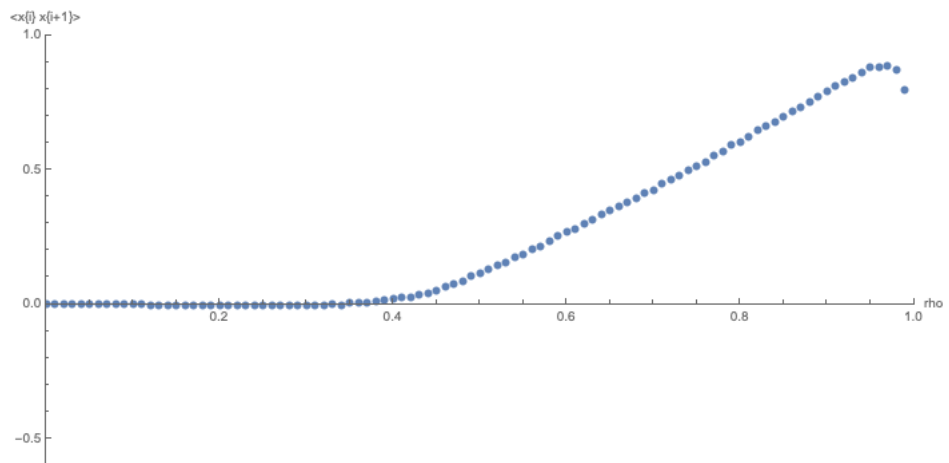
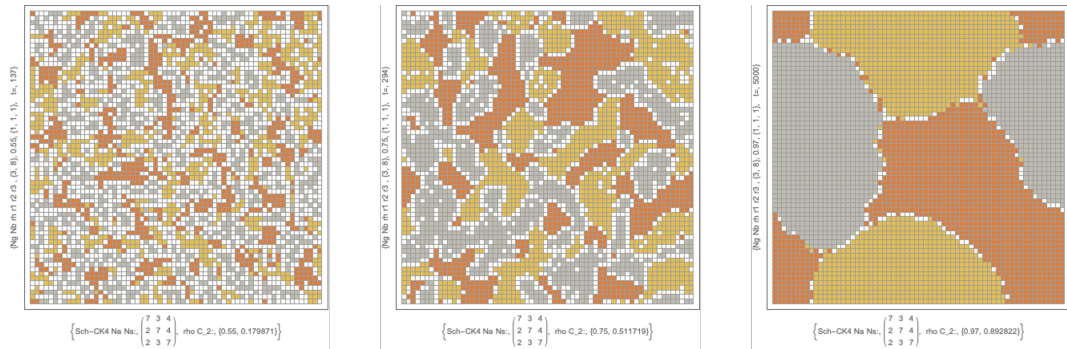


図 5.16 被排除モデルの $a = 2, b = 3, c = 4, n = 7$ の場合

5.4.3 循環型モデル

一方の種族への排除パラメータを低く、もう片方の種族への排除パラメータを高くし、偏りのある3種族を共存させるように設定した。自種族への依存性が弱く、同種族で集結することを避ける傾向があることから、最終的なクラスターは大きくならなかった (図 5.17)。

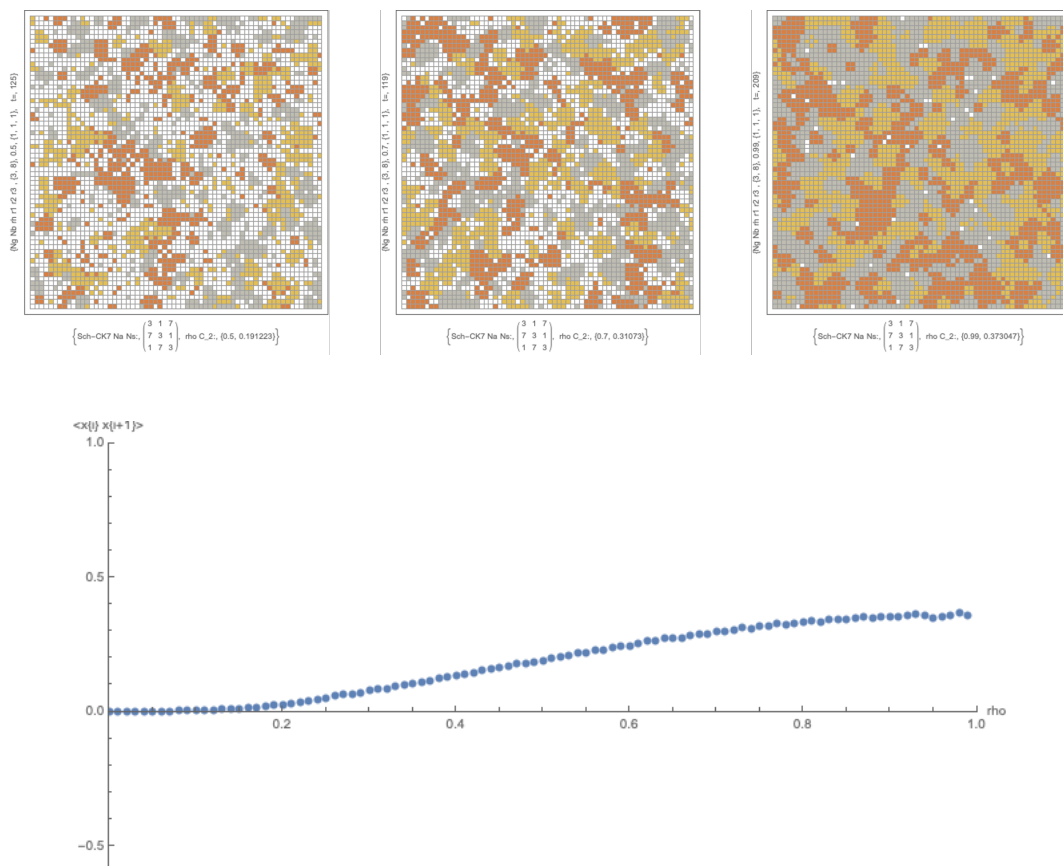


図 5.17 循環型モデルの $a = 1, b = 7, n = 3$ の場合

一方の種族への排除性が高く、もう一方の種族への排除性は低く設定し、循環するように設定したシミュレーション結果である。自種族への依存性を中程度にすると、直線的な分居が多くみられるようになった。自種族への嫌悪感が中程度であり、片方の種族への嫌悪感を上回っていないことから、他の種族との接触を最小限に抑えるような動きに繋がった結果だと思われる (図 5.18)。

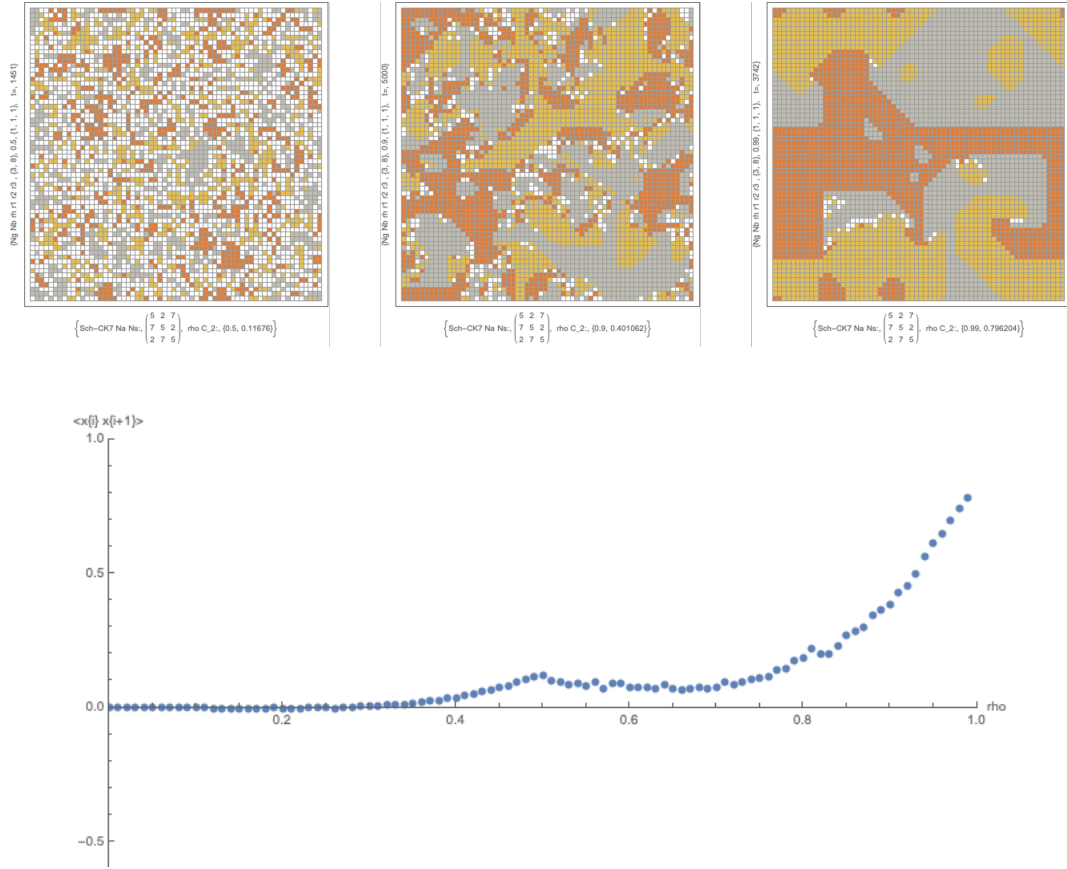
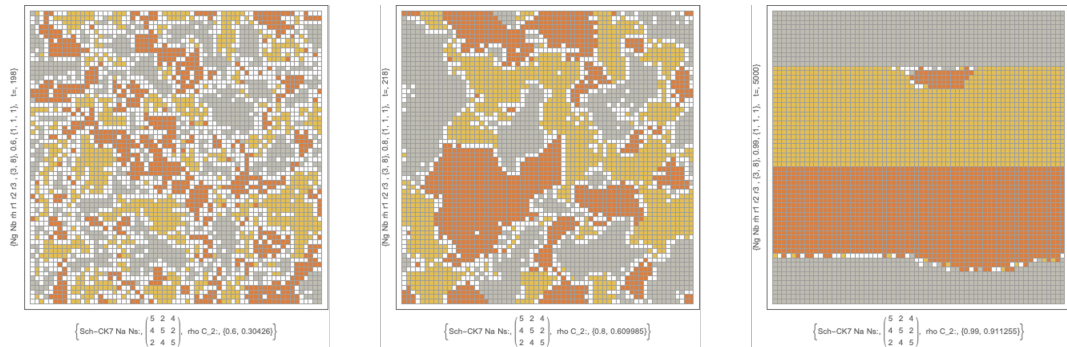


