平成 27 年度高知県高等学校数学コンクール　解説

1.

> (1) 自然数 4200 の正の約数の個数を求めよ。ただし，1 と 4200 自身も約数とすること。
>
> (2) 自然数 $n = m^r l^s$ $(m, l, r, s$ ： 自然数$)$ がある。この自然数 n の正の約数の個数が $(2r+1)(4s+1)(r+3s+1)$ であるとき, n はどんな数だと言えるか。
>
> (3) 自然数 n の正の約数は 45 個あり, それらの総和は 12493 になるという。自然数 n を求めよ。

解説 (1) $4200 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ だから，4200 の約数の個数は

$$(3+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 4 \times 2 \times 3 \times 2 = 48$$

より （答）<u>48 個</u>

(2) m のみに含まれる素因数 p_1 が k_1 個あれば，約数の個数の式で $(k_1 r + 1)$ を因数にもつ。l のみに含まれる素因数 p_2 が k_2 個あれば約数の個数の式で $(k_2 s + 1)$ を因数にもつ。m, l 双方に含まれる素因数がそれぞれに k_3, k_4 個ずつあれば，約数の個数の式で $(k_3 r + k_4 s + 1)$ を因数にもつ。したがって，m, l は

$$m = p_1^2 p_2\ ,\quad l = p_2^3 p_3^4 \quad (p_1,\ p_2,\ p_3\ \text{：異なる素数})$$

の形でなければならない。すなわち，n は

（答）<u>$n = \left(p_1^2 p_2\right)^r \left(p_2^3 p_3^4\right)^s$ $(p_i$ ：異なる素数 ,　r , s：自然数$)$ の形の自然数である。</u>

(3) $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$　$(p_i$ ：素数　,　$r_i \geqq 1$：整数$)$ の約数の個数は

$$(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_k+1)$$

であるが

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

だから n の素因数は高々3 個である。

(i) n に含まれる素因数がただ 1 つ p_1 であるとき

$$n = p_1^{44}$$

とかける。しかし，$p_1 \geqq 2$ だから n の約数の総和は

$$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{44} \ \geqq\ 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{44} \ \geqq\ \frac{1(2^{45}-1)}{2-1} = 2^{45} - 1$$

となる。ここで，$2^{10} = 1024$ であり，$2^{20} = 1024^2 = 1048576$ であるから

$$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{44} \ >\ 12493$$

となり，条件に適さない。

(ii) n に含まれる素因数が p_1, p_2 の 2 つのみであるとき

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \quad (p_1 \ < \ p_2)$$

とかけるから，約数の個数について

$$(r_1+1)(r_2+1) = 3^2 \cdot 5$$

が成り立つ。$r_1+1 \geqq 2$, $r_2+1 \geqq 2$ に注意すれば，次の対応表を得る。

r_1+1	3	5	9	15
r_2+1	15	9	5	3

したがって

$$(r_1\ ,\ r_2)\ =\ (2,14)\ ,\ (4,8)\ ,\ (8,4)\ ,\ (14,2)$$

を得る。 ここで，$p_1 \geqq 2$, $p_2 \geqq 3$ に注意すると

$$(1+p_1+p_1^2)(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{14})$$

$$\geqq (1+2+2^2)(1+3+3^2+\cdots+3^{14}) = 7 \times \frac{3^{15}-1}{3-1}$$

$$= 7 \times \frac{243^3-1}{2} = 7 \times \frac{14348907-1}{2} = 7 \times 7174453$$

同様に

$$(1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4)(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^8)$$

$$\geqq (1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2+\cdots+3^8) = 31 \times 9841 = 30507$$

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^8)(1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4)$$

$$\geqq (1+2+2^2+\cdots+2^8)(1+3+3^2+3^3+3^4) = 511 \times 121 = 61831$$

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{14})(1+p_2+p_2^2)$$

$$\geqq (1+2+2^2+\cdots+2^{14})(1+3+3^2) = 32767 \times 13 = 425971$$

以上より，条件をみたすものはない。

(iii) n に含まれる素因数が p_1, p_2, p_3 の 3 つであるとき

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} p_3^{r_3} \quad (p_1 \ < \ p_2 \ < \ p_3)$$

とかけるから，約数の個数について

$$(r_1+1)(r_2+1)(r_3+1) = 3 \times 3 \times 5$$

が成り立つ。

(iii) の続き

$r_1+1 \geqq 2,\ r_2+1 \geqq 2,\ r_3+1 \geqq 2$ より

$$(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3)\ =\ (2,2,4)\ ,\ (2,4,2)\ ,\ (4,2,2)$$

を得る。

イ） $(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3)\ =\ (2,2,4)$ のとき

$$(1+p_1+p_1^2)(1+p_2+p_2^2)(1+p_3+p_3^2+p_3^3+p_3^4)=12493=13\times 31^2$$

が成立しなければならない。しかし

$$1+p_1+p_1^2\ <\ 1+p_2+p_2^2\ <\ 1+p_3+p_3^2+p_3^3+p_3^4$$

だから不適。

ロ） $(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3)\ =\ (2,4,2)$ のとき

$$(1+p_1+p_1^2)(1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4)(1+p_3+p_3^2)=13\times 31^2$$

$1+p_1+p_1^2\ <\ 1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4\ \ ,\ \ 1+p_1+p_1^2\ <\ 1+p_3+p_3^2$ 　だから

$$1+p_1+p_1^2=13\ ,\ 1+p_2+p_2^2+p_2^3+p_2^4=31\ ,\ 1+p_3+p_3^2=31$$

$$p_1^2+p_1-12=0\ ,\ p_2(1+p_2+p_2^2+p_2^3)=30\ ,\ p_3^2+p_3-30=0$$

$$(p_1+4)(p_1-3)=0\ ,\ p_2(1+p_2+p_2^2+p_2^3)=30\ ,\ (p_3+6)(p_3-5)=0$$

$2 \leqq p_1<p_2<p_3$ より $p_1=3,\ p_3=5$ 。よって不適。

ハ） $(r_1\ ,\ r_2\ ,\ r_3)\ =\ (4,2,2)$ のとき

$$(1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4)(1+p_2+p_2^2)(1+p_3+p_3^2)=13\times 31^2$$

