問題 1

次の各問に答えよ。

(1) 平面に，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらない n 本の直線がある。このの n 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか求めよ。

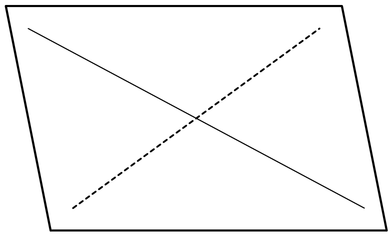
(2) 空間に，どの 2 平面も平行でなく，どの 3 平面も 1 直線を共有せず，どの 4 平面も 1 点で交わらない n 枚の平面がある。この n 枚の平面によって空間はいくつの部分に分けられるか求めよ。

（解答）

(1) 平面が n 本の直線によって，a_n 個の部分に分けられるとすると，明らかに

$$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = 4$$

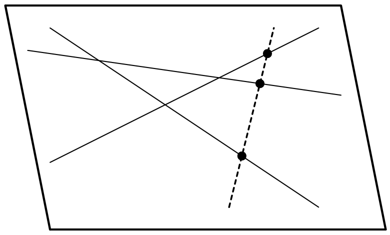
である。



一般に，平面に n 本の直線があるとき，$n+1$ 本目の直線を引くと，すでにある n 本の直線と交わって，n 個の交点ができる。この n 個の交点によって，$n+1$ 本目の直線は $n+1$ 個の線分や半直線に分かれるがそのおのおのが平面の部分を 1 つずつ増やすから

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)$$

が成り立つ。よって，$n \geqq 2$ のとき



4 本目の直線には 3 つの交点ができる

$$\begin{array}{rl}
 & a_2 = a_1 + 2 \\
 & a_3 = a_2 + 3 \\
 & \cdots\cdots \\
+) & a_n = a_{n-1} + n \\
\hline
 & a_n = a_1 + (2 + 3 + \cdots + n)
\end{array}$$

$$\therefore \quad a_n = 1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

この式で $n = 1$ とおくと

$$\frac{1^2+1+2}{2} = 2$$

だから，すべての自然数 n について

$$a_n = \frac{n^2+n+2}{2}$$

が成り立つ。

(2) 空間が n 枚の平面によって b_n 個の部分に分かれるとすると、明らかに

$$b_1=2 \quad , \quad b_2=4$$

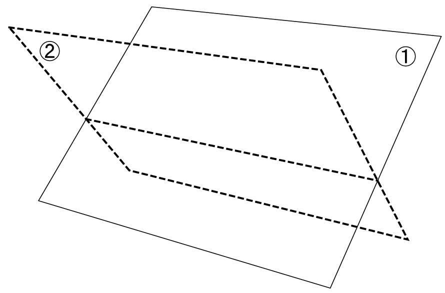
である。

一般に，空間に n 枚の平面があるとき，$n+1$ 枚目の平面 α を入れると，α はすでにある n 枚の平面と交わるから，平面 α 上に n 本の交線ができる。それらの n 本の直線は (1) の条件をみたすから，平面 α はこれら n 本の直線によって a_n 個のかけらに分かれる。

これら a_n 個のかけらが，n 枚の平面によって分けられた部分の数を 1 つずつ増やすから，

$$b_{n+1}=b_n+a_n$$

が成り立つ。(1) と同様に，$n \geqq 2$ のとき



$$\begin{array}{rl} & b_2=b_1+a_1 \\ & b_3=b_2+a_2 \\ & \cdots\cdots \\ +) & b_n=b_{n-1}+a_{n-1} \\ \hline \end{array}$$

$$b_n=b_1+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$$

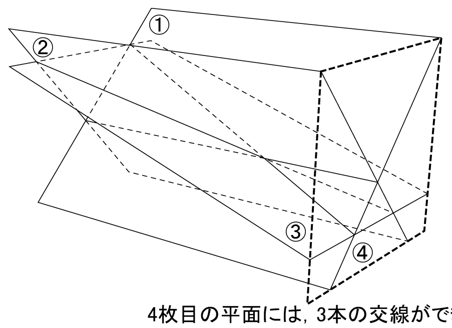
$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}\left\{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}+2(n-1)\right\}$$

$$=2+\frac{1}{12}\left\{n(2n^2-3n+1)+3n(n-1)+12(n-1)\right\}$$

$$=2+\frac{1}{12}(2n^3+10n-12)$$

$$=\frac{n^3+5n+6}{6}$$



4枚目の平面には，3本の交線ができる

この式で $n=1$ とおくと

$$\frac{1^3+5\cdot 1+6}{6}=2$$

だから，すべての自然数 n について

$$b_n=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

が成り立つ。

問題 2 数 15 は $1+2+3+4+5=15$ および $4+5+6=15, 7+8=15$ のように連続する自然数の和で３通りに表される。 2014 をこのように２つ以上の連続する自然数の和で表す方法をすべて求めよ。また， 2014 を２つ以上の連続する正の偶数の和，あるいは正の奇数の和で表す方法があればすべて求めよ。

(解答例)

(自然数の和)

自然数 a を初項，公差 1 の等差数列の項数 $n(\geqq 2)$ の和として 2014 が

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n-1)=2014$$

と表されたとすると，

$$\frac{1}{2}n\{a+(a+n-1)\}=2014$$
$$n(n+2a-1)=2\cdot 2014=2^2\cdot 19\cdot 53$$

となる。 $2 \leqq n < n+2a-1$ であり，さらに $n+2a-1$ は n に奇数を加えたものだから

n が偶数ならば $n+2a-1$ は奇数， n が奇数ならば $n+2a-1$ は偶数

となることに注意すると，以下のように場合分けできる：

$$\text{ア)}\begin{cases}n=2^2\\ n+2a-1=19\cdot 53\end{cases},\quad \text{イ)}\begin{cases}n=19\\ n+2a-1=2^2\cdot 53\end{cases},\quad \text{ウ)}\begin{cases}n=53\\ n+2a-1=2^2\cdot 19\end{cases}$$

ア) $n=2^2=4, n+2a-1=19\cdot 53=1007$ のとき，

$$a=\frac{1007-3}{2}=502$$

このとき，$\underline{502+503+504+505=2014}$ となる。

イ) $n=19, n+2a-1=2^2\cdot 53=212$ のとき，

$$a=\frac{212-18}{2}=97$$

このとき， $\underline{97+98+\cdots+115=2014}$ となる。

ウ) $n=53, n+2a-1=2^2\cdot 19=76$ のとき，

$$a=\frac{76-52}{2}=12$$

このとき， $\underline{12+13+\cdots+64=2014}$ となる。

(偶数の和)