図 5.18 循環型モデルの $a = 2, b = 7, n = 5$ の場合

前述の結果と合わせ、循環モデルでは一方の性質が他種族に対して排他的である排除パラメータが2、自種族に対して中程度の依存性がある依存パラメータが5の場合に直線的な分居が生じることが確認できた。

自種族への中程度の依存性により、同種族同士で集結しすぎず、他種族への排除性が1つでも高いとなるべく他種族と接触しないようにするため、直線的な分布になる (図 5.19)。



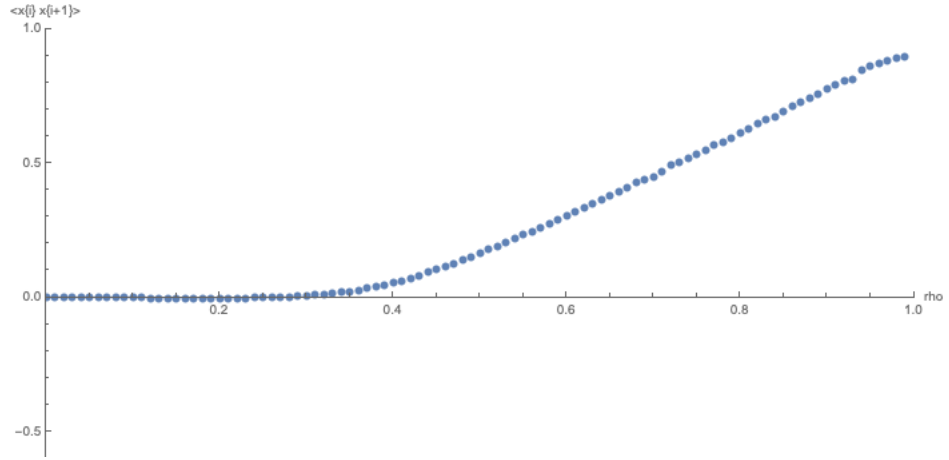


図 5.19 循環型モデルの $a = 2, b = 4, n = 5$ の場合

自種族への依存パラメータを中程度の 5 と設定し、他種族が周囲に存在することを一切許容しない性質と、他種族を無視するような性質を合わせると、折れ曲がるようなグラフを形成した。密度が増加した 0.80 付近で変化が生じ、最終的には大きなクラスターが生じた (図 5.20)。

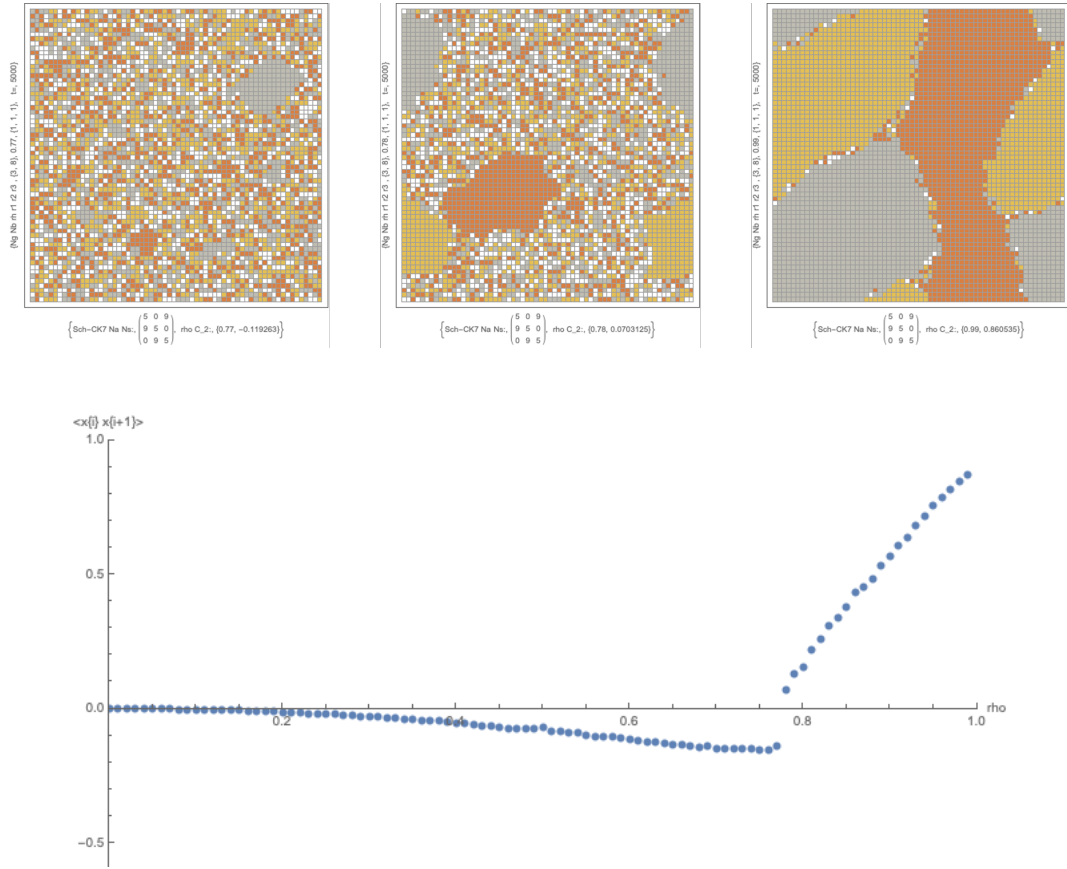


図 5.20 循環型モデルの $a = 0, b = 9, n = 5$ の場合

5.4.4 領域分割モデル

自種族への依存性が中程度、他種族への排除性が高い場合、各々のパラメータの強さの違いでクラスターの大きさが異なる結果となった。種族2と種族3のグループは一つにまとまっているのに対して、種族1は自種族への依存パラメータと他種族への排除パラメータの差が小さいことと、そのときの初期配置によって一部分離した結果が確認できた (図 5.21)。

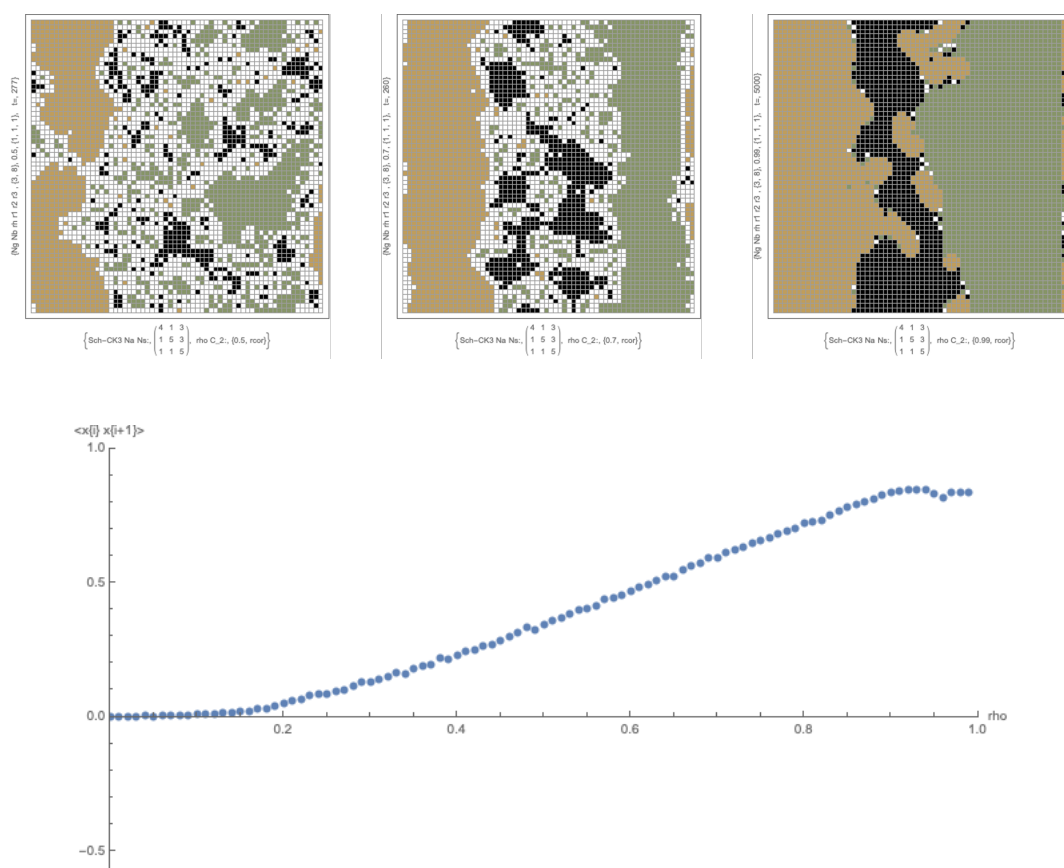


図 5.21 領域分割モデルの $a = 1, b = 4, c = 5, d = 3$ の場合

3 種族の自種族の依存性が高い状態で、2 種族の他種族の排除性が低く、1 種族のみ他種族への排除性が強い状況では、領域を 3 分割した場合、左右の種族 1 と種族 2 の間を種族 3 が彷徨うような状態になる (図 5.22)。