$1+p_2+p_2^2\ <\ 1+p_3+p_3^2$ だから

$$1+p_2+p_2^2=13\ ,\ 1+p_3+p_3^2=31,\ 1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4=31$$

$$p_2^2+p_2-12=0\ ,\ p_3^2+p_3-30=0\ ,\ p_1(1+p_1+p_1^2+p_1^3)=30$$

$\therefore\ p_2=3,\ p_3=5$

$p_1<p_2$ より $p_1=2$ しかあり得ない。このとき

$1+p_1+p_1^2+p_1^3+p_1^4=1+2+2^2+2^3+2^4=31$

$\therefore\ n=2^4\times 3^2\times 5^2=3600$

（答） $\underline{n=3600}$

2. 図 1 の長方形 ABCD は，図 2 の 3 つの長方形をたてに並べたものである。
$\angle$CAB の大きさを求めよ。 できればいろいろな解法を考えよ。

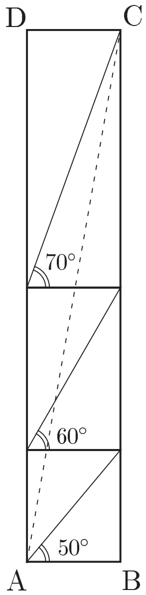


図 1

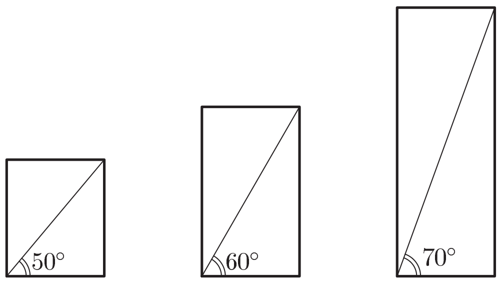


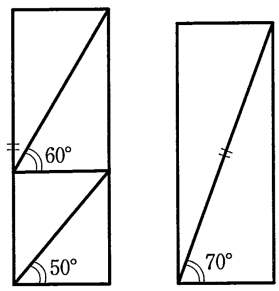
図 2

（答）80°

【解説】

大問 2 の応募者は 25 名で，そのうち正解者は 10 名。解法は大別すると以下の 2 通りでした。

1 　50°，60° の 2 つの長方形を合わせた長方形のたての長さと 70° の長方形の対角線の長さが等しいことを (三角比を利用して) 示す解法



2 　正接の 3 倍角の公式を利用し，

$$\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$$

の成立を示す解法

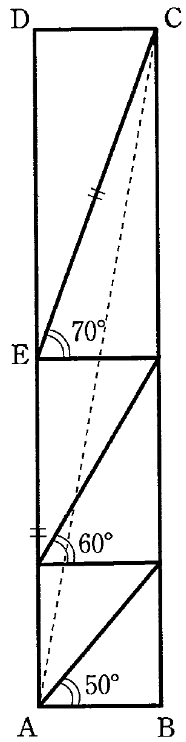
以下 1, 2 について説明していきます。

$\boxed{1}$ について

以下は，ある正解者の解答 (ほぼそのまま) です。
6 名が同様の考え方で正解しており，いずれも明快な解答でした。

$\boxed{\text{解答}}$

右図で $\angle \mathrm{CAB} = 80^\circ$ であることを示す。そのためには $\mathrm{EA} = \mathrm{EC}$ を示せばよく，$\mathrm{AB} = 1$ として議論すれば十分である。



このとき

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EA} &= \tan 50^\circ + \tan 60^\circ \\
&= \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} + \sqrt{3} \\
&= \frac{\sin 50^\circ + \sqrt{3}\cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} \\
&= \frac{2\sin(50^\circ + 60^\circ)}{\cos 50^\circ} \\
&= \frac{2\sin(90^\circ + 20^\circ)}{\cos(90^\circ - 40^\circ)} \\
&= \frac{2\cos 20^\circ}{\sin 40^\circ} \\
&= \frac{2\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} \\
&= \frac{1}{\sin 20^\circ}
\end{aligned}
$$

である。

一方

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EC} &= \frac{1}{\cos 70^\circ} \\
&= \frac{1}{\cos(90^\circ - 20^\circ)} \\
&= \frac{1}{\sin 20^\circ}
\end{aligned}
$$

であり， $\mathrm{EA} = \mathrm{EC}$ であることがわかる。

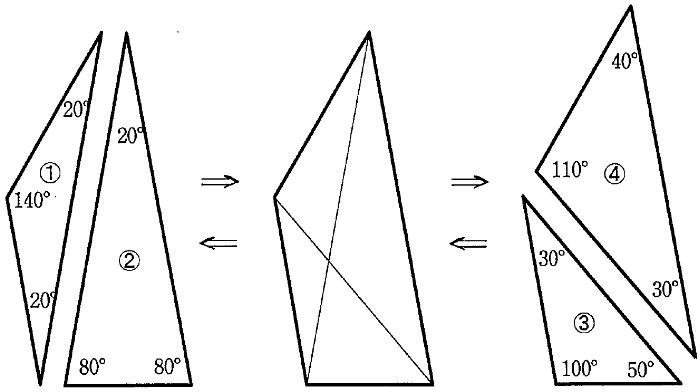
$\boxed{1}$ についての補足

$\boxed{\text{解答}}$ では $\mathrm{EA} = \mathrm{EC}$ であることを加法定理を用いた計算で示していますが，以下では初等幾何により「算数風」に示してみることにします。