偶数 $2a\,(a\geqq 1)$ を初項，公差 2 の等差数列の項数 $n(\geqq 2)$ の和として 2014 が

$$2a+(2a+2)+(2a+4)+\cdots+\{2a+2(n-1)\}=2014$$

と表されたとすると，両辺を 2 で割って

$$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n-1)=1007$$
$$\frac{1}{2}n\{a+(a+n-1)\}=1007$$
$$n(n+2a-1)=2\cdot 1007=2\cdot 19\cdot 53$$

となる。 $2\leqq n<n+2a-1$ であることと， n と $n+2a-1$ の偶奇が異なることに注意すると以下の３通りに場合分けできる：

$$\text{ア)}\begin{cases}n=2\\ n+2a-1=19\cdot 53\end{cases},\quad \text{イ)}\begin{cases}n=19\\ n+2a-1=2\cdot 53\end{cases},\quad \text{ウ)}\begin{cases}n=2\cdot 19\\ n+2a-1=53\end{cases}$$

ア)　$n=2, n+2a-1=19\cdot 53=1007$ のとき,

$$a=\frac{1007-1}{2}=503$$

このとき，$2\cdot 503+(2\cdot 503+2\cdot 1)=\underline{1006+1008=2014}$ となる。

イ)　$n=19, n+2a-1=2\cdot 53=106$ のとき,

$$a=\frac{106-18}{2}=44$$

このとき，$2\cdot 44+(2\cdot 44+2)+\cdots+(2\cdot 44+2\cdot 18)=\underline{88+90+\cdots+124=2014}$ となる。

ウ)　$n=2\cdot 19=38, n+2a-1=53$ のとき,

$$a=\frac{53-37}{2}=8$$

このとき，$2\cdot 8+(2\cdot 8+2)+\cdots+(2\cdot 8+2\cdot 37)=\underline{16+18+\cdots+90=2014}$ となる。

(奇数の和)

奇数 $2a-1\,(a\geqq 1)$ を初項，公差 2 の等差数列の項数 $n(\geqq 2)$ の和として 2014 が

$$(2a-1)+(2a+1)+(2a+3)+\cdots+(2a-1+2(n-1))=2014$$

と表されたとすると,

$$\frac{1}{2}n\left\{2(2a-1)+2(n-1)\right\}=2014$$
$$n(n+2a-2)=2014=2\cdot 19\cdot 53$$

となる。n と $n+2a-2$ の偶奇が一致することに注意すると，上の等式を満たすような自然数 a, n は存在しないことがわかる。

従って，2014 を２つ以上の連続する 正の奇数の和で表すことはできない。

偶数の和になる場合と奇数の和になる場合をまとめて扱うことも出来る：

自然数 a を初項，公差 2 の等差数列の項数 $n(\geqq 2)$ の和として 2014 が

$$a+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+2(n-1))=2014$$

と表されたとすると

$$\frac{1}{2}n\left\{2a+2(n-1)\right\}=2014$$
$$n(n+a-1)=2014=2\cdot 19\cdot 53$$

となる。$2\leqq n\leqq n+a-1$ であることに注意すると，以下の３通りに場合分けできる：

$$\text{ア)}\begin{cases}n=2\\ n+a-1=19\cdot 53\end{cases},\quad \text{イ)}\begin{cases}n=19\\ n+a-1=2\cdot 53\end{cases},\quad \text{ウ)}\begin{cases}n=2\cdot 19\\ n+a-1=53\end{cases}$$

ア)　$n=2, n+a-1=19\cdot 53=1007$ のとき,

$$a=1007-1=1006$$

このとき，$\underline{1006+1008=2014}$ となる。

イ)　$n=19, n+a-1=2\cdot 53=106$ のとき,

$$a=106-18=88$$

このとき，$88+(88+2)+\cdots+(88+2\cdot 18)=\underline{88+90+\cdots+124=2014}$ となる。

ウ)　$n=2\cdot 19=38, n+a-1=53$ のとき,

$$a=53-37=16$$

このとき，$16+(16+2)+\cdots+(16+2\cdot 37)=\underline{16+18+\cdots+90=2014}$ となる。

問題 3

> 次の各問に答えよ。
>
> (1) 1 から 360 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない数の個数を求めよ。
>
> (2) 4 個の異なる素数 q_1，q_2，q_3，q_4 と 4 個の自然数 n_1，n_2，n_3，n_4 に対して，$N = q_1^{n_1}q_2^{n_2}q_3^{n_3}q_4^{n_4}$ とおく。1 から N までの整数のうち，q_1 でも q_2 でも q_3 でも q_4 でも割り切れない数の個数を求めよ。
>
> (3) m 個の異なる素数 q_1，$q_2, \cdots$，q_m と m 個の自然数 n_1，$n_2, \cdots$，n_m に対して，$N = q_1^{n_1}q_2^{n_2}\cdots q_m^{n_m}$ とおく。1 から N までの整数のうち，$q_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$ のどれでも割り切れない数の個数を求めよ。

（答） (1) 96 個　　(2) $q_1^{n_1-1}q_2^{n_2-1}q_3^{n_3-1}q_4^{n_4-1}(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)(q_4-1)$ 個

(3) $q_1^{n_1-1}q_2^{n_2-1}\cdots q_m^{n_m-1}(q_1-1)(q_2-1)\cdots(q_m-1)$ 個

（解説）

(3) を証明する前に次の展開公式とその系を紹介する。

展開公式

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) = x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$$

ここで $b_r = \displaystyle\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^n} a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r} \quad (r = 1, 2, \cdots, n)$

$T_r^n = \Big\{\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_r) \mid t_1, t_2, \cdots, t_r$ は $1 \leqq t_1 < t_2 < \cdots < t_r \leqq n$ を満たす自然数$\Big\}$

系

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_m) = 1 + \sum_{r=1}^{m}(-1)^r \sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m} a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}$$

(3) の証明

1 から $N = q_1^{n_1}q_2^{n_2}\cdots q_m^{n_m}$ までの整数の集合を U とする。U の部分集合 A に対し，A の要素の個数を $n(A)$ で表す。また集合 A に対し，U を定義域とする関数

$$\mathbf{1}_A(k) = \begin{cases} 1 & : \quad k \in A \\ 0 & : \quad k \in \overline{A} \end{cases}$$

