

「平成 26 年度 高知県高等学校数学コンクール問題」

1. 次の各問に答えよ。

- (1) 平面に、どの 2 本も平行でなく、どの 3 本も 1 点で交わらない n 本の直線がある。この n 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか求めよ。
- (2) 空間に、どの 2 平面も平行でなく、どの 3 平面も 1 直線を共有せず、どの 4 平面も 1 点で交わらない n 枚の平面がある。この n 枚の平面によって空間はいくつの部分に分けられるか求めよ。

2. 数 15 は $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ および $4 + 5 + 6 = 15$ のように連続する自然数の和で 2 通りに表される。2014 をこのように 2 つ以上の連続する自然数の和で表す方法をすべて求めよ。また、2014 を 2 つ以上の連続する正の偶数の和、あるいは正の奇数の和で表す方法があればすべて求めよ。

3. 次の各問に答えよ。

- (1) 1 から 360 までの整数のうち、2 でも 3 でも 5 でも割り切れない数の個数を求めよ。
- (2) 4 個の異なる素数 q_1, q_2, q_3, q_4 と 4 個の自然数 n_1, n_2, n_3, n_4 に対して、 $N = q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} q_4^{n_4}$ とおく。1 から N までの整数のうち、 q_1, q_2, q_3, q_4 のいずれでも割り切れない数の個数を求めよ。
- (3) m 個の異なる素数 $q_1, q_2, \dots, q_m$ と m 個の自然数 $n_1, n_2, \dots, n_m$ に対して、 $N = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_m^{n_m}$ とおく。1 から N までの整数のうち、 q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) のいずれでも割り切れない数の個数を求めよ。

4. 関数 $y = f(x)$ について, $0 \leq s, 0 \leq t, s + t = 1$ ならば

$$f(sx_1 + tx_2) \leq sf(x_1) + tf(x_2)$$

が成り立つとき, $f(x)$ は下に凸であるという。次の各問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ が下に凸であれば, $0 \leq t_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ に対し

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) 関数 $f(x)$ が微分可能であれば

$$y = f(x) \text{ は下に凸} \iff f'(x) \text{ は広義単調増加} \left(x_1 < x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2) \right)$$

が成り立つことを証明せよ。

- (3) 実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して, 不等式

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

が成り立つことおよび

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} \iff a_1 = a_2 = \dots = a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

5. n を 4 以上の自然数として, n 面体を考える。 n 個の面の面積を $S_1, S_2, \dots, S_n$ として

$$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_n \quad , \quad S_1 + S_2 + \dots + S_n = 1$$

が成り立っているとする。 n 面体の体積は 0 ではないとして, S_k ($k = 1, 2, \dots, n$) のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。ただし, 必要ならば次のことを用いても良い。

2 つの平面 α, β のなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$), 平面 α 上の図形 A の面積を T とするとき, 図形 A の平面 β への正射影の面積は $T \cos \theta$ である。