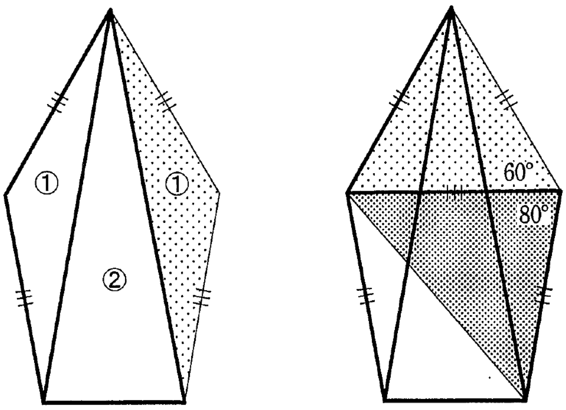
■　下図の三角形 ①，② を組み合わせてできる四角形と三角形 ③，④を組み合わせてできる四角形は一致します。別の言い方をするなら，

『三角形 ①，② を組み合わせてできる四角形は三角形 ③，④ に分解でき，
三角形 ③，④ を組み合わせてできる四角形は三角形 ①，② に分解できる』

ということです。



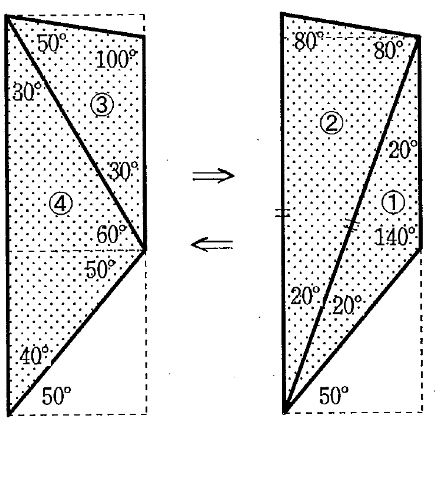
証明ですが意外と手こずるかもしれません。下図をみれば明らかなのですが･･･。



上記の事実を用いると下図から

50°，60°の 2 つの長方形を合わせたたての長さ ＝ 70°の長方形の対角線の長さ

は自明ではないでしょうか。■



$\boxed{2}$ について

正接の 3 倍角の公式　$\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$　を用いた解答者は 4 名でした。
そのうち多くの方が

$$\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ$$

を用いてうまく計算していました。

★ 一般に $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ で $\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma$ が定義されるとき

$$\begin{aligned}\tan\gamma &= \tan\{180^\circ - (\alpha+\beta)\}\\ &= -\tan(\alpha+\beta)\\ &= -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

から $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta \cdot \tan\gamma$ が成り立ちます。★

このことから

$$\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$$

を示すには

$$\tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$$

を示せばよいことになります。

$\boxed{\text{解答}}$

$\tan 50^\circ \cdot \tan 60^\circ \cdot \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$ を示す。$t = \tan 10^\circ$ とおくと，正接の加法定理より

$$\blacklozenge \tan 50^\circ = \tan(60^\circ - 10^\circ) = \frac{\sqrt{3} - t}{1 + \sqrt{3}t}$$

$$\blacklozenge \tan 70^\circ = \tan(60^\circ + 10^\circ) = \frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}t}$$

であり，

$$\blacklozenge \tan 80^\circ = \frac{1}{\tan 10^\circ} = \frac{1}{t}$$

から，

$$\frac{\sqrt{3} - t}{1 + \sqrt{3}t} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}t} - \frac{1}{t} = 0$$

を示せばよい。

正接の 3 倍角の公式　$\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$　を用いると

$$\tan 30^\circ = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

であり，$\sqrt{3}t^3 - 3t^2 - 3\sqrt{3}t + 1 = 0$ が成り立つことに注意すると

$$\frac{\sqrt{3} - t}{1 + \sqrt{3}t} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3} + t}{1 - \sqrt{3}t} - \frac{1}{t} = \frac{-\sqrt{3}t^3 + 3t^2 + 3\sqrt{3}t - 1}{(1 - 3t^2)t} = 0$$

であることがわかる。

$\boxed{2}$ の補足

(1) 計算がやや面倒に成りますが，直接 $\tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$ を示すこともできます。

■ $\boxed{\text{解答}}$ と同様に $t = \tan 10^\circ$ とおくと，正接の加法定理より

$\dfrac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}t} + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}+t}{1-\sqrt{3}t} - \dfrac{1}{t} = 0$ の成立を示せばよく

正接の 3 倍角の公式 $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ を用いると

$\tan 30^\circ = \dfrac{3t-t^3}{1-3t^2}$ から $\sqrt{3}t^3 - 3t^2 - 3\sqrt{3}t + 1 = 0$ で

$\dfrac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}t} + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}+t}{1-\sqrt{3}t} - \dfrac{1}{t} = \cdots = \dfrac{-\sqrt{3}t^3 + 3t^2 + 3\sqrt{3}t - 1}{(1-3t^2)t} = 0$

とわかる。■

(2) 正接の n 倍角の公式

$t = \tan\theta$ とするとき

$$\bigstar\ \tan 2\theta = \begin{array}{c:c:c} & +2t & \\ \hline +1 & & -t^2 \end{array}$$

$$\bigstar\ \tan 3\theta = \begin{array}{c:c:c:c} & +3t & & -t^3 \\ \hline +1 & & -3t^2 & \end{array}$$

$$\bigstar\ \tan 4\theta = \begin{array}{c:c:c:c:c} & +4t & & -4t^3 & \\ \hline +1 & & -6t^2 & & +t^4 \end{array}$$

$$\bigstar\ \tan 5\theta = \begin{array}{c:c:c:c:c:c} & +5t & & -10t^3 & & +t^5 \\ \hline +1 & & -10t^2 & & +5t^4 & \end{array}$$