を定める。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_A(k) = n(A)$ が成り立つ。

1 から N までの整数のうち q_j で割り切れる数の集合を A_j とする。求める個数は $n\Big(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}\Big)$ である。ド・モルガンの法則より

$$n\Big(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}\Big) = n\Big(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\Big) = \sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}}(k)$$

が成り立つ。

(3) の証明の続き

$$\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}}(k)=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{\overline{A_1}}(k)\times\mathbf{1}_{\overline{A_2}}(k)\times\cdots\times\mathbf{1}_{\overline{A_m}}(k)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\Big(1-\mathbf{1}_{A_1}(k)\Big)\times\Big(1-\mathbf{1}_{A_2}(k)\Big)\times\cdots\times\Big(1-\mathbf{1}_{A_m}(k)\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m}\mathbf{1}_{A_{t_1}}(k)\mathbf{1}_{A_{t_2}}(k)\cdots\mathbf{1}_{A_{t_r}}(k)\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m}\sum_{k=1}^{N}\mathbf{1}_{A_{t_1}\cap A_{t_2}\cap\cdots\cap A_{t_r}}(k)$$

$$=N+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m}n\Big(A_{t_1}\cap A_{t_2}\cap\cdots\cap A_{t_r}\Big)$$

$$=N+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m}\frac{N}{q_{t_1}q_{t_2}\cdots q_{t_r}}$$

$$=N\left\{1+\sum_{r=1}^{m}(-1)^r\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^m}\frac{1}{q_{t_1}}\times\frac{1}{q_{t_2}}\times\cdots\times\frac{1}{q_{t_r}}\right\}$$

$$=N\Big(1-\frac{1}{q_1}\Big)\times\Big(1-\frac{1}{q_2}\Big)\times\cdots\times\Big(1-\frac{1}{q_m}\Big)$$

$$=q_1^{n_1}q_2^{n_2}\cdots q_m^{n_m}\Big(\frac{q_1-1}{q_1}\Big)\times\Big(\frac{q_2-1}{q_2}\Big)\times\cdots\times\Big(\frac{q_m-1}{q_m}\Big)$$

$$=q_1^{n_1-1}q_2^{n_2-1}\cdots q_m^{n_m-1}(q_1-1)(q_2-1)\cdots(q_m-1)$$

（証明終）

展開公式の証明

$$(*)\quad \boxed{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^n}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\right)x^{n-r}}$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する。

[I] $n=1$ のとき　$(x+a_1)=x^1+\sum_{\boldsymbol{t}\in T_1^1}a_{t_1}$ より正しい。

[II] $n=k$ のとき　$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)=x^k+\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\right)x^{k-r}$

が成立すると仮定する。

展開公式の証明の続き

$n=k+1$ のとき

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)(x+a_{k+1})=\left(x^k+\sum_{r=1}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k-r}\right)(x+a_{k+1})$$

$$=x^{k+1}+\sum_{r=1}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k+1-r}+a_{k+1}x^k+\sum_{r=1}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}a_{k+1}\Big)x^{k-r}$$

$$=x^{k+1}+(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})x^k+\sum_{r=2}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k+1-r}$$
$$+\sum_{r=1}^{k-1}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}a_{k+1}\Big)x^{k-r}+a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}$$

$$=x^{k+1}+(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})x^k+\sum_{r=2}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k+1-r}$$
$$+\sum_{r=2}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_{r-1}^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_{r-1}}a_{k+1}\Big)x^{k+1-r}+a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}$$

$$=x^{k+1}+(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})x^k$$
$$+\sum_{r=2}^{k}\left(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}+\sum_{\boldsymbol{t}\in T_{r-1}^k}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_{r-1}}a_{k+1}\right)x^{k+1-r}+a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}$$

$$=x^{k+1}+\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_1^{k+1}}a_{t_1}\Big)x^k+\sum_{r=2}^{k}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^{k+1}}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k+1-r}+\sum_{\boldsymbol{t}\in T_{k+1}^{k+1}}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_{k+1}}x^0$$

$$=x^{k+1}+\sum_{r=1}^{k+1}\Big(\sum_{\boldsymbol{t}\in T_r^{k+1}}a_{t_1}a_{t_2}\cdots a_{t_r}\Big)x^{k+1-r}$$

よって $n=k+1$ のときも $(*)$ 式が成り立つ。

[I],[II] より，すべての自然数 n に対し $(*)$ 式が成り立つ。　　　　（証明終）

問題 4 関数 $y=f(x)$ について

$$0 \leqq s,\ 0 \leqq t,\ s+t=1 \implies f(sx_1+tx_2) \leqq sf(x_1)+tf(x_2)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は下に凸であるという。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が下に凸であれば，
$0 \leqq t_i\ (i=1,\cdots,n)$，$t_1+\cdots+t_n=1$ に対し

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\ \leqq\ t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が微分可能であれば

$$f \text{ は下に凸} \iff f' \text{ は広義単調増加} \big(x_1<x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leqq f'(x_2)\big)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 $a_1,\cdots,a_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$$

が成り立つことおよび

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n} \iff a_1=\cdots=a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

この問題で本当に伝えたかったことは「凸集合と関数との関連およびその応用」についてである。

そこで以下では問題 4 を少々修正して証明をつける。

定義. (i) 平面内の集合 D は，条件

$$\mathrm{P},\mathrm{Q} \in D \implies \text{線分}\,\mathrm{PQ} \subset D$$

が成立するとき，凸集合であるといわれる。

(ii) 区間 I で定義された関数 $y=f(x)$ は，集合

$$D=\{(a,b) \mid a \in I,\ f(a) \leqq b\}$$

が凸集合であるとき，下に凸であるといわれる。

(iii) 区間 I で定義された関数 $y=g(x)$ は，条件

$$x_1,x_2 \in I,\ x_1<x_2 \implies g(x_1) \leqq g(x_2)$$

が成立するとき，広義単調増加であるといわれる。

注意. この定義からも「下に凸」という用語は「凸集合」という用語に起因していることが解る。

問題 4.1. 以上の定義に従って次の各問に答えよ。

(1) D を凸集合とする。このとき，$(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in D$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば

$$(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n,\ t_1 b_1 + \cdots + t_n b_n) \in D$$