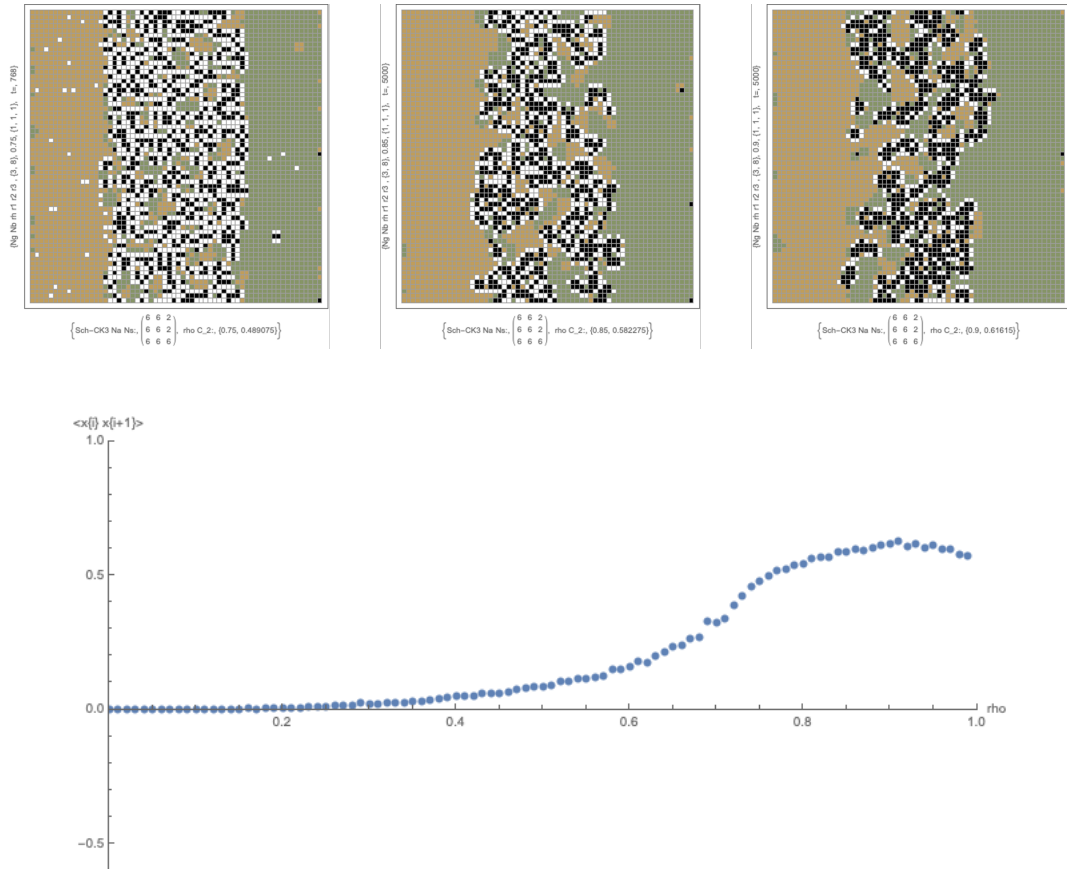
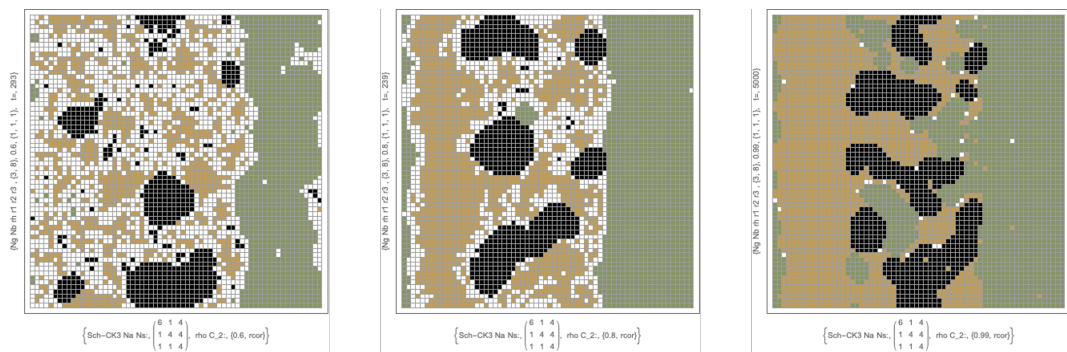


図 5.22 領域分割モデルの $a = 6, b = 6, c = 6, d = 2$ の場合

他種族への排除性が高く、自種族への依存性が中程度である種族 2 は、空間内が低密度である場合でもクラスターが形成された。他種族への排除パラメータが強い場合でも、自種族への依存性が非常に高い状態だと、中々安定しないことが種族 1 の挙動より分かった (図 5.23)。



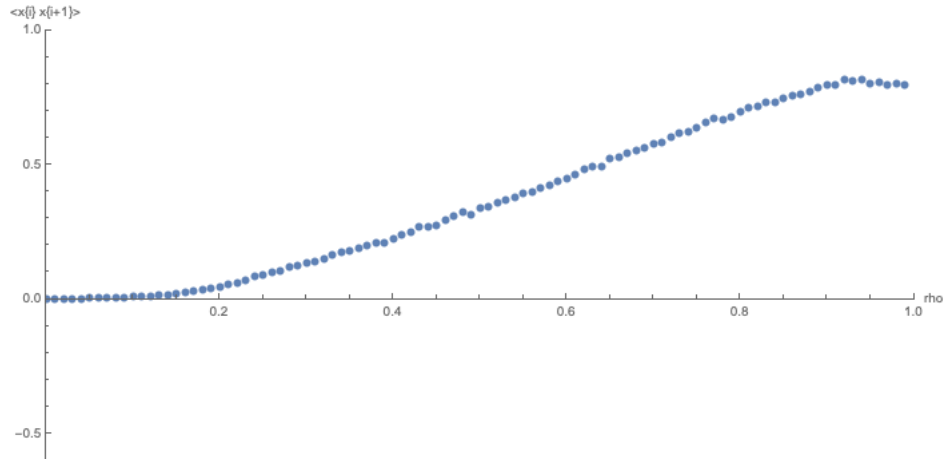


図 5.23 領域分割モデルの $a=1, b=6, c=4, d=4$ の場合

種族 3 の他種族への排除性が他の 2 種族より強く、自種族への依存性も中程度であることから、低密度の場合には種族 3 の個々のエージェントが孤立する状況となる。高密度になるにつれて種族 3 同士で固まり、比較的大きなクラスターが形成された (図 5.24)。

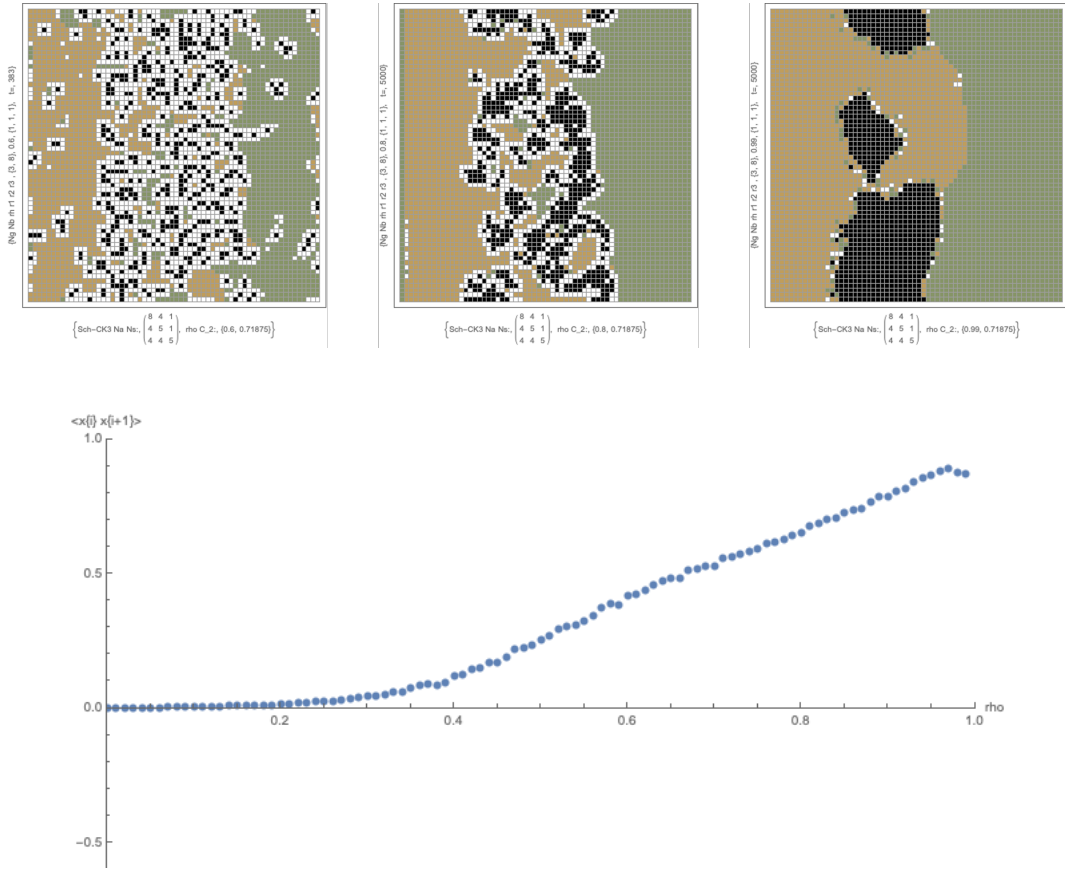


図 5.24 領域分割モデルの $a=4, b=8, c=5, d=1$ の場合

3 種族の自種族への依存性は高いが、種族 1 と種族 2 の他種族への排除性の低さに阻まれて、種族 3 が自種族で集結することができない状況となった (図 5.25)。