が成り立ちます。

$\boxed{\text{問}}$ $\tan 6\theta$ はどうなるでしょう？一般に $\tan n\theta$ はどうなるでしょう？

(3) 正接の積に関する公式　実は，3 以上の奇数 n に対し

$$\tan\frac{\pi}{n} \times \tan\frac{2\pi}{n} \times \tan\frac{3\pi}{n} \times \cdots \times \tan\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} = \sqrt{n}$$

が成り立ちます。（証明は $\cdots$）

この公式を $n = 9$ として用いれば

$$\tan\frac{\pi}{9} \times \tan\frac{2\pi}{9} \times \tan\frac{3\pi}{9} \times \tan\frac{4\pi}{9} = \sqrt{9} = 3$$

であり

$$\tan 20^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 80^\circ = \sqrt{9} = 3$$

とわかります。したがって

$$\tan 20^\circ \times \tan 40^\circ \times \tan 80^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

であり

$$\tan 50^\circ \times \tan 60^\circ \times \tan 70^\circ = \tan 80^\circ$$

であることが簡単に導けます。

3. 数列 $\{ a_n \}$ (n は 0 以上の整数) が

$n=2m$(偶数) のとき $a_{2m} = {}_{2m+1}\mathrm{C}_0 + {}_{2m}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{m+1}\mathrm{C}_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_k$

$n=2m+1$(奇数) のとき $a_{2m+1} = {}_{2m+2}\mathrm{C}_0 + {}_{2m+1}\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k$

で定められている。次の各問に答えよ。

(1) $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

（答）(1) $a_0=1,\ a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=5,\ a_4=8,\ a_5=13$

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}$

解説 最初に漸化式 $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ を証明し，その漸化式から一般項を求める。

[1](漸化式 $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ の証明)

(i) $n=2m$(偶数) のとき

$$a_{2m} + a_{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_k + {}_{2m+2}\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k = \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_k + 1 + \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_{k+1}$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{m} ({}_{2m+1-k}\mathrm{C}_k + {}_{2m+1-k}\mathrm{C}_{k+1})$$

となる。ここで $1 = {}_{2m+3}\mathrm{C}_0$，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r$ だから

$$a_{2m} + a_{2m+1} = {}_{2m+3}\mathrm{C}_0 + \sum_{k=0}^{m} ({}_{2m+2-k}\mathrm{C}_{k+1}) = {}_{2m+3}\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} ({}_{2m+3-k}\mathrm{C}_k) = a_{2m+2}$$

(ii) $n=2m+1$(奇数) のとき

$$a_{2m+1} + a_{2m+2} = \sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k + \sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+3-k}\mathrm{C}_k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k + {}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1} + {}_{2m+3}\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} {}_{2m+3-k}\mathrm{C}_k$$

$$= \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k + 1 + 1 + \sum_{k=0}^{m} {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_{k+1} = 1 + \sum_{k=0}^{m} ({}_{2m+2-k}\mathrm{C}_k + {}_{2m+2-k}\mathrm{C}_{k+1}) + 1$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{m} ({}_{2m+3-k}\mathrm{C}_{k+1}) + 1 = {}_{2m+4}\mathrm{C}_0 + \sum_{k=1}^{m+1} {}_{2m+4-k}\mathrm{C}_k + {}_{m+2}\mathrm{C}_{m+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+2} {}_{2m+4-k}\mathrm{C}_k = a_{2(m+1)+1} = a_{2m+3}$$

(i)(ii) よりいずれにしても漸化式 $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ が成り立つ。

[2](漸化式から一般項を求める)

漸化式 $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ の特性方程式 $r^2 - r - 1 = 0$ の解を

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

とおくと，$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$ より

$$a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

を満たす。したがって

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad , \qquad a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

より $\{a_{n+1} - \beta a_n\},\ \{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は共に等比数列だから

$$a_n - \beta a_{n-1} = \alpha^{n-1}(a_1 - \beta a_0)$$

$$a_n - \alpha a_{n-1} = \beta^{n-1}(a_1 - \alpha a_0)$$

が成り立つ。この連立方程式を a_n について解くと

$$a_n = \frac{1}{\alpha - \beta}\left\{\alpha^n(a_1 - \beta a_0) - \beta^n(a_1 - \alpha a_0)\right\}$$

となる。ここで

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}, \quad a_1 - \beta a_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha^2, \quad a_1 - \alpha a_0 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \beta^2$$

より

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right\}$$

が得られる。

[1]$'$(漸化式 $a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$ の別証明 1)

記号 $[x]$ を実数 x を越えない最大の整数とする。この記号を使うと a_n は

$$a_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{n+1-k}\mathrm{C}_k$$

と表せる。この a_n は次の並び方の総数である。

$(*)$ $\boxed{\text{○と×を計 } n \text{ 個用意して一列に並べるとき，×が隣り合わない並び方の総数は } a_n \text{ である。}}$

[$(*)$ の証明] ○を $n-k$ 個，×を k 個，合計 n 個用意して一列に並べるとき，×が隣り合わない並び方 を考える。まず○を $n-k$ 個一列に並べる。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & [1] & & [2] & & [3] & & \cdots & & [n-k] & \\
 & ○ & & ○ & & ○ & & \cdots & & ○ & \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & \wedge & \cdots & \wedge & & \wedge \\
(1) & & (2) & & (3) & & (4) & \cdots & (n-k) & & (n-k+1)
\end{array}$$

○と○の間およびその両端の計 $n+1-k$ 個の場所 $\Big((1)\sim(n-k+1)\Big)$ の中から k 個を選んで×を 1 個ずつ置く。すなわち○を $n-k$ 個，×を k 個一列に並べるとき，×が隣り合わない並び方の総数が ${}_{n+1-k}\mathrm{C}_k$ である。

