「平成 26 年度 高知県高等学校数学コンクール問題」

1. 次の各問に答えよ。

(1) 平面に，どの 2 本も平行でなく，どの 3 本も 1 点で交わらない n 本の直線がある。このの n 本の直線によって平面はいくつの部分に分けられるか求めよ。

(2) 空間に，どの 2 平面も平行でなく，どの 3 平面も 1 直線を共有せず，どの 4 平面も 1 点で交わらない n 枚の平面がある。この n 枚の平面によって空間はいくつの部分に分けられるか求めよ。

2. 数 15 は $1+2+3+4+5=15$ および $4+5+6=15$ のように連続する自然数の和で 2 通りに表される。2014 をこのように 2 つ以上の連続する自然数の和で表す方法をすべて求めよ。また，2014 を 2 つ以上の連続する正の偶数の和，あるいは正の奇数の和で表す方法があればすべて求めよ。

3. 次の各問に答えよ。

(1) 1 から 360 までの整数のうち，2 でも 3 でも 5 でも割り切れない数の個数を求めよ。

(2) 4 個の異なる素数 q_1，q_2，q_3，q_4 と 4 個の自然数 n_1，n_2，n_3，n_4 に対して，$N = q_1^{n_1}q_2^{n_2}q_3^{n_3}q_4^{n_4}$ とおく。1 から N までの整数のうち，q_1，q_2，q_3，q_4 のいずれでも割り切れない数の個数を求めよ。

(3) m 個の異なる素数 q_1，$q_2, \cdots$，q_m と m 個の自然数 n_1，$n_2, \cdots$，n_m に対して，$N = q_1^{n_1}q_2^{n_2}\cdots q_m^{n_m}$ とおく。1 から N までの整数のうち，q_j $(j = 1, 2, \cdots, m)$ のいずれでも割り切れない数の個数を求めよ。

4. 関数 $y=f(x)$ について，$0 \leqq s,\ 0 \leqq t,\ s+t=1$ ならば

$$f(sx_1+tx_2) \leqq sf(x_1)+tf(x_2)$$

が成り立つとき，$f(x)$ は下に凸であるという。次の各問に答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が下に凸であれば，$0 \leqq t_i\ (i=1,2,\cdots,n),\ t_1+t_2+\cdots+t_n=1$ に対し

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n)\ \leqq\ t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 関数 $f(x)$ が微分可能であれば

$$y=f(x) \text{ は下に凸} \iff f'(x) \text{ は広義単調増加} \Big(x_1<x_2 \Longrightarrow f'(x_1) \leqq f'(x_2)\Big)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 $a_1,\cdots,a_n$ に対して，不等式

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leqq \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}$$

が成り立つことおよび

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 = \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \iff a_1=a_2=\cdots=a_n$$

が成り立つことを証明せよ。

5. n を 4 以上の自然数として，n 面体を考える。n 個の面の面積を S_1，S_2，$\cdots$，S_n として

$$S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots \geqq S_n \quad , \quad S_1+S_2+\cdots+S_n=1$$

が成り立っているとする。n 面体の体積は 0 ではないとして，$S_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ のとり得る値の範囲をそれぞれ求めよ。ただし，必要ならば次のことを用いても良い。

2 つの平面 α，β のなす角を θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$，平面 α 上の図形 A の面積を T とするとき，図形 A の平面 β への正射影の面積は $T\cos\theta$ である。