となることを証明せよ。

(2) 区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ が下に凸であるとする。このとき，$a_1, \cdots, a_n \in I$ かつ $t_1, \cdots, t_n \geqq 0,\ t_1 + \cdots + t_n = 1$ であれば，不等式

$$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) \ \leqq \ t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 開区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ が微分可能であれば

$$f \text{ は下に凸} \iff f' \text{ は広義単調増加}$$

が成り立つことを証明せよ。

(4) 実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

が成り立つことおよび

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

以下では問題4.1に解答をつける。次の記号と補題を用いる。

記号. 区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ に関する記号 $f > 0$ および $f \geqq 0$ を次のように定める：

(i) 任意の $x \in I$ に対して $f(x) > 0$ が成り立つとき，$f > 0$ と表す。

(ii) 任意の $x \in I$ に対して $f(x) \geqq 0$ が成り立つとき，$f \geqq 0$ と表す。

このとき，次の補題を証明することができる。

補題. 開区間 I で定義された関数 $y = g(x)$ が微分可能であれば

$$g' > 0 \implies g \text{ は単調増加}$$
$$g' \geqq 0 \implies g \text{ は広義単調増加}$$

が成り立つ。

注意. (i) 補題の証明には高等学校数学Ⅲで学ぶ平均値の定理が必要となるので，ここでは略す。

(ii)「g は単調増加 $\Rightarrow g' > 0$」は成り立たない。

反例. 実数全体で定義された関数 $g(x) = x^3$ は微分可能で単調増加であるが $g' > 0$ は成り立たない。

(iii)「g は広義単調増加 $\Rightarrow g' \geqq 0$」は成り立つ。

証明. 関数 g が広義単調増加であれば，任意の $x \in I$ と実数 h に対して

$$x + h \in I,\ h \neq 0 \implies \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geqq 0$$

となるから

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geqq 0$$

が解る。即ち $g' \geqq 0$ が成り立つ。

注意. 高等学校数学Ⅱの教科書に

$$g' > 0 \implies g \text{ は単調増加}$$

が成り立つことは（証明はついていないが）書かれているので，以下ではこれを用いてよいことにする。また

$$g' \geqq 0 \implies g \text{ は広義単調増加}$$

が成り立つことは教科書には書かれていないが，上と類似の結果であるから，これも用いてよいことにする。

解答. (1) 点の個数 n に関する数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき，$t_1=1$ より

$$t_1a_1+\cdots+t_na_n=t_1a_1=a_1$$
$$t_1b_1+\cdots+t_nb_n=t_1b_1=b_1$$

となるから

$$(t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ t_1b_1+\cdots+t_nb_n)=(a_1,b_1)\in D$$

が解る。

[2] $n-1$ $(n\geqq 2)$ まで成り立つと仮定する。このとき

$$s_i=\frac{t_i}{t_1+\cdots+t_{n-1}}\qquad(1\leqq i\leqq n-1)$$

とおけば

$$s_1,\cdots,s_{n-1}\geqq 0,\quad s_1+\cdots+s_{n-1}=1$$

となるから，数学的帰納法の仮定より

$$(s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1},\ s_1b_1+\cdots+s_{n-1}b_{n-1})\in D$$

が解る。従って

$$x=s_1a_1+\cdots+s_{n-1}a_{n-1}=\frac{t_1a_1+\cdots+t_{n-1}a_{n-1}}{t_1+\cdots+t_{n-1}}$$
$$y=s_1b_1+\cdots+s_{n-1}b_{n-1}=\frac{t_1b_1+\cdots+t_{n-1}b_{n-1}}{t_1+\cdots+t_{n-1}}$$

とおけば，$(x,y)\in D$ かつ

$$t_1a_1+\cdots+t_{n-1}a_{n-1}=(t_1+\cdots+t_{n-1})x=(1-t_n)x$$
$$t_1b_1+\cdots+t_{n-1}b_{n-1}=(t_1+\cdots+t_{n-1})y=(1-t_n)y$$

となるから

$$t_1a_1+\cdots+t_{n-1}a_{n-1}+t_na_n=(1-t_n)x+t_na_n$$
$$t_1b_1+\cdots+t_{n-1}b_{n-1}+t_nb_n=(1-t_n)y+t_nb_n$$

が解る。即ち，点 $(t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ t_1b_1+\cdots+t_nb_n)$ は点 (x,y) と点 (a_n,b_n) を結ぶ線分上に存在する。従って，定義 (i) より

$$(t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ t_1b_1+\cdots+t_nb_n)\in D$$

が解る。

[1], [2] より，すべての自然数 n に対して

$$(t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ t_1b_1+\cdots+t_nb_n)\in D$$

となることが示された。

(2) 関数 f に対し，定義 (ii) の $D=\{(a,b)\mid a\in I,\ f(a)\leqq b\}$ をとれば，D は凸集合となる。従って

$$\big(a_1,f(a_1)\big),\cdots,\big(a_n,f(a_n)\big)\in D$$

であることに注意すれば，(1) より

$$\bigl(t_1a_1+\cdots+t_na_n,\ t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)\bigr)\in D$$

が解る。このことは

$$f(t_1a_1+\cdots+t_na_n)\ \leqq\ t_1f(a_1)+\cdots+t_nf(a_n)$$

を示す。

(3) ひとつずつ示す。

$\Rightarrow$: 関数 f が下に凸であると仮定し，条件 $a_1<a_2$ を満たす a_1, $a_2\in I$ を任意にとる。このとき

Step 1. $f'(a_1)\leqq\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}$ が成り立つ。

証明. $\mathrm{A}_1\bigl(a_1,f(a_1)\bigr)$, $\mathrm{A}_2\bigl(a_2,f(a_2)\bigr)$ とおくと，A_1, $\mathrm{A}_2\in D$ より線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\subset D$ が解る。また，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の方程式は

$$y=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1)+f(a_1)$$

であるから，$a_1\leqq x\leqq a_2$ であれば

$$f(x)\leqq\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_1)+f(a_1)$$

となる。従って特に $a_1<x\leqq a_2$ であれば

$$\frac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1}\leqq\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}$$

となることが解る。ここで $x\to a_1$ $(x>a_1)$ とすれば

$$f'(a_1)\leqq\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}$$

が解る。

Step 2. $\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}\leqq f'(a_2)$ が成り立つ。