このとき $k \leqq n+1-k$ より

$$k \leqq \frac{n+1}{2}$$

である。したがって $\displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{n+1-k}\mathrm{C}_k$ は「○と×を計 n 個用意して一列に並べるとき，×が隣り合わない並び方の総数」である。($(*)$ の証明終)

a_{n+2} は「○と×を計 $n+2$ 個用意して一列に並べるとき，×が隣り合わない並び方の総数」である。このうち最後が○になる並び方

$$\begin{array}{ccccccc}
[1] & [2] & [3] & \cdots & [n] & [n+1] & [n+2] \\
\multicolumn{6}{|c|}{\qquad\qquad} & ○
\end{array} \qquad \cdots \ ①$$

の総数は a_{n+1} である。また最後が○×になる並び方

$$\begin{array}{ccccccc}
[1] & [2] & [3] & \cdots & [n] & [n+1] & [n+2] \\
\multicolumn{5}{|c|}{\qquad\qquad} & ○ & \times
\end{array} \qquad \cdots \ ②$$

の総数は a_n である。a_{n+2} は①の場合と②の場合を合わせた場合の数だから

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$$

が成り立つ。(証明終)

[1]″(漸化式 $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ の別証明 2)

階段を登るのに，1 段ずつ登るときと，1 段飛ばして 2 段を 1 度に登るときの 2 通りの登り方で登る。3 段以上を一度に登ることはしないとする。このような登り方で階段を登るとき，次が成り立つ。

(∗∗) $\boxed{n+1 \text{ 段の階段を登る場合の総数は } a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{n+1-k}\mathrm{C}_k \text{ である。}}$

[(∗∗) の証明] $n+1$ 段の階段を登るとき，2 段を 1 度に登るのを k 回したとする。

例えば最初の $2k$ 段をすべて 2 段ずつ登り，残りの $n+1-2k$ 段を 1 段ずつ登るとする。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2k-1 & 2k & 2k+1 & \cdots & n+1 \\ \multicolumn{2}{c}{\vee} & \multicolumn{2}{c}{\vee} & \cdots & \multicolumn{2}{c}{\vee} & & & \\ \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & \cdots & \multicolumn{2}{c}{\bigcirc} & \times & \cdots & \times \end{array}$$

2 段を 1 度に登るのを○，1 段ずつ登るのを×とすると，○が k 個，×が $n+1-2k$ 個ある。

$n+1$ 段のうち 2 段を 1 度に登るのを k 回する登り方の総数は，k 個の○と $n+1-2k$ 個の×を 1 列に並べる並べ方の総数に等しい。

それは計 $n+1-k$ 個の場所から○の場所を k 個選ぶ場合の数だから ${}_{n+1-k}\mathrm{C}_k$ 通りである。

ここで $n+1-2k \geqq 0$ だから

$$k \leqq \frac{n+1}{2}$$

である。したがって $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_{n+1-k}\mathrm{C}_k$ は $n+1$ 段の階段を登る場合の総数である。(証明終)

漸化式の証明

a_{n+2} は $n+3$ 段の階段の上り方の総数である。そのうち

$n+2$ 段まで登って，最後に 1 段登る場合 $\cdots$ ①

と

$n+1$ 段まで登って，最後に 2 段を 1 度に登る場合 $\cdots$ ②

がある。①が a_{n+1} 通り，②が a_n 通りだから，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ が成り立つ。(証明終)

4. 四面体 O − ABC において，各辺の長さを

$$\mathrm{OA} = \mathrm{BC} = a, \mathrm{OB} = \mathrm{CA} = b, \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = c$$

とする。この四面体の体積を V とするとき， V^2 を a, b, c を用いて因数分解した式で表せ。

(解答例 1)

四面体 O − ABC を座標空間に置き，

$$\mathrm{O}(0,0,0), \quad \mathrm{A}(a,0,0), \quad \mathrm{B}(p,q,0), \quad \mathrm{C}(s,t,u)$$

とする。ここで，$q>0, u>0$ としても一般性は失われない。

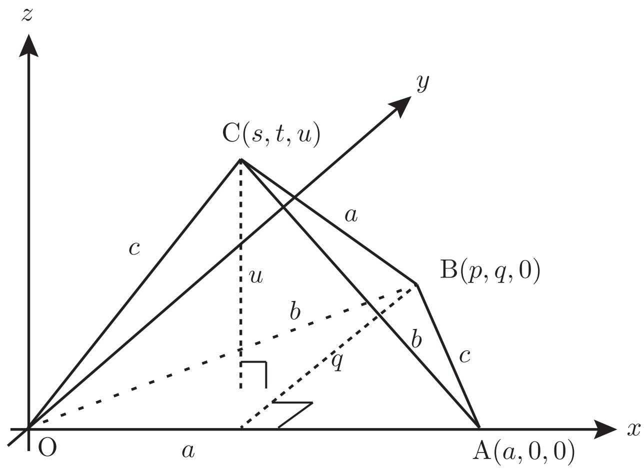
このとき， △OAB を底面とする高さ u の三角錐の体積として V を考えると

$$V = \frac{1}{2}aq \cdot u \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}aqu \iff 6^2V^2 = a^2q^2u^2$$

となる。与えられた条件から

$$\begin{cases} p^2+q^2=b^2 \cdots ① \\ s^2+t^2+u^2=c^2 \cdots ② \\ (s-p)^2+(t-q)^2+u^2=a^2 \cdots ③ \\ (s-a)^2+t^2+u^2=b^2 \cdots ④ \\ (p-a)^2+q^2=c^2 \cdots ⑤ \end{cases}$$