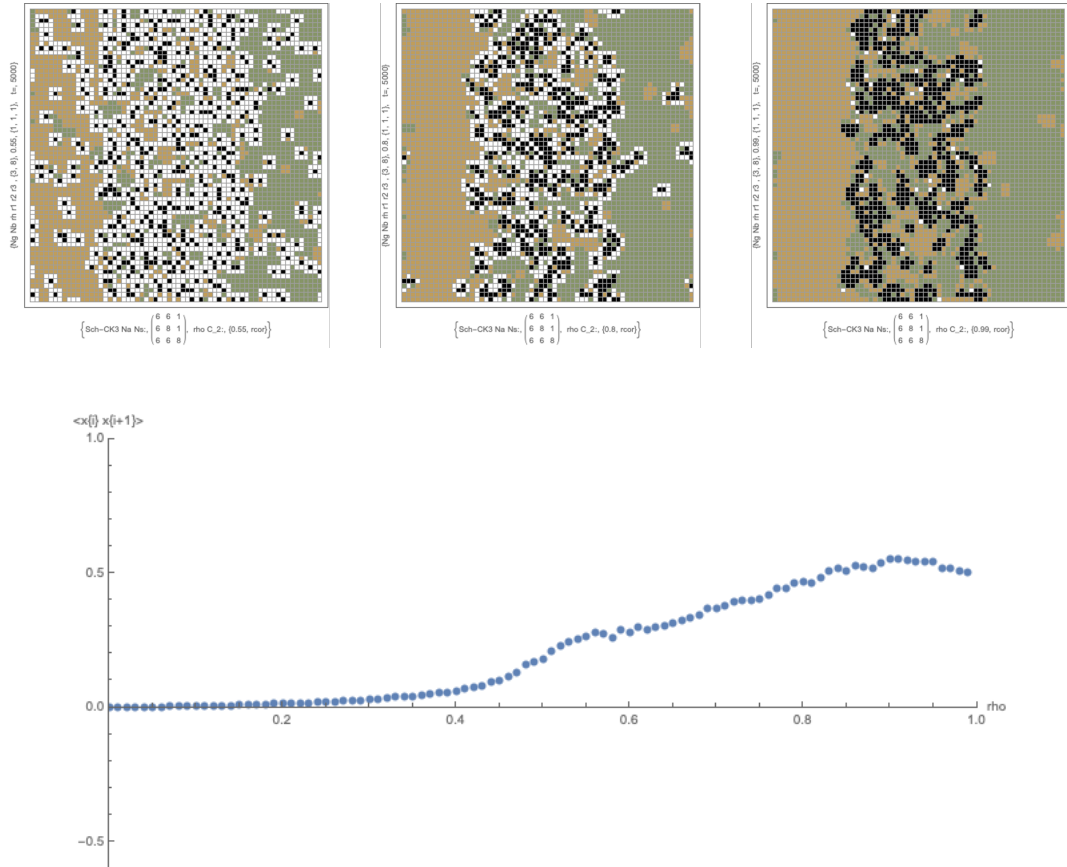
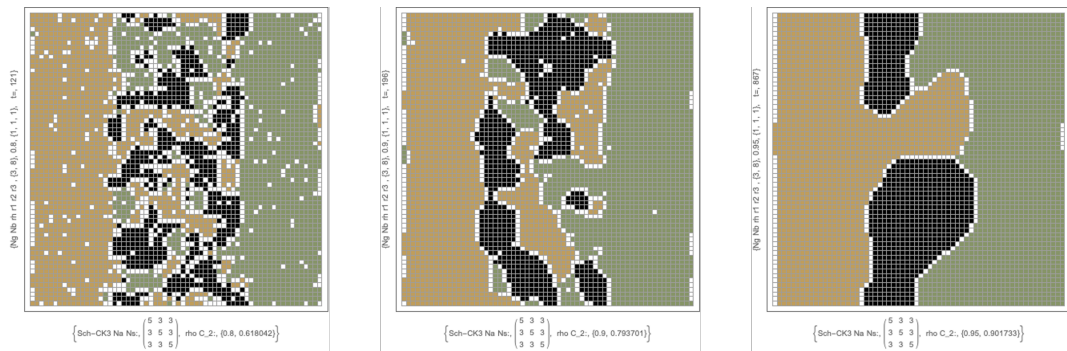


図 5.25 領域分割モデルの $a = 6, b = 6, c = 8, d = 1$ の場合

3 種族の他種族への排除パラメータを中程度である 5、自種族への依存パラメータを依存性の低い 3 に設定した。空間内の密度が上がるにつれて同種族同士の集結が強くなり、はっきりとした分居現象が確認できた (図 5.26)。



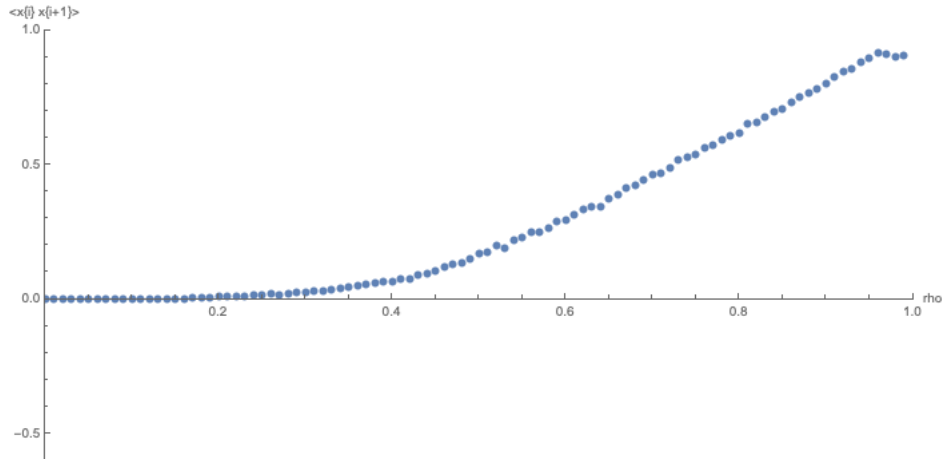
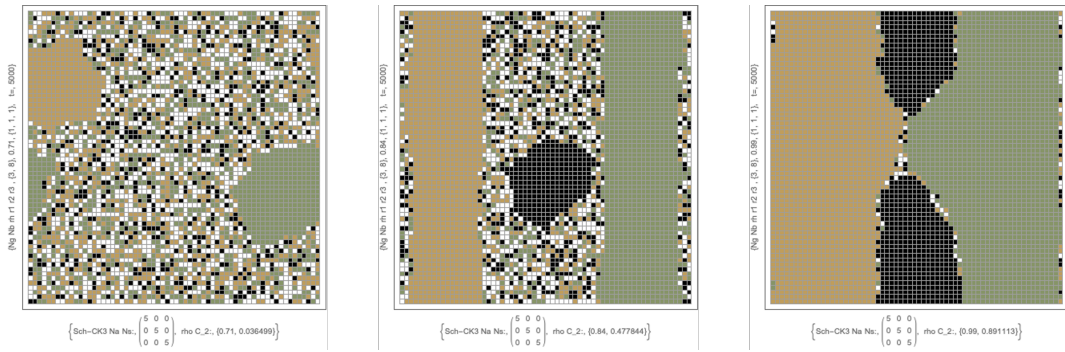


図 5.26 領域分割モデルの $a = 3, b = 5, c = 5, d = 3$ の場合

3 種族の他種族への排除パラメータを排除性が非常に高い 0、自種族への依存パラメータを依存性が中程度の 5 と設定した。両端で種族 1 と種族 2 が自種族でクラスターを形成し、その後種族 3 が中央でクラスターを形成した。領域分割モデルの中では一番はっきりと分居現象が確認できたパラメータとなった。グラフ自体は折れ曲がるような形となった (図 5.27)。



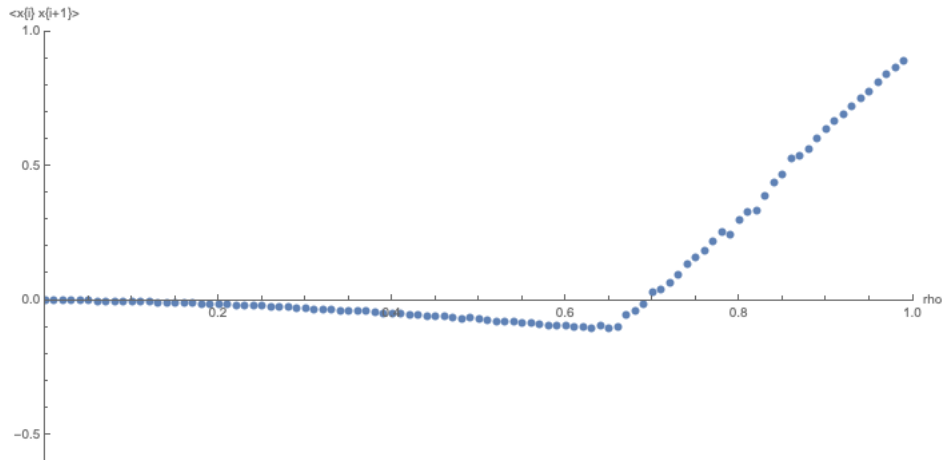


図 5.27 領域分割モデルの $a=0, b=5, c=5, d=0$ の場合

種族 2 の排除パラメータが非常に高い 0、依存パラメータが中程度の 5 で種族 3 の排除パラメータが中程度の 5、依存パラメータが中程度の 5 の場合に、種族 2 と種族 3 で縞模様を形成した。