証明. 直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の方程式は

$$y=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}(x-a_2)+f(a_2)$$

と表すこともできることに注意すれば，Step 1 と同様に示せるので，ここでは略す。

Step 1, Step 2 より

$$a_1,a_2\in I,\ a_1<a_2\ \Longrightarrow\ f'(a_1)\leqq f'(a_2)$$

が成り立つことが解った。即ち，導関数 f' は広義単調増加であることが示された。

$\Leftarrow$：関数 f に対して，導関数 f' が広義単調増加であると仮定し，$D = \{(a,b) \mid a \in I,\ f(a) \leqq b\}$ とおく。任意に $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in D$ をとり

$$\mathrm{P}(a_1, b_1), \quad \mathrm{Q}(a_2, b_2) \quad (a_1 \leqq a_2)$$

とおくと

$$f(a_1) \leqq b_1, \quad f(a_2) \leqq b_2$$

となる。これより $a_1 = a_2$ であれば線分 $\mathrm{PQ} \subset D$ となることが解る。従って，以下では $a_1 < a_2$ と仮定してよい。また

$$\mathrm{P}_0\big(a_1, f(a_1)\big), \quad \mathrm{Q}_0\big(a_2, f(a_2)\big)$$

とおくと $\mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0 \in D$ となる。このとき

Step 3. 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0 \subset D$ となる。

証明. 区間 I で定義された関数 $y = g(x)$ を

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(x - a_1) + f(a_1)\right) \qquad (x \in I)$$

により定義すれば

$$g(a_1) = f(a_1) - \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(a_1 - a_1) - f(a_1) = 0$$
$$g(a_2) = f(a_2) - \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(a_2 - a_1) - f(a_1) = 0$$
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \qquad (x \in I)$$

となる。従って，関数 f' が広義単調増加であることから，g' も広義単調増加となることが解る。即ち

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \implies g'(x_1) \leqq g'(x_2)$$

が成り立つ。

ここで，条件

$$g(x_0) > 0 \text{ となる } x_0 \in [a_1, a_2] \text{ が存在する} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

が成り立つと仮定する。

① すべての $x \in [a_1, x_0]$ に対して $g'(x) < 0$ となるとき：補題より，関数 g は区間 $[a_1, x_0]$ で単調減少となるから $g(a_1) > g(x_0) > 0$ となる。これは $g(a_1) = 0$ に矛盾する。

② $g'(x_1) \geqq 0$ となる $x_1 \in [a_1, x_0]$ が存在するとき：$x_1 \leqq x \leqq a_2$ であれば $0 \leqq g'(x_1) \leqq g'(x)$ となる。補題より，関数 g は区間 $[x_1, a_2]$ で広義単調増加となるから $0 < g(x_0) \leqq g(a_2)$ となる。これは $g(a_2) = 0$ に矛盾する。

①, ② いずれにしても矛盾が生ずるから，条件 $(*)$ は成り立たないことが解る。従って，任意の $x \in [a_1, a_2]$ に対して $g(x) \leqq 0$ となることが示された。このことは

$$f(x) \leqq \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(x - a_1) + f(a_1) \qquad (a_1 \leqq x \leqq a_2)$$

を示すから，線分 $\mathrm{P_0Q_0} \subset D$ となることが解る。

Step 4. 線分 $\mathrm{PQ} \subset D$ となる。

証明. 線分 PQ 上の点 (x, y) を任意にとると

$$y = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}(x - a_1) + b_1 \qquad (a_1 \leqq x \leqq a_2)$$

と表される。また

$$y_0 = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1}(x - a_1) + f(a_1)$$

とおけば，Step 3 より $(x, y_0) \in D$ となることが解る。このとき

$$y - y_0 = \frac{b_2 - f(a_2)}{a_2 - a_1}(x - a_1) + \frac{b_1 - f(a_1)}{a_2 - a_1}(a_2 - x) \geqq 0$$

となるから $f(x) \leqq y_0 \leqq y$ が解る。このことは $(x, y) \in D$ を示す。

以上により，D が凸集合であることが示され，関数 f が下に凸であることが証明された。

(4) 実数全体で定義された関数 $f(x) = x^2$ は，$f'(x) = 2x$ となることと (3) より，下に凸であることが解る。従って (2) で

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$$

とおけば，不等式

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

が成り立つことが解る。さらに

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} - \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i - a_j)^2$$

と変形できることに注意すれば

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つことも解る。 (証明終)

発展

高等学校数学Ⅲを学んだ後に，問題 4.1 の関連事項として，以下の問題に挑戦して頂きたい。

問題 4.2. 平均値の定理を学んだ後，補題に証明をつけよ。

問題 4.3. 2 階導関数（= 第 2 次導関数）を学んだ後，次の定理と系を証明せよ。

定理 1. 開区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ の 2 階導関数 f'' が存在すれば

$$f \text{ は下に凸} \iff f' \text{ は広義単調増加} \iff f'' \geqq 0$$

が成り立つ。

系. 定理 1 と同じ仮定のもと

$$f'' > 0 \implies f \text{ は下に凸}$$

が成り立つ。

注意. 高等学校数学Ⅲでは，微分可能な関数 $y = f(x)$ に対して，導関数 f' が単調増加であるとき $y = f(x)$ は下に凸であると定義している。ここでの定義とは異なるので注意が必要である。

問題 4.4. 対数関数の導関数について学んだ後，次の定理を証明せよ。

定理 2. (1) 区間 $(0, +\infty)$ で定義された関数 $y = -\log x$ は下に凸である。

(2) 負でない実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \ \leqq \ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

および

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \ = \ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \iff a_1 = \cdots = a_n$$

が成り立つ。

問題 5 n を 4 以上の自然数として, n 面体を考える。n 個の面の面積を $S_1, S_2, \ldots, S_n$ として $S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots \geqq S_n, \quad S_1 + S_2 + \cdots + S_n = 1$ が成り立っているとする。n 面体の体積は 0 ではないとして, $S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。ただし, 必要ならば次のことを用いても良い。
2 つの平面 α, β のなす角を $\theta \quad (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$, 平面 α 上の図形 A の面積を T とするとき, 図形 A の平面 β への正射影の面積は $T \cos\theta$ である。

解答

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \leqq & S_1 < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2(n-1)} < & S_2 < \frac{1}{2}, \\ 0 < & S_k < \frac{1}{k} \quad (k = 3, 4, \ldots, n-1), \\ 0 < & S_n \leqq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