が成り立つ。



$X = b^2+c^2-a^2, Y = c^2+a^2-b^2, Z = a^2+b^2-c^2$ とおくと，

① − ⑤ :

$$2ap - a^2 = b^2 - c^2$$

$$p = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} = \frac{Z}{2a}$$

② − ④ :

$$2as - a^2 = c^2 - b^2$$

$$s = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} = \frac{Y}{2a}$$

① + ② − ③ :

$$2ps + 2qt = b^2+c^2-a^2$$

$$2 \cdot \frac{Z}{2a} \cdot \frac{Y}{2a} + 2qt = X$$

$$t = \frac{1}{4q}\left(2X - \frac{YZ}{a^2}\right)$$

① より

$$q^2 = b^2 - p^2 = b^2 - \left(\frac{Z}{2a}\right)^2 = b^2 - \frac{Z^2}{4a^2}$$

② より

$$u^2 = c^2 - s^2 - t^2 = c^2 - \left(\frac{Y}{2a}\right)^2 - \left\{\frac{1}{4q}\left(2X - \frac{YZ}{a^2}\right)\right\}^2$$

以上をまとめて

$$
\begin{aligned}
6^2V^2 &= a^2q^2u^2 \\
&= a^2q^2\left[c^2 - \left(\frac{Y}{2a}\right)^2 - \left\{\frac{1}{4q}\left(2X - \frac{YZ}{a^2}\right)\right\}^2\right] \\
&= a^2q^2\left(c^2 - \frac{Y^2}{4a^2}\right) - \frac{a^2}{4^2}\left(2X - \frac{YZ}{a^2}\right)^2 \\
&= a^2\left(b^2 - \frac{Z^2}{4a^2}\right)\left(c^2 - \frac{Y^2}{4a^2}\right) - \frac{1}{4}\left(a^2X^2 - XYZ + \frac{Y^2Z^2}{4a^2}\right) \\
&= a^2b^2c^2 - \frac{1}{4}\left(a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2\right) + \frac{1}{4}XYZ
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{cases}
-a^2 + b^2 + c^2 = X \\
a^2 - b^2 + c^2 = Y \\
a^2 + b^2 - c^2 = Z
\end{cases}
$$

を a^2, b^2, c^2 について解くと

$$
a^2 = \frac{1}{2}(Y+Z), \quad b^2 = \frac{1}{2}(Z+X), \quad c^2 = \frac{1}{2}(X+Y)
$$

となる。従って,

$$
\begin{aligned}
4\cdot 6^2V^2 &= 4a^2b^2c^2 - a^2X^2 - b^2Y^2 - c^2Z^2 + XYZ \\
&= 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3(Y+Z)(Z+X)(X+Y) - \frac{1}{2}(Y+Z)X^2 - \frac{1}{2}(Z+X)Y^2 - \frac{1}{2}(X+Y)Z^2 + XYZ \\
2\cdot 4\cdot 6^2V^2 &= (Y+Z)(Z+X)(X+Y) - (Y+Z)X^2 - (Z+X)Y^2 - (X+Y)Z^2 + 2XYZ \\
&= (Y+Z)\left\{X^2 + (Y+Z)X + YZ - X^2\right\} - (Z+X)Y^2 - (X+Y)Z^2 + 2XYZ \\
&= (Y+Z)^2X + (Y+Z)YZ - (Z+X)Y^2 - (X+Y)Z^2 + 2XYZ \\
&= X(Y^2 + 2YZ + Z^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ) + (Y^2Z + YZ^2 - Y^2Z - YZ^2) \\
&= 4XYZ
\end{aligned}
$$

従って,

$$
V^2 = \frac{1}{2\cdot 6^2}XYZ = \frac{1}{72}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)
$$

となる。

(解答例２)

四面体 $\mathrm{O-ABC}$ は合同な４つの三角形からなる。

$$
A = \angle\mathrm{CAB}, B = \angle\mathrm{ABC}, C = \angle\mathrm{BCA}
$$

とおくと，四面体の各頂点にはこれら３つの角が集まっている。このとき，どの２つの角の大きさの和も残りの角の大きさよりも大きくなる。例えば

$$
A < B + C
$$

だから， $2A < A + B + C = \pi$ となり， $A < \dfrac{\pi}{2}$ がわかる。同様に $B < \dfrac{\pi}{2}, C < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立ち，三角形 ABC は鋭角三角形であることがわかる。

このとき，余弦定理により

$$
\begin{aligned}
\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > 0 \\
\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} > 0 \\
\cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 0
\end{aligned}
$$

となる。従って，

$$x=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}},\quad y=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}},\quad z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$$

とおくと， $x>0, y>0, z>0$ となる。このとき

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} \\ y^2=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2} \\ z^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=y^2+z^2 \\ b^2=x^2+z^2 \\ c^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

が成り立つ。いま，縦，横，高さの長さとして x, y, z をもつ直方体 $\mathrm{OPCQ}-\mathrm{RBSA}$ を考える：

$$\mathrm{OP}=\mathrm{QC}=\mathrm{RB}=\mathrm{AS}=x, \mathrm{OQ}=\mathrm{PC}=\mathrm{RA}=\mathrm{BS}=y, \mathrm{OR}=\mathrm{PB}=\mathrm{CS}=\mathrm{QA}=z$$

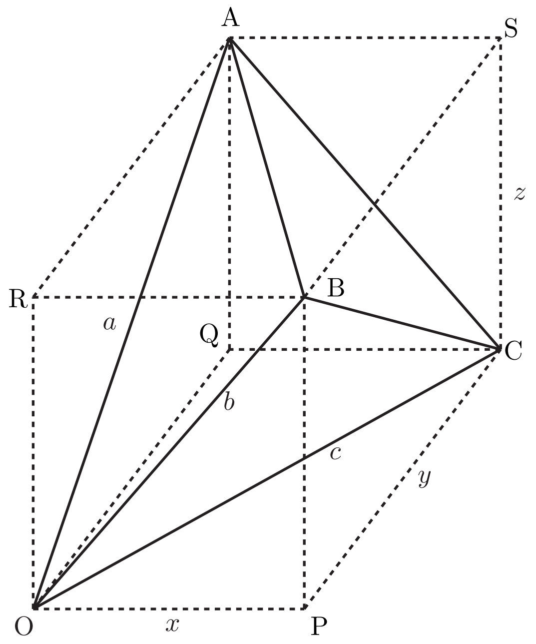
このとき，この直方体の面を構成している長方形の対角線として

$$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=\sqrt{y^2+z^2}=a$$
$$\mathrm{OB}=\mathrm{CA}=\sqrt{x^2+z^2}=b$$
$$\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\sqrt{x^2+y^2}=c$$