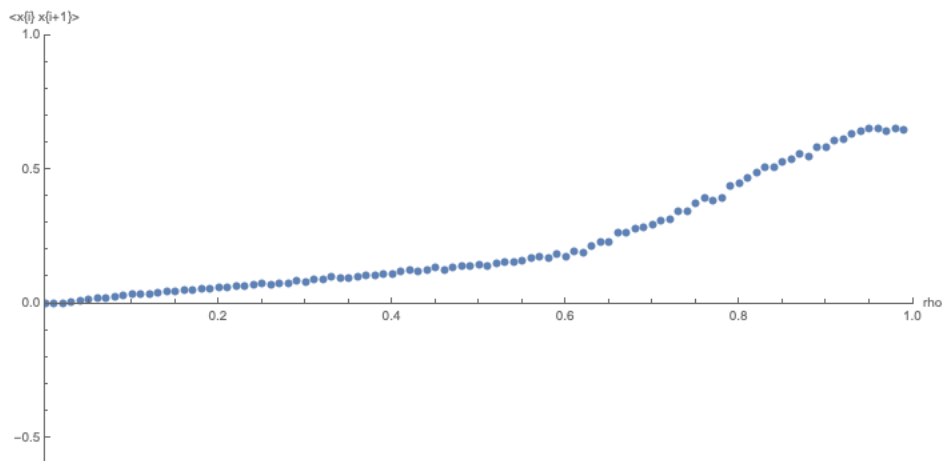
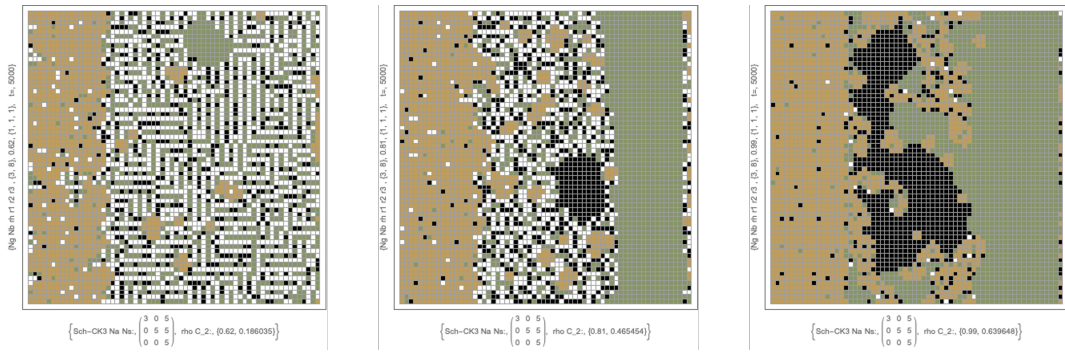


図 5.28 領域分割モデルの $a=0, b=3, c=5, d=5$ の場合

5.5 疑似一次相転移

疑似一次相転移が起こる条件は、他種族への排除パラメータが0であり、自種族への依存パラメータが4の場合である。つまり、他種族に排他的であり、同種族に中程度の依存性である場合であると言える。

5.5.1 排除モデル

他種族が周囲にいることを許容しない、すなわち排除パラメータが0、自種族へ依存性が中程度の依存パラメータが4の場合、突然強い分居が発生し、疑似一次相転移を確認できた (図 5.29)。

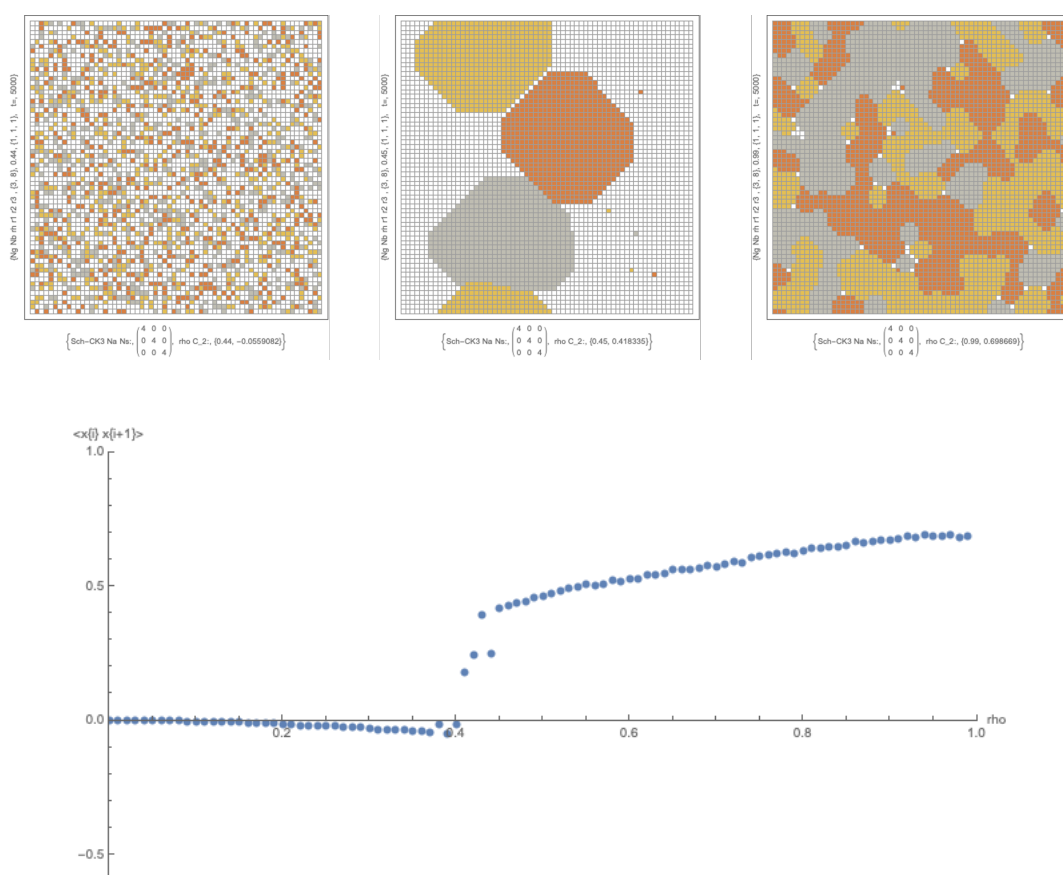


図 5.29 排除モデルの $a = 0, b = 0, c = 0, n = 4$ の場合

5.5.2 被排除モデル

他種族への排除性が自種族への依存性より弱い種族が1種族でも存在すると、全体的な分居は弱くなる (図 5.30)。

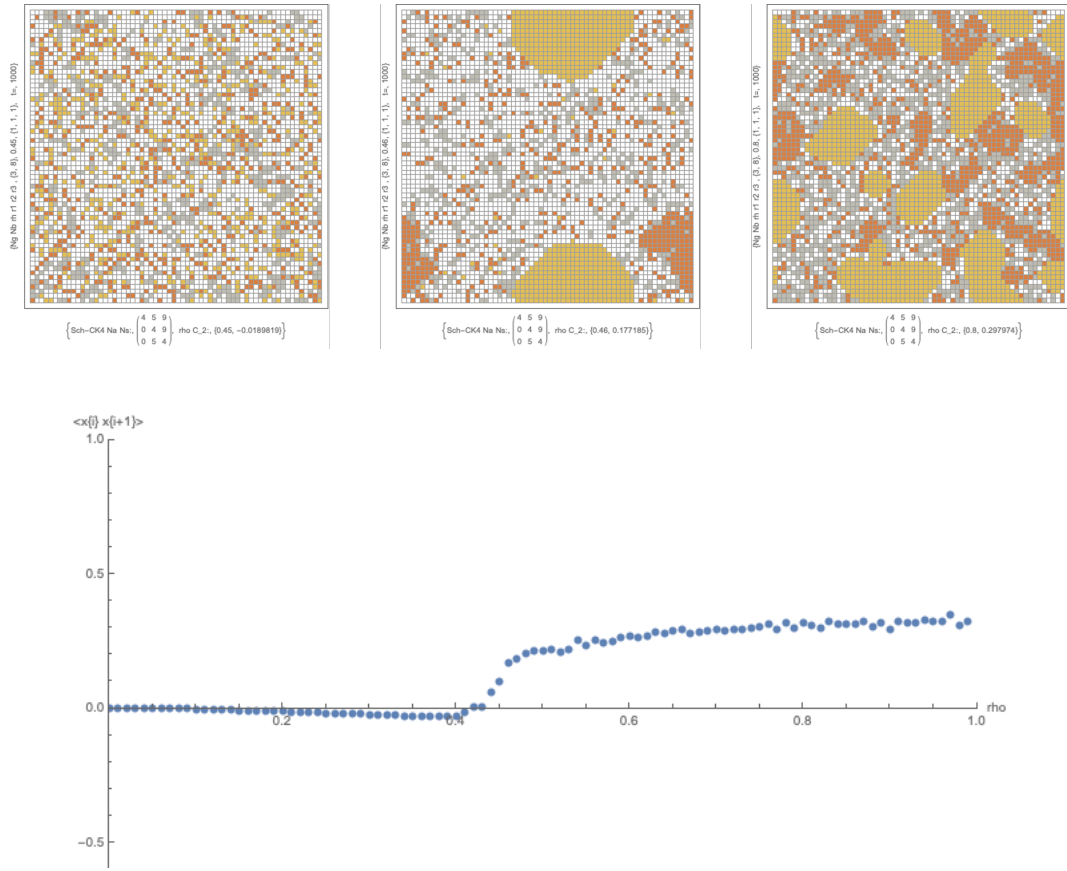
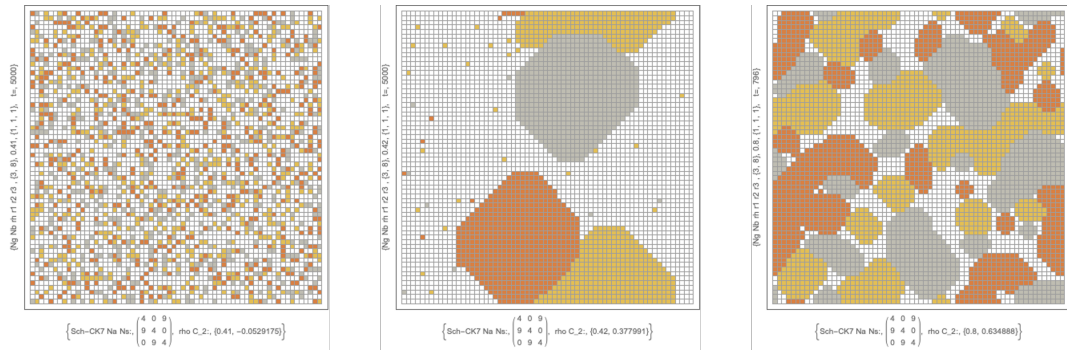


図 5.30 被排除モデルの $a = 0, b = 5, c = 9, n = 4$ の場合

5.5.3 循環型モデル

自種族への依存性が中程度で、他種族に対して一方を完全に排除するパターンと、もう一方を許容するパターンの場合、密度が 0.40 あたりから急激な分離が始まり、疑似一次相転移が確認できた (図 5.31)。