以下の議論の要点を述べておく。まず, n 面体の存在については考慮せずに S_k のみたす不等式を導く。次にその S_k の不等式をみたす n 面体が実際に存在することを示す。その n 面体は n 個の面の面積は全て同じか 2 つの値しか持たないもので実現される。S_k を大きな値を持つグループに入れた時は k 個の大きな面と $(n-k)$ 個の小さな面を貼り合わせた立体が作れるかを考察し，S_k を小さな値を持つグループに入れた時は $(k-1)$ 個の大きな面と $(n-k+1)$ 個の小さな面を貼り合わせた立体が作れるかを考察することになる。

1. S_1 について
   n 面体の内部からどの方向に半直線を伸ばしても，必ずある面と交わる。よって n 面体の 1 つの面 $S_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ に垂直な直線は必ず他の面と交わる。よって S_k 以外の面の S_k を含む平面への正射影の和は S_k よりも大きいか等しい。特に S_1 について

$$S_1 \leqq \sum_{i=2}^{n} S_i \cos\theta_i.$$

   ここで, θ_i は 面 S_1 と面 S_i のなす角で $0 \leqq \theta_i \leqq \frac{\pi}{2} \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$ である。
   $0 \leqq \cos\theta_i \leqq 1$ であるので,

$$S_1 \leqq \sum_{i=2}^{n} S_i \cos\theta_i \leqq \sum_{i=2}^{n} S_i$$

   であるが, 全ての θ_i が 0 だと n 面体ができないので, $\cos\theta_i < 1$ となる θ_i が存在する。よって

$$S_1 < \sum_{i=2}^{n} S_i$$

   両辺に S_1 を加えてから両辺を 2 で割ると,

$$S_1 < \frac{1}{2}$$

   また, $S_1 \geqq S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ より

$$\begin{aligned} nS_1 &\geqq 1 \\ S_1 &\geqq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{n} \leqq S_1 < \frac{1}{2}$$

2. S_2 について
   $S_2 \leqq S_i \quad (i = 2, \ldots, n)$ より, この $n-1$ 個の不等式を辺々加え

$$(n-1)S_2 \geqq \sum_{i=2}^{n} S_i$$

両辺に S_1 を加え変形すると

$$S_1 + (n-1)S_2 \geqq \sum_{i=1}^{n} S_i = 1$$

$$S_2 \geqq \frac{1-S_1}{n-1}$$

ここで, S_1 についての考察より

$$S_1 < \frac{1}{2}$$

$$1 - S_1 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-S_1}{n-1} > \frac{1}{2(n-1)}$$

$$S_2 > \frac{1}{2(n-1)}$$

ふたたび $S_1 < \dfrac{1}{2}$ より, $S_2 \leqq S_1$ とあわせて

$$S_2 < \frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2(n-1)} < S_2 < \frac{1}{2}$$

3. $S_k \quad (k = 3, 4, \ldots, n-1)$ について
   $S_k \leqq S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ より, この k 個の不等式を辺々加えれば

$$kS_k \leqq \sum_{i=1}^{k} S_i < 1$$

より

$$S_k < \frac{1}{k}$$

各面の面積は正であることとあわせて

$$0 < S_k < \frac{1}{k}$$

4. S_n について
   $S_n \leqq S_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$ より, この n 個の不等式を辺々加えれば

$$nS_n \leqq \sum_{i=1}^{n} S_i = 1$$

各面の面積は正であることとあわせて

$$0 < S_n \leqq \frac{1}{n}$$

先程導いた不等式をみたす S_k の値を面 S_k が面積として持つような n 面体が存在することを示す。

1. $k=1$ のとき
   先程の不等式

$$\frac{1}{n} \leqq S_1 < \frac{1}{2}$$

をみたす S_1 に対し, 面 S_1 を 正 $(n-1)$ 角形とし, 面 S_1 を底面とする適切な高さの直錐体を作ればよい。実際, 面積 S_1 の正 $(n-1)$ 角形は, その中心から 1 辺への距離を l とすると正 $(n-1)$ 角形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned}S_1 =&(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l\tan\left(\frac{2\pi}{n-1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot l\\ =&(n-1)l^2\tan\frac{\pi}{n-1}\end{aligned}$$

であるので, $l=\sqrt{\dfrac{S_1}{(n-1)\tan\frac{\pi}{n-1}}}$ とすればよい。
また, この 正 $(n-1)$ 角形を底面とした直錐体の高さを h とすれば錐体の側面積は $1-S_1$ は

$$\begin{aligned}1-S_1 =&(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l\tan\left(\frac{2\pi}{n-1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{l^2+h^2}\\ =&(n-1)l\sqrt{l^2+h^2}\tan\frac{\pi}{n-1}\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}(1-S_1)^2 =&(n-1)^2l^2(l^2+h^2)\tan^2\frac{\pi}{n-1}\\ =&(l^2+h^2)\cdot\frac{{S_1}^2}{l^2}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}(1-S_1)^2l^2 &= (l^2+h^2){S_1}^2\\ (1-2S_1)l^2 &= h^2{S_1}^2\end{aligned}$$

となるので $h=\dfrac{l}{S_1}\sqrt{1-2S_1}$ とすればよい。

このとき,

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{n} &\geqq -S_1 > -\frac{1}{2} \\
1-\frac{1}{n} &\geqq 1-S_1 > \frac{1}{2} \\
\frac{1}{n} &\geqq \frac{1-S_1}{n-1} > \frac{1}{2(n-1)} \\
\frac{1}{n} &\geqq S_2 > \frac{1}{2(n-1)}
\end{aligned}
$$

であるから,

$$S_1 \geqq \frac{1}{n} \geqq S_2 = \cdots = S_n$$

となり, 面の大きさに関する条件もみたしている。

2. $k=2$ のとき

場合分けをする。

(a) $\dfrac{1}{2(n-1)} < S_2 \leqq \dfrac{1}{n}$ の場合

面積が $S_1 = 1-(n-1)S_2$ であるような正 $(n-1)$ 角形を底面とする直錐体を考えればよい。

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2} &> -(n-1)S_2 \geqq -\frac{n-1}{n} \\
\frac{1}{2} &> 1-(n-1)S_2 \geqq 1-\frac{n-1}{n} \\
\frac{1}{2} &> S_1 \geqq \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