が成り立つので，与えられた四面体はこの直方体の頂点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を結んだものになっている。直方体から４個の三角錐を取り除いたものとしてこの四面体の体積を求めると

$$\begin{aligned} V&=xyz-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}xyz\times 4 \\ &=\frac{1}{3}xyz \\ V^2&=\frac{1}{3^2}x^2y^2z^2 \\ &=\frac{1}{3^2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ &=\frac{1}{72}(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \end{aligned}$$

となる。



5

実数 x を，$x=a+b$ (a は整数，b は $0\leqq b<1$ を満たす実数) と表すとき，b を x の小数部分という。実数 x に対して，b_1，b_2，b_3，……　の値を，以下の手順に従い，順次定める。

≪手順≫　x の小数部分を b_1 とする。

$b_1\neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{b_1}$ の小数部分を b_2 とする。

$b_2\neq 0$ ならば，$\dfrac{1}{b_2}$ の小数部分を b_3 とする。

以下，この操作を $b_n=0$ (n は自然数) となるまで続ける。

(1)　$x=\sqrt{7}$ のとき，b_{2015} の値を求めよ。

(2)　分母にさらに分数が含まれるような階層構造の分数を「連分数」という。例えば，$\dfrac{11}{7}$ は，

$\dfrac{11}{7}=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ と，連分数で表すことができる。

$b_n=0$ を満たす n の値に対して，$y=b_{n-1}$ とおく。$x=\dfrac{37}{14}$ のとき，x を y を含む連分数で表せ。

(3)　有理数 $p,\ q$ の分母は 2 桁の自然数である。

2 つの不等式 $p<\sqrt{7}<q$，$q-p<\dfrac{1}{1400}$ をともに満たす$(p,\ q)$ の組を 1 つ求めよ。

解説

(1)　$x=\sqrt{7}=2+(\sqrt{7}-2)$　より，　$b_1=\sqrt{7}-2$

$$\frac{1}{b_1}=\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7}+2}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}\quad \text{より，}\quad b_2=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

$$\frac{1}{b_2}=\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}\quad \text{より，}\quad b_3=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

$$\frac{1}{b_3}=\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{\sqrt{7}+1}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}\quad \text{より，}\quad b_4=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

$$\frac{1}{b_4}=\frac{3}{\sqrt{7}-2}=\sqrt{7}+2=4+(\sqrt{7}-2)\quad \text{より，}\quad b_5=\sqrt{7}-2$$

$b_5=b_1$ であり，手順より，b_5 以降は $b_1\sim b_4$ の値が繰り返し出現する。

$2015=4\times 503+3$ より，　$b_{2015}=b_3=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$

(2)　$x=\dfrac{37}{14}=2+\dfrac{9}{14}$　より，　$b_1=\dfrac{9}{14}$

$$\frac{1}{b_1}=\frac{14}{9}=1+\frac{5}{9}=1+b_2 \qquad \frac{1}{b_2}=\frac{9}{5}=1+\frac{4}{5}=1+b_3$$

$$\frac{1}{b_3}=\frac{5}{4}=1+\frac{1}{4}=1+b_4 \qquad \frac{1}{b_4}=4=4+0=4+b_5$$

$b_5=0$ なので，$y=b_4=\dfrac{1}{4}$

よって，　$x=2+b_1=2+\dfrac{1}{1+b_2}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+b_3}}=2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+y}}}$

(3)　(1) を利用して，$\sqrt{7}$ を連分数で表すと，

$$\sqrt{7}=2+b_1=2+\frac{1}{1+b_2}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_3}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_4}}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+b_5}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+b_6}}}}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_7}}}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_8}}}}}}}=\cdots\cdots$$

と，小数部分が循環しながら無限に続く。

上の式で，小数部分 b_1，b_2，b_3，……　の値を 0 として途中で切り捨てた分数をそれぞれ r_1，r_2，r_3，……　とおく。

$2+b_1>2=r_1$ であり，正の値同士の逆数をとると大小関係が逆転することから，

$$2+\frac{1}{1+b_2}<2+\frac{1}{1}=r_2 \qquad 2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_3}}>2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=r_3$$

$$2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+b_4}}}<2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=r_4$$

と，$\sqrt{7}$ より小さい値と大きい値を交互に繰り返すことが分かる。つまり，r_1，r_3，r_5，……　と奇数番号は $\sqrt{7}$ より小さく，　r_2，r_4，r_6，……　と偶数番号は $\sqrt{7}$ より大きい。

r_1，r_2，r_3，……は，小数部分を微小な値と考えて，$\sqrt{7}$ との誤差を切り捨てた数であり，連分数の階層が深くなるほど，その誤差は小さくなっていく。

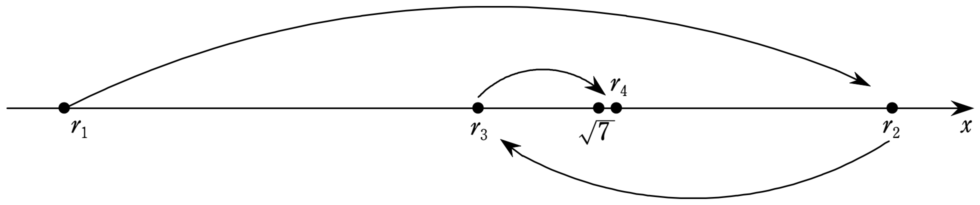
よって，r_1，r_2，r_3，……は，$\sqrt{7}$ より小さい値と大きい値を交互に繰り返しながら $\sqrt{7}$ に近づいていく有理数（近似分数）である。