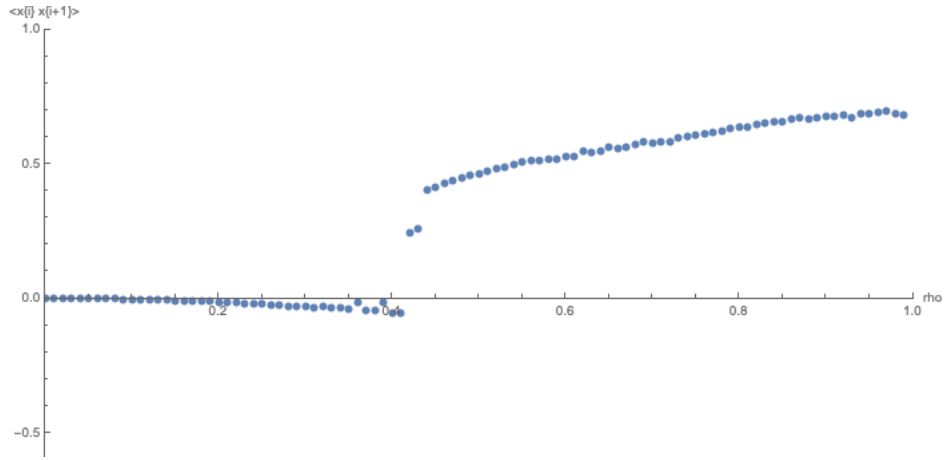
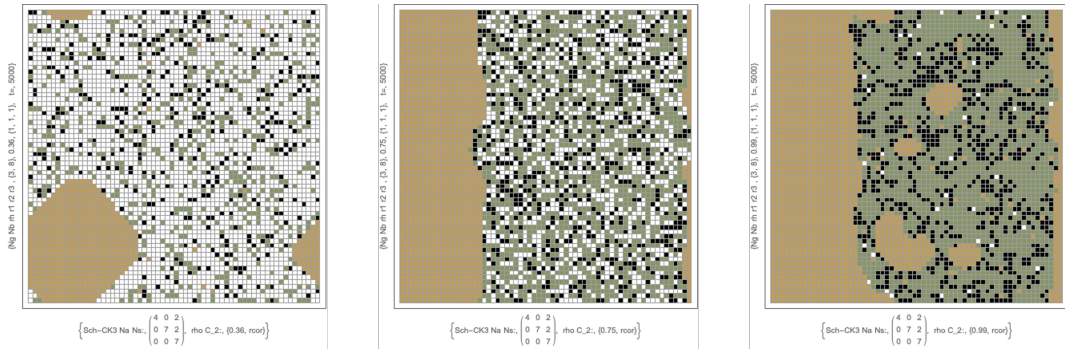


図 5.31 循環型モデルの $a = 0, b = 9, n = 4$ の場合

5.5.4 領域分割モデル

種族 1 は他種族への排除性が高く、排除パラメータは 0、自種族への依存性が中程度で、依存パラメータは 4 で、低密度の際に 1 種族だけ急激な分居を確認できた (図 5.32)。



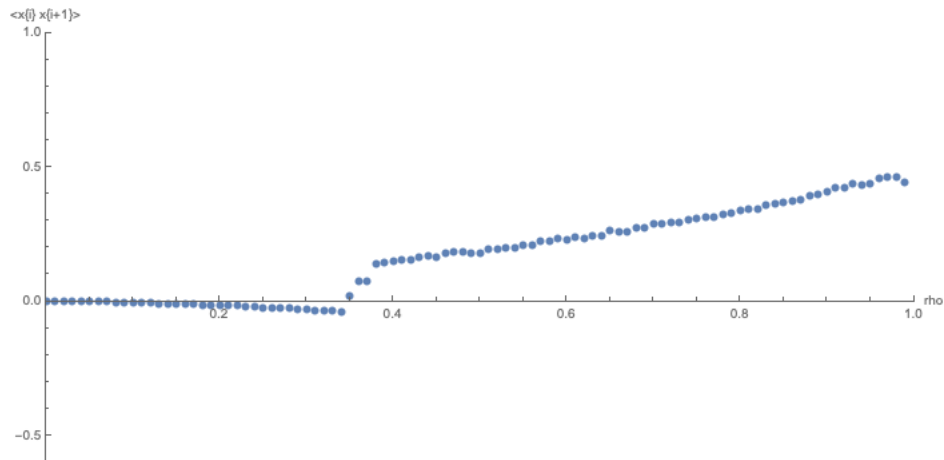


図 5.32 領域分割モデルの $a = 0, b = 4, c = 7, d = 2$ の場合

5.6 シミュレーション結果まとめ

3 種族の場合、一次相転移は、他種族への排除性のパラメータが 2、自種族への依存性のパラメータが 6～8 の場合で生じ、他種族に排他的であり、同種族に依存的な場合であると言える。

疑似一次相転移は、他種族への排除パラメータが 0、自種族への依存パラメータが 4 である場合で生じることが確認できた。

二次相転移は、他種族に対して排他的、もしくは中程度の排除性を示している場合であり、他種族への排除性より自種族への依存性が強い条件が 1 種類でも存在すれば分居現象が生じることが確認できた。

基本的な原理は、どのモデルにおいても 2 種族でのシミュレーションと大きな違いが得られなかったが、分居が生じる条件は、他種族に対して排除的であり、自種族に対する依存性が高～中程度である場合だと確認できた。また、他種族への排除性より自種族への依存性が強い条件が 1 種類でも存在する場合で分居が生じることが確認できた。

第 6 章

現実画像でのシミュレーション結果

6.1 1940 年のボスニアヘルツェゴビナ

サラエボ付近のデータを参考にする。元の画像では緑がクロアチア人、茶がムスリム人、黄がセルビア人となっている。置き換えた画像では青がクロアチア人、赤がムスリム人、緑がセルビア人となっている。

今回は以下の画像を使用した (図 6.1)。

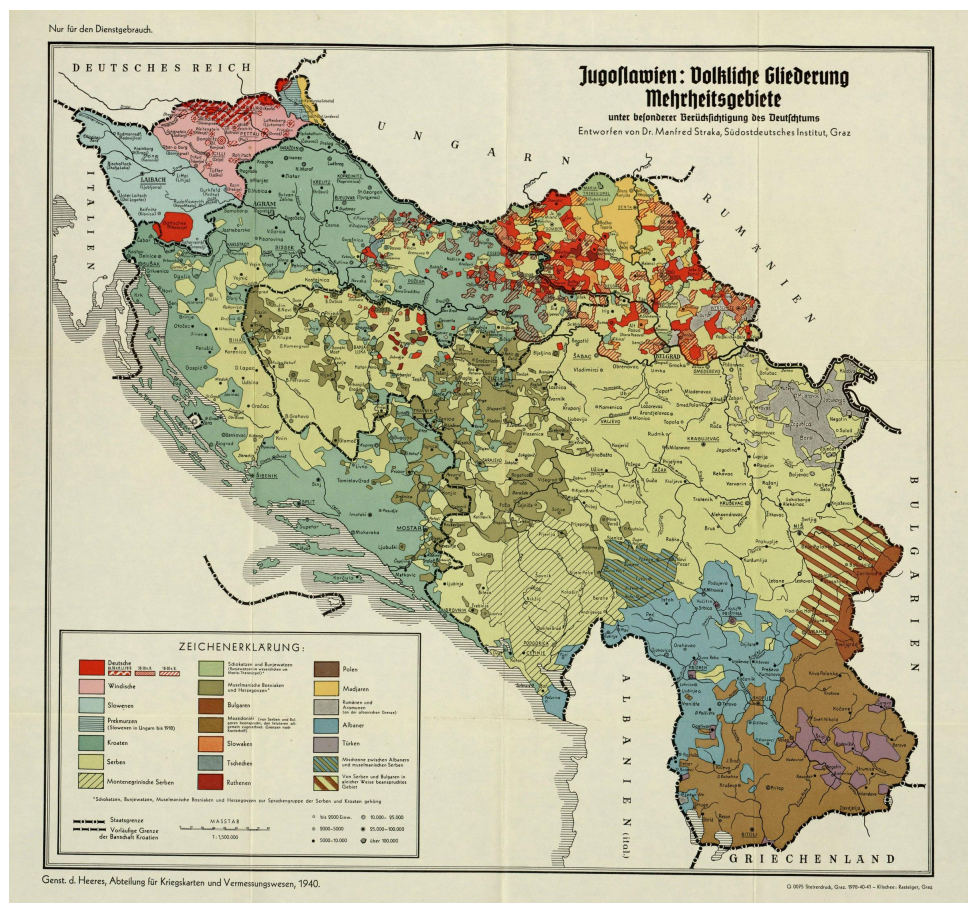


図 6.1 yugoslav 1940

1940 年での当時の出来事を考慮すると、以下のような関係性であると予想した (表 6.1)。

表 6.1 各々に対する嫌悪感

	クロアチア	ムスリム	セルビア
クロアチア	—	高～中	高
ムスリム	高～中	—	高
セルビア	高	高	—

クロアチア

セルビアに対しては、ユーゴスラビア王国成立以降、セルビアの政策に足して不満を抱くようになり、比較的に高い嫌悪感を持っていると考えられる。ムスリムに対しては、宗教・文化的に相似している点から中程度と取れるが、土地や様々な要因で対立がある場合には高～中程度の嫌悪感であると予想できる。

ムスリム

セルビアに対しては、オスマン帝国が終わった後、セルビアにムスリムが支配される側になったこと、宗教的な違いから高い嫌悪感を持っている。クロアチアに対しては、宗教・文化的に相似している点から中程度とも取れるが、政治的な要因等で衝突があった場合には高～中程度の嫌悪感であると予想できる。

セルビア

ムスリムに対して、オスマン帝国にセルビアが支配され、ムスリムが優遇されていたことから比較的高い嫌悪感にあると予想できる。クロアチアに対しては、中央集権に対して反発されていたから嫌悪感が高いと予想した。