となり, これは既に $k=1$ の場合で考察済みである。

(b) $\dfrac{1}{n} \leqq S_2 < \dfrac{1}{2}$ の場合

i. $n \leqq 5$ のとき ($n-2 \geqq 3$ であるから $(n-2)$ 角形がつくれることに注意)

面 S_2 を 正 $(n-2)$ 角形とし, 面 S_2 を底面とする適切な高さの直柱体を作る。

実際, 面積 S_2 の正 $(n-2)$ 角形は, その中心から 1 辺への距離を l とすると正 $(n-2)$ 角形の面積 S_2 は

$$
\begin{aligned}
S_2 =& (n-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2l\tan\left(\frac{2\pi}{n-2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot l \\
=& (n-2)l^2\tan\frac{\pi}{n-2}
\end{aligned}
$$

であるので, $l=\sqrt{\dfrac{S_2}{(n-2)\tan\frac{\pi}{n-2}}}$ とすればよい。

また, この 正 $(n-2)$ 角形を底面とした直柱体の高さを h とすれば柱体の側面積は $1-2S_2$ は

$$
\begin{aligned}
1-2S_2 =& (n-2)\cdot 2l\tan\left(\frac{2\pi}{n-1}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot h \\
=& 2(n-2)lh\tan\frac{\pi}{n-2}
\end{aligned}
$$

となるので $h = \dfrac{1-2S_2}{2(n-2)l\tan\frac{\pi}{n-2}}$ とすればよい。

このとき

$$\begin{aligned} -\frac{2}{n} &\geqq -2S_2 > -1 \\ 1-\frac{2}{n} &\geqq 1-2S_2 > 0 \\ \frac{n-2}{n} &\geqq 1-2S_2 > 0 \\ \frac{1}{n} &\geqq \frac{1-2S_2}{n-2} > 0 \\ \frac{1}{n} &\geqq S_3 > 0 \end{aligned}$$

であるから

$$S_1 = S_2 \geqq \frac{1}{n} \geqq S_3 = \cdots = S_n$$

となり, 面の大きさに関する条件もみたしている。

(c) $n=4 \quad \left(\dfrac{1}{4} \leqq S_2 < \dfrac{1}{2}\right)$ の場合

$n-2 \geqq 2$ であるから $(n-2)$ 角形は作れないため $n \geqq 5$ と異なる議論が必要になる。4 面体をつくるので各面は 3 角形になる。考えやすくするために S_2 を正三角形にする。その 1 辺の長さを l とすると面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

である。S_2 を $\triangle\mathrm{ABC}$　とし, S_1 は S_2 と一辺 AB を共有する正三角形 $\triangle\mathrm{ABD}$ とし, D と $\triangle\mathrm{ABC}$ を結んでできる 4 面体 D-ABC を考える。

$\triangle\mathrm{ACD}$ を S_3 とする。その面積は

$$S_3 = \frac{1-2S_2}{2}$$

$\angle\mathrm{CAD} = \theta$ とおくと,

$$S_3 = \frac{1}{2}l^2\sin\theta$$

ともあらわせるので

$$\begin{aligned} \frac{1-2S_2}{2} &= \frac{2}{\sqrt{3}}S_2\sin\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{S_2}-2\right) &= \sin\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \leqq S_2 < \frac{1}{2} \\
&2 < \frac{1}{S_2} \leqq 4 \\
&0 < \frac{1}{S_2} - 2 \leqq 2 \\
&0 < \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{S_2} - 2\right) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&0 < \sin\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

であるので, θ は $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ なる範囲に確かに存在する。

このとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &\leqq S_2 < \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2} &\geqq -2S_2 > -1 \\
\frac{1}{2} &\geqq 1 - 2S_2 > 0 \\
\frac{1}{4} &\geqq \frac{1 - 2S_2}{2} > 0 \\
\frac{1}{4} &\geqq S_3 > 0
\end{aligned}$$

となり,

$$S_1 = S_2 \geqq \frac{1}{4} \geqq S_3 = S_4$$

となり, 面の大きさに関する条件もみたしている。

3. $k \geqq 3$ について

場合分けを減らすために次の補題を示そう。

補題 1

k を 2 以上 n 未満の自然数とし, S_k は $\frac{1}{n} \leqq S_k < \frac{1}{k}$ なる任意の値とするとき, $i \leqq k$ なる i に対しては $S_i = S_k$, $i > k$ なる i に対しては $S_i = S_{k+1}$ となるような多面体が存在する。

注意　補題 1 は, 2 つの面積のグループにおいて, S_k を大きいグループに入れる n 面体が存在すること ことを保証してくれる。

証明

(a) $k = 2$ のとき

既に議論はすんでいる。$k = 2$ の場合を補題に含めたのは, 後に示す別の補題の証明を場合分けを減らすためである。

(b) $n = 4$ かつ $k = 3$ のとき

与えられた面積 S_3 に対して

$$\begin{aligned}
0 <& 1 - 3S_3 < \frac{1}{4} \\
& 1 - 3S_3 < S_3
\end{aligned}$$

であるので, 面 S_4 を面積 $1-3S_3$ なる正三角形とし, 面 S_4 を底面とする適切な高さの直錐体を作ることができる。

注意　これは $k=n-1$ の場合に拡張できる。

(c) $k=n-1$ のとき

与えられた面積 S_k に対して

$$
\begin{aligned}
0 <&1-kS_k < \frac{1}{n} \\
&1-kS_k < S_k
\end{aligned}
$$

であるので, 面 $S_{k+1}=S_n$ を面積 $1-kS_k$ なる正 k 角形とし, 面 S_n を底面とする適切な高さの直錐体を作ることができる。

(d) $n=5$ のとき

まだ示していないのは $k=3$ のときだけである。

注意　これは $n \geqq 5, k=n-2$ の場合に容易に拡張できるのでそちらを示すことにする。

(e) $n \geqq 5, k=n-2$ のとき

正 $(n-2)$ 角形を底面とする直柱の側面に面積 S_{n-2} の $(n-2)$ 個の面 $S_1, S_2, \ldots, S_{n-2}$ を用い, 上面と下面に面積 $\frac{1-(n-2)S_{n-2}}{2}$ の 2 つの面 S_{n-1}, S_n がなるような適切な高さの $(n-2)$ 角柱をつくることができる。

