スパースセットと ZMDD を用いた XCC に対するアルゴリズム

比嘉　元大　　【 アルゴリズム研究室 】

1　はじめに

色付き厳密被覆問題 (Exact Covering with Colors, XCC) は制約充足問題を包含する問題で，様々な組合せ問題を表現できる．XCC ソルバとして Knuth が提案した DLX や SSXCC があるが，入力サイズが膨大となり扱えないものがある．XCC の入力を Zero-suppresed Multi-valued Decision Diagram (ZMDD) として圧縮して受け取り，ZMDD 上で探索する手法を松本らが提案している [松本 26]．本稿では，ZMDD をスパースセット (Sparse Set, SS) [Briggs 93] を用いて表現することにより，XCC のバックトラックにおける復元動作を高速に行う手法を提案する．

2　XCC

XCC は XC を拡張した問題であり，XC の アイテム集合をプライマリアイテムの集合 U_P と セカンダリアイテムの集合 U_S に分割し，セカンダリアイテムに色を付与したものである．U_P の各元は丁度一度被覆しなければならず，U_S の各元は高々一度被覆すればよい．ただし，色付きの U_S の元は同色に限り複数回被覆してもよい．式 (1) では，$\{p, r, x{:}A, y\}, \{q, x{:}A\}$ の組合せが解である．

$$
\begin{aligned}
&U_P = \{p, q, r\},\ U_S = \{x, y\},\\
&\mathcal{F} = \{\{p, q, x, y{:}A\}, \{p, r, x{:}A, y\},\\
&\qquad \{p, x{:}B\}, \{q, x{:}A\}, \{r, y{:}B\}\}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

3　ZMDD と SS

ZMDD は多値を扱えるように ZDD を拡張したデータ構造である．ZMDD で表現した XCC インスタンスは，頂点がアイテム，枝が色，根から ⊤ への経路が $\mathcal{F}$ の元にそれぞれ対応する．図 1 では，$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{0} q \xrightarrow{1} \top$ の経路が $\{x{:}A, q\}$ に対応する．

SS は集合の表現と集合演算を高速に行うためのデータ構造である．特に，元の削除と削除後に状態を復元する操作が高速に行える点が特徴であり，図 2 に示すように 2 種の配列からなる．

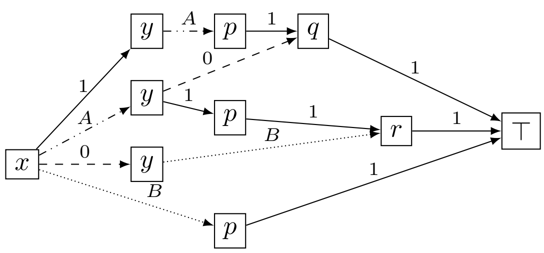

図 1　式 (1) に対する ZMDD の表現

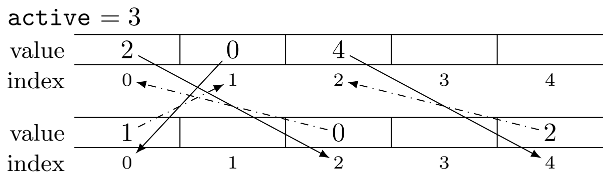

図 2　集合 $\{0, 2, 4\}$ を表すスパースセット

表 1　提案手法の被覆操作と復元操作の実行時間割合

インスタンス	COVER	UNCOVER
Aalphablocks	91.69%	7.89%
Bbizarre	59.02%	14.81%
Upentacubes345	86.78%	10.41%

4　提案手法

XCC を解くアルゴリズムは，まず U_P の元とこれを含む $\mathcal{F}$ の元を 1 つ選ぶ．次にその $\mathcal{F}$ の元に含まれる各アイテムに対し，色付きならば色のみ異なるアイテム，色なしならば自身を含む $\mathcal{F}$ の元に対応する ZMDD 上の全ての経路を取り除くように頂点及び枝を削除する．その後，縮小した ZMDD と U_P に対し再帰的に上記の操作を行う．$U_P = \emptyset$，あるいは U_P の元を含む $\mathcal{F}$ の元に対応する経路が存在しないときバックトラックし，直前に削除した頂点及び枝，U_P の元を復元する．

データ構造は，ZMDD に現れる各アイテムに対応する頂点，各頂点に対する入枝，出枝の 3 種の集合と U_P を表現する SS を構築，統合したものである．

5　計算機実験

XCC ソルバを実行した際の被覆操作を行う関数 cover と，復元操作を行う関数 uncover の実行時間全体における割合を表 1 に示す．表 1 より，cover に対して uncover が高速に行えていることが分かる．

6　おわりに

本稿では，ZMDD と SS を用いた XCC に対するアルゴリズムを提案した．今後の課題に， 各アイテムを含む $\mathcal{F}$ の元の数を計算する処理の高速化がある．

参考文献

[Briggs 93] Briggs, P. and Torczon, L.: An efficient representation for sparse sets, *LOPLAS*, Vol. 2, pp. 59 – 69 (1993)

[松本 26] 松本 吏司, 原田 崇司:XCC を表現する ZMDD 上での探索, 人工知能学会研究会資料 人工知能基本問題研究会, Vol. 135, pp. 36–41 (2026)