また、今回選んだデータではすべての場所に各民族が分布しているような状況であったため、該当する地域の地形は山脈が多く存在することを考慮し、空間内の密度は 60～70 %程度だと仮定して進める。

6.1.1 実際の画像データからの検討

左図は今回使用した、1940 年のサラエボ付近の民族分布のデータを正方形に切り取ったものである。それを赤青緑の 3 色に分類し、置き換えた画像が右図である (図 6.2、図 6.3)。

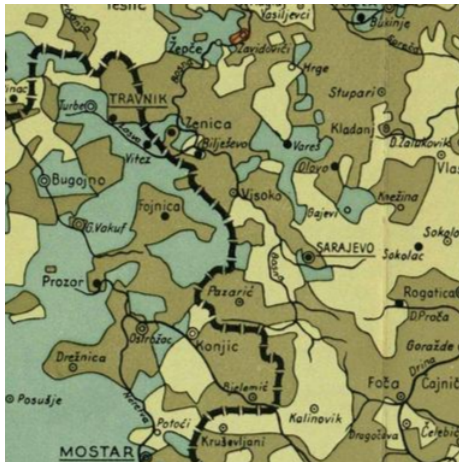


図 6.2 途中経過

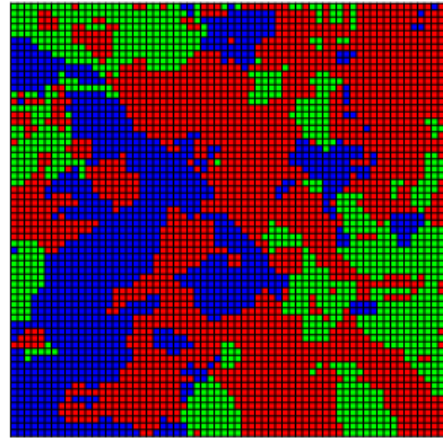


図 6.3 置き換えた画像

以下の表は仮想空間でのシミュレーションと元データとの比較である (表 6.2)。
元画像の密度と相関係数がこのようなパラメータ設定の排除モデルの密度と相関係数とほぼ一致していることから類似したパラメータであると予想できる (図 6.4)。

表 6.2 1940 年における密度と相関係数の比較

	密度	相関係数
シミュレーション結果	0.68	0.464917
元データ	0.60~0.70	0.470398

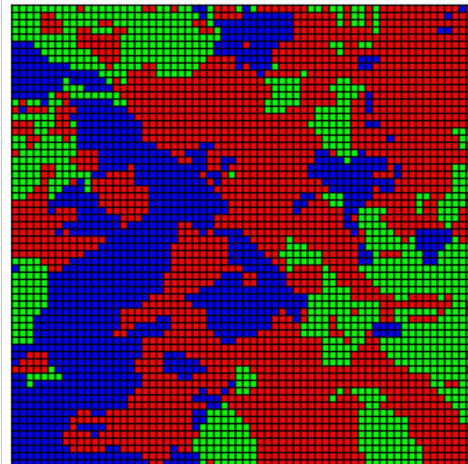
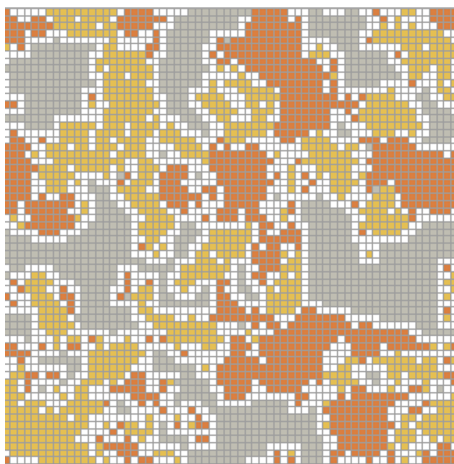


図 6.4 仮想空間と現実データの比較

6.2 1991 年のボスニアヘルツェゴビナ

サラエボ付近のデータを参考にする。

元の画像では緑がムスリム人、茶がモンテネグロ人、赤がセルビア人、黄がクロアチア人となっている。置き換えた画像では青がクロアチア人、赤がムスリム人とモンテネグロ人、緑がセルビア人、白が多数派のいない民族となっている。



図 6.5 yugoslav 1991

1991 年での当時の出来事を考慮すると、以下のような関係性であると予想した。列から行に対しての嫌悪感を以下の表に示す (表 6.3)。

表 6.3 各々に対する嫌悪感

	クロアチア	ムスリム	セルビア
クロアチア	—	高	高
ムスリム	高	—	高
セルビア	高	高	—

クロアチア

セルビアに対しては、クロアチア独立に対する阻止があり、高い嫌悪感を持っていると考えられる。ムスリムに対しては、ボスニアヘルツェゴビナを巡って領土問題が発生し、高い嫌悪感を持っていると予想できる。

ムスリム

セルビアに対しては、1945 年以降、独自のアイデンティティを確立しようとしたが、セルビアに独立を否定されたことから高い嫌悪感を持っている。クロアチアに対しては、ボスニアヘルツェゴビナを巡っての領土問題が発生し、高い嫌悪感であると予想できる。

セルビア

ムスリムに対して、オスマン帝国にセルビアが支配され、ムスリムが優遇されていたこと、ボスニアは歴史的にセルビアの土地だと思い、ボスニアの独立に反対していたことから比較的高い嫌悪感にあると予想できる。クロアチアに対しては、1941～1945 年のセルビア人虐殺の背景とセルビア同様にボスニアを狙っていたため嫌悪感が高いと予想した。

また、今回多数派のいない民族がある状況であったため、白の部分を省いて行った。白の部分を除く、空間内の密度は 0.816162 であった。そのため、その付近の密度だと仮定して検討を進める (図 6.6、図 6.7)。



図 6.6 途中経過

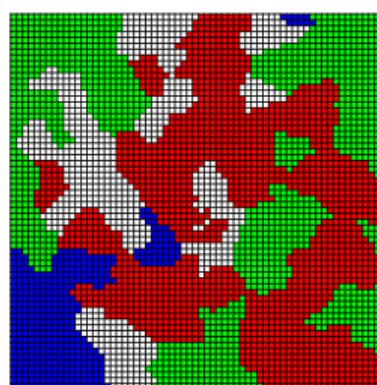


図 6.7 置き換えた画像

以下の表は仮想空間でのシミュレーションと元データとの比較である (表 6.4)。

元画像の密度と相関係数の観点から類似したものを予想した。1 つ目の結果は、排除モデルの排除パラメータが 0、依存パラメータが 4 のときである。密度は同じとなっているが相関係数に違いが見られた (図 6.8)。

また、2 つ目の結果は被排除モデルの $a = 1, b = 2, c = 3, n = 5$ の排除性が高く、依存性が中程度の場合である。密度に多少の違いが見られるが、相関係数が類似した結果となった (図 6.9)。

表 6.4 1991 年における密度と相関係数の比較

	密度	相関係数
シミュレーション結果 1	0.81	0.643921
シミュレーション結果 2	0.87	0.791687
元データ	0.816162	0.798389

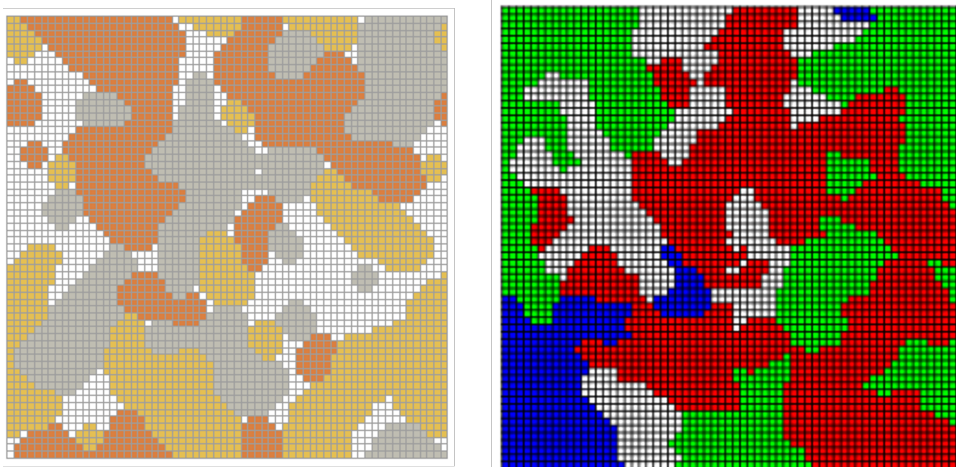


図 6.8 仮想空間と現実データの比較 1

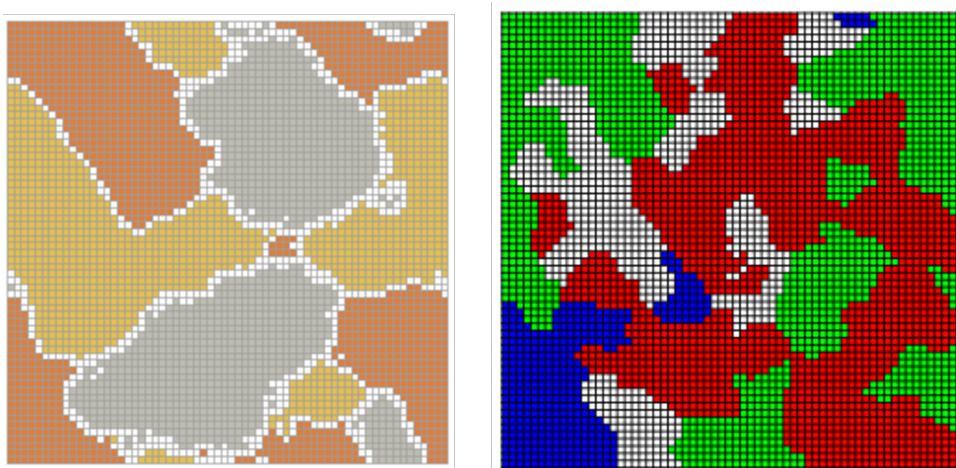


図 6.9 仮想空間と現実データの比較 2

6.2.1 ResNet-50 とコサイン類似度による評価

1940 年

相関係数、排除・依存のパラメータ、密度を基に 1940 年の 3 色に分類した画像に類似していると予想した画像を 10 枚用意した。下のヒートマップは、元画像と比較画像のコサイン類似度を算出したものである。8 番目に示した画像が元画像と一番近いという結果となり、人間の主観で判断した結果と同様の結果が得られた。