$r_3=\dfrac{5}{2}$，　$r_4=\dfrac{8}{3}$，　$r_5=\dfrac{37}{14}$，　$r_6=\dfrac{45}{17}$，　$r_7=\dfrac{82}{31}$，　$r_8=\dfrac{127}{48}$，　……　と順次求める。

$r_8-r_7=\dfrac{127}{48}-\dfrac{82}{31}=\dfrac{1}{1488}<\dfrac{1}{1400}$ であるため，$p=r_7$，$q=r_8$ とすれば条件を満たす。

したがって，題意を満たす$(p,\ q)$ の組の 1 つは　$(p,\ q)=\left(\dfrac{82}{31},\ \dfrac{127}{48}\right)$

[参考図]



[出題の意図]

無理数の整数部分，小数部分についての問題は数学Ｉの問題集によく見られる典型的な問題だが，その内容はというと，整数部分と小数部分を求めた後が，ただの計算問題になってしまい，あまり面白みが感じられない。また，その問題を解く過程において，ルートの値を整数ではさむとき，例えば，$2<\sqrt{5}<3$，$2<\sqrt{8}<3$ と，$\sqrt{5}$ も $\sqrt{8}$ も結局は 2 と 3 の間にある数と，大雑把に取り扱うことにモヤモヤとした不満を感じたことはないだろうか。

もし，ルートの値を有理数で簡単に近似できたら，どんなに素晴らしいだろうか。

そういった思いに，【BLUE BACKS「連分数のふしぎ」木村俊一著／講談社】は明確な答を示してくれる。連分数の魅力と面白さをぜひとも高校生に伝えたいと思い，この問題を作問した。

(1)　手順を追っていけばできるような問題にした。後に続く問題 (3) のヒントである。無理数 $\sqrt{7}$ についての小数部分が循環することに興味•関心を持ってもらいたい。では，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ だとどうなるのか。そういった面白みを含んだ問題である。

(2)　「連分数」は高校の教科書にはない内容なので，その導入として出題した。同時に，問題文にある手順と，連分数を求めていく手順との関連性に気づいてほしい。これは (1) と (3) をつなぐ大きなヒントである。

(3)　前問の (2) の仕掛けに気づいてほしいという思いがあり，問題文には「$\sqrt{7}$ を連分数で表すことにより～」という文言を入れずに出題した。もし，$\sqrt{7}$ を連分数で表してみるとどうなるかという，未知のことに対して足を踏み出してみることが数学では重要と考える。そして，実際にその連分数を眺めながら，小数部分をわずかな誤差ととらえ，誤差を切り捨ててみたら有理数の近似値が分かるのではないかという発想に自力でたどり着けたとしたら，それは大変素晴らしい。

その発想にたどり着くことに大きな壁があることは分かっているが，思考力を鍛えるためには必要なことである。なお，実は (2) の x は，近似分数 r_5 である。このことからも気づくことができるのではないかと期待して，(2) を出題している。

また，この問題が解けた人も，解けなかった人も，解答の有理数をよく見てほしい。分母が 2 桁と，比較的簡易な形の有理数でありながら，その値は無理数 $\sqrt{7}$ に非常に近い。この面白さに感激できたならば，ぜひ BLUE BACKS も読んでいただきたい。

[参考]

$\dfrac{82}{31} \fallingdotseq \underline{2.645}1612903225806451 61$

$\sqrt{7} \fallingdotseq \underline{2.645}7513110645905905 02$

$\dfrac{127}{48} \fallingdotseq \underline{2.645}8333333333333333 33$　　～カシオ　高精度計算サイト「ke!san」を利用

[補足事項]

※参考文献　BLUE BACKS「連分数のふしぎ」　木村俊一著／講談社

解答に挙げた方法では，$r_9=\dfrac{590}{223}$ となるため，$(p,\ q)$ の組は 1 つしか求まらないが，

r_6，r_7，r_8，r_9 で切り捨てた誤差に着目して，他の $(p,\ q)$ の組を求めることができる。

r_6 は，$\underline{b_6=0\ として}$切り捨てた近似分数である。

r_7 は，$b_7=0$ として切り捨てた近似分数であるが，$b_6=\dfrac{1}{1+b_7}$ なので，$\underline{b_6=1\ として}$近似したことに等しい。

r_8 は，$b_8=0$ として切り捨てた近似分数であるが，$b_6=\dfrac{1}{1+b_7}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+b_8}}$ なので，$\underline{b_6=\dfrac{1}{2}\ として}$近似したことに等しい。

r_9 は，$b_9=0$ として切り捨てた近似分数であるが，$b_6=\dfrac{1}{1+b_7}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+b_8}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{4+b_9}}}$

なので，$\underline{b_6=\dfrac{5}{9}\ として}$近似したことに等しい。

すなわち，誤差 b_6 をどのような値で近似するかということに着目して，

$\underline{b_6=\dfrac{1}{3}\ とした}$近似分数を求めると，　$\dfrac{172}{65}$

（$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{3}>0$ より，この数は r_8 と r_6 の間にある。すなわち，$\sqrt{7}$ より大きい。）

$\underline{b_6=\dfrac{2}{3}\ とした}$近似分数を求めると，　$\dfrac{209}{79}$

（$1>\dfrac{2}{3}>\dfrac{5}{9}$ より，この数は r_7 と r_9 の間にある。すなわち，$\sqrt{7}$ より小さい。）

この考えによって求めた近似分数を用いて，

$(p,\ q)=\left(\dfrac{209}{79},\ \dfrac{127}{48}\right)$，　$\left(\dfrac{209}{79},\ \dfrac{172}{65}\right)$　も解として成り立つ。