(f) $n=6$ のとき

まだ示していないのは $k=3$ の場合のみである。まず, 小さな底面を持つ直三角錐で側面が面 S_1, S_2, S_3 であるものをつくる。次に同じ底面を持つ直三角錐で側面が面 S_4, S_5, S_6 のものをつくる。この 2 つの直三角錐の底面を貼り合わせた 6 面体をつくることを考える。まず, $1-3S_3$ よりも小なる正の値 ϵ を面積として持つ正 3 角形 ABC を底面として持ち, 3 つ側面 S_1, S_2, S_3 の面積が S_3 であるような適切な高さの直錐体を作る。次にやはり正 3 角形 ABC を底面として持ち, 3 つ側面 S_4, S_5, S_6 の面積が $\frac{1-3S_3}{3}$ であるような適切な高さの直錐体を作る。この 2 つの直錐体が三角形 ABC でつながった 6 面体が求めるものである。

(g) $n=7$ のとき

まだ示していないのは $n=3,4$ の場合である。

$k=3$ のときを考える。まず、$S_4=\frac{1-3S_3}{4}$ の面積より少し大きな正三角形の底面を持つ直三角錐で側面が面 S_1, S_2, S_3 のものをつくる。次にその底面から小さな正三角形をくりぬいて残りの面積が S_4 になるようにする。さらにくりぬいた小さな三角形と合同な底面を持ち側面が面 S_5, S_6, S_7 の直三角錐をつくる。この直三角錐の底面を, くりぬいた三角形のところで貼り合わせる。貼り合わせてできた 7 面体が求めるものである。

注意　これは $n \geqq 7$ かつ $k \geqq 3$ かつ $n-k \geqq 4$ の場合に拡張できる。

(h) $n \geqq 7$ かつ $k \geqq 3$ かつ $n-k \geqq 4$ のとき

まず、$S_{k+1}=\frac{1-kS_k}{n-k}$ の面積より少し大きな正 k 角形の底面を持つ直錐体で側面が面 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ のものをつくる。次にその底面から小さな正 $(n-k-1)$ 角形をくりぬいて残りの面積が S_{k+1} になるようにする。さらにくりぬいた小さな正 $(n-k-1)$ 角形と合同な底面を持ち側面が面 $S_{k+2}, S_{k+3}, \ldots, S_n$ の直錐体を作る。この直錐体の底面を, くりぬいた正 $(n-k-1)$ 角形のところで貼り合わせる。貼り合わせてできた n 面体が求めるものである。

注意　これを少し修正すれば $n \geqq 7$ かつ $k \geqq 4$ かつ $n-k \geqq 3$ の場合もわかる。

(i) $n \geqq 7$ かつ $k \geqq 4$ かつ $n-k \geqq 3$ のとき

まず、S_k の面積より少し大きな正 $k-1$ 角形の底面を持つ直錐体で側面が面 $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$ のものをつくる。次にその底面から小さな正 $(n-k)$ 角形をくりぬいて残りの面積が丁度 S_k になるようにする。$S_{k+1} = \frac{1-kS_k}{n-k}$ とおき, さらにくりぬいた小さな正 $(n-k)$ 角形と合同な底面を持ち側面が面 $S_{k+1}, S_{k+2}, \ldots, S_n$ となる直錐体を作る。この直錐体の底面を, くりぬいた正 $(n-k)$ 角形のところで貼り合わせる。貼り合わせてできた n 面体が求めるものである。

以上で $n=7$ の場合も済んだ。

(j) $n \geqq 8$ のとき

$k = 1, 2, n-2, n-1$ の場合はすんでいる。

$k=3$ のとき, $n-k = n-3 \geqq 5$ ですんでいる。

$k = n-3$ のとき, $k \geqq 5$ かつ $n-k=3$ であるからすんでいる。

$4 \leqq k \leqq n-4$ の場合,

$$\begin{aligned} -4 \geqq -k &\geqq 4-n \\ n-4 \geqq n-k &\geqq 4 \end{aligned}$$

となるので, この場合もすんでいる。よって $n \geqq 8$ のときは, 全ての k の場合で既に議論がすんでいた。

この補題を用いて新たな補題が示せる。

補題 2

k を 3 以上 n 以下の自然数とし, S_k は $0 < S_k \leqq \frac{1}{n}$ なる任意の値とするとき, $i<k$ なる i に対しては $S_i = S_{k-1}$, $i \geqq k$ なる i に対しては $S_i = S_k$ となるような多面体が存在する。

注意　補題 2 は, 2 つの面積のグループにおいて, S_k を小さいグループに入れる多面体が存在することを保証してくれる。

証明

S_k と面積が等しくなる面の数は $(n-k+1)$ 個で, S_{k-1} と面積が等しくなる面の数は $(k-1)$ 個なので、$S_{k-1} = \frac{1-(n-k+1)S_k}{k-1}$ となる。

$$\begin{aligned} 0 < S_k &\leqq \frac{1}{n} \\ 0 > -(n-k+1)S_k &\geqq -\frac{n-k+1}{n} \\ 1 > 1-(n-k+1)S_k &\geqq 1-\frac{n-k+1}{n} \\ 1 > 1-(n-k+1)S_k &\geqq \frac{k-1}{n} \\ \frac{1}{k-1} > \frac{1-(n-k+1)S_k}{k-1} &\geqq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{n} \leqq S_{k-1} < \frac{1}{k-1}$ となる。

k は 3 以上 n 以下の自然数なので, $k-1$ は 3 以上 n 未満の自然数となり, 補題 1 を使って多面体の存在がわかる。

これで補題 2 も示された。

$3 \leqq k \leqq n-1$ なる k に対して, 補題 1 より $\frac{1}{n} \leqq S_k < \frac{1}{k}$ となるような多面体の存在が示され, 補題 2 より $0 < S_k \leqq \frac{1}{n}$ となるような多面体の存在が示されたので,

$$0 < S_k < \frac{1}{k}$$

となるような多面体の存在が示されたことになる。

以上で S_k がみたす不等式をみたする多面体が存在することがわかった。

4. $k = n$ のとき

$$0 < S_n \leqq \frac{1}{n}$$

をみたす多面体が存在することを示す。

$$\begin{aligned} 1 >& 1 - S_n \geqq 1 - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} >& \frac{1-S_n}{n-1} \geqq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n-1} >& S_{n-1} \geqq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

であるから, 既に議論はすんでいる。

以上で不等式をみたす n 面体の存在が示された。

ここで紹介した方法では, 存在が示された n 面体は凸でないものもあるが、全く別の証明により、凸な n 面体で存在を示すこともできる。