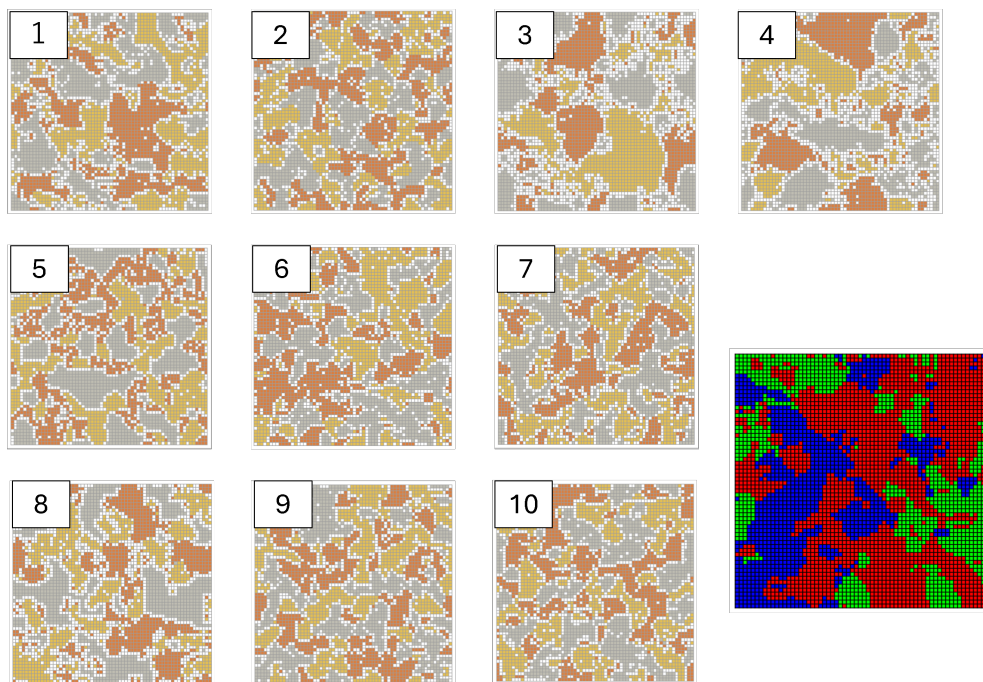


図 6.10 1940 年の画像に類似していると予想した画像

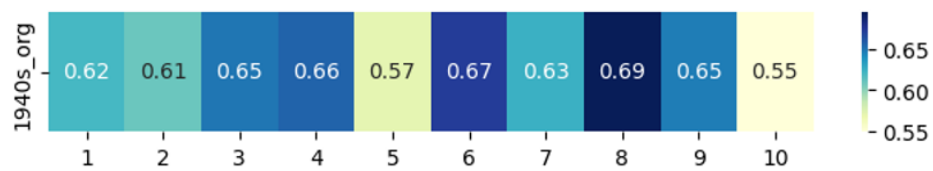


図 6.11 1940 年におけるコサイン類似度を比較したヒートマップ

1991 年

1991 も同様に類似していると予想した画像を 8 枚用意した。ヒートマップより、3 番目に示した相関係数から類似していると予測した画像が一番類似した場合であることが確認できる。また、人間の主観で密度を重視して予測した結果が元の画像から一番離れている例だという結果が得られた。単に空間内の形が類似しているような密度を見るのではなく、種族ごとの集結の仕方や相関係数も基準に見ている結果だと考えられる。

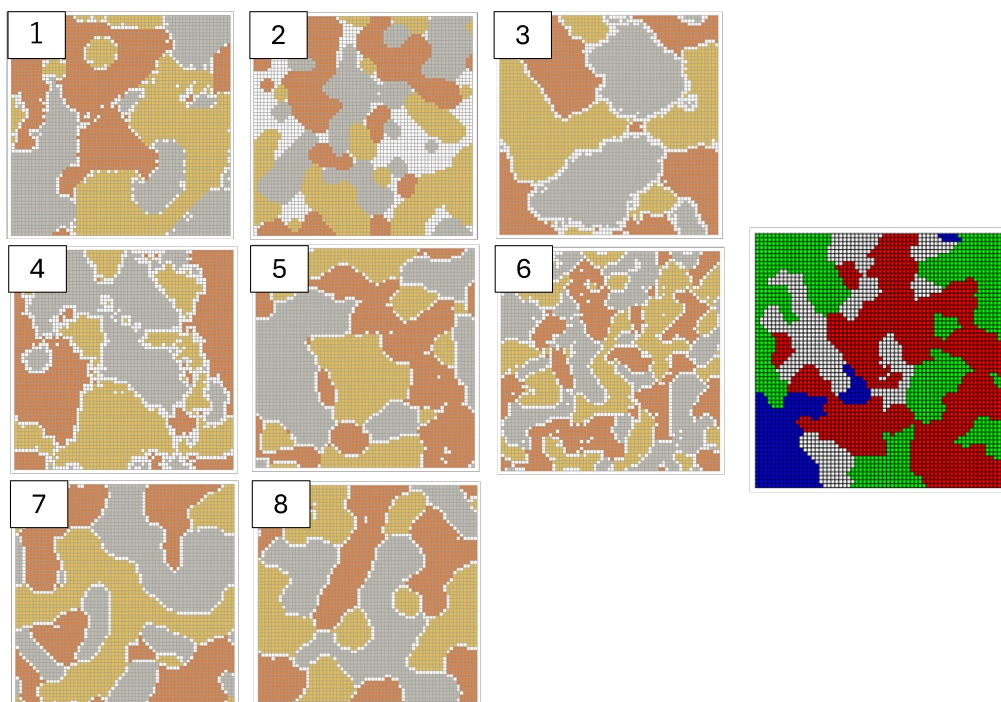


図 6.12 1991 年の画像に類似していると予想した画像

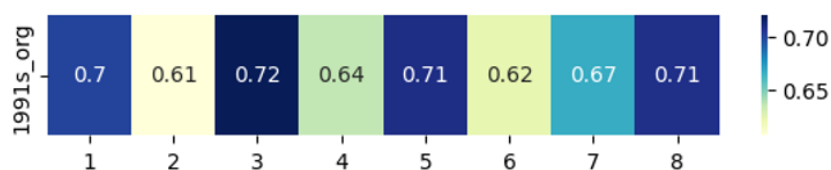


図 6.13 1991 年におけるコサイン類似度を比較したヒートマップ

6.3 現実データとの比較検討のまとめ

1940 年と 1991 年の画像データをもとに、排除モデル、被排除モデルにおいて類似したパラメータを特定することができた。しかし、実際は地形や人口密度など様々な要素が絡み合うこと、今回シミュレーションを行った 4 つのモデルでは、パラメータ数が少なく、今回のモデルだけでは完全な説明を行うことが困難である

ことが明らかとなった。

第 7 章

結論

7.1 本研究のまとめ・考察

今回、種族数を 2 種族から 3 種族へ変化させたが、排除パラメータや依存パラメータによる分居現象の大きな変化は見られなかった。種族数を変化させるのではなく、パラメータ数を変化させることが分居現象の変化に繋がると考えられる。

また、1940 年と 1991 年の画像データと類似した仮想空間シミュレーションでのパラメータを特定することができた。しかし、実際の問題に落とし込む際には、地形や人口密度など様々な要素があるため、今回の 4 つのモデルでは、分居が生じた条件を完全に説明することは困難であることが明らかになった。

7.2 今後の課題

課題として、複雑な要素を組み込みモデルの拡張をすること、依存排除パラメータを詳しく設定すること、人口統計や地理情報を活用することが挙げられる。

また、今回はあるセルに対して 8 近傍で行ったが、より研究の精度を上げるために、近傍の範囲を広げることや、空間内全体を評価していく。

謝辞

本研究を進めるにあたり、高知工科大学 大学院工学研究科 基盤工学専攻 環境数理コース 全卓樹教授には、指導教員として終始熱心なご指導をいただきました。研究の方向性を示していただくとともに、難航した際には適切なアドバイスをいただき、研究を進めることができました。心から感謝申し上げます。

また、高知工科大学 大学院工学研究科 基盤工学専攻 マテリアル工学コース 新田紀子准教授には ResNet-50 とコサイン類似度による評価の際に丁寧にご指導いただき、本研究の質の向上に大きく繋がりました。この場をお借りして、お礼申し上げます。

最後に、高知工科大学 大学院工学研究科 理工学コースの全ての先生方にも深く感謝申し上げます。講義、日々の交流を通じて得た知識や考え方は、本研究において大きな支えとなりました。

本研究を進める中で、多くの方々のご支援とご協力をいただいたことに、改めて深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Thomas Crombie Schelling, "Dynamic models of Segregation," *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 1, 1971, pp. 143-186.
- [2] 小田垣孝, 佐野幸恵, 山崎義弘, 山本健, 『社会物理学 ―モデルでひもとく社会の構造とダイナミクス―』, 共立出版, 2022 年.
- [3] Generalstab des Heeres, Abteilung für Kriegskarten und Vermessungswesen, & Dr. Manfred Straka (1911–1990), *Ethnic Map of Kingdom of Yugoslavia, 1940* [地図], 1940. 取得元: <http://geographie.ipt.univ-paris8.fr/rubriks/carto/cartorub/cartes/cartesnum/34957.jpg>
- [4] U.S. Central Intelligence Agency, *The Former Yugoslavia: A Map Folio, Ethnic map of Yugoslavia based on 1991 census data* [地図], 1992. 取得元: <http://www.lib.utexas.edu/maps/europe/yugoslav.jpg>
- [5] 尾木七海, 都市居住二種族モデルと相転移, 卒業論文, 高知工科大学, 2023 年.