

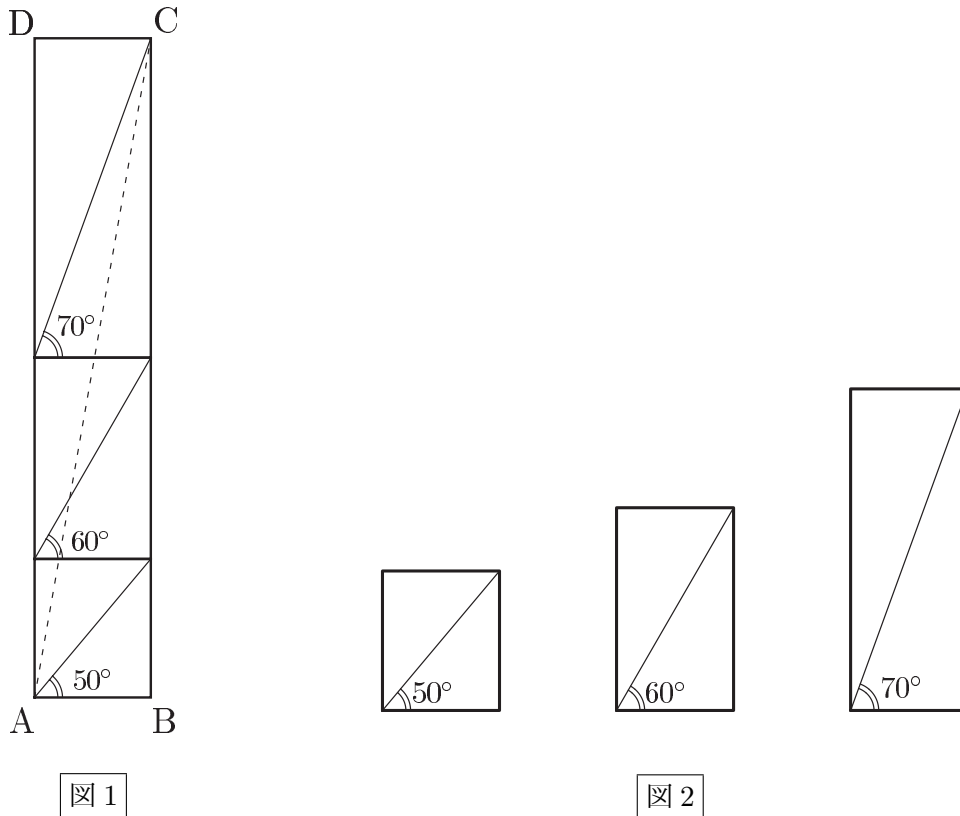
「平成 27 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

1. 次の各問に答えよ。

- (1) 自然数 4200 の正の約数の個数を求めよ。ただし、1 と 4200 自身も約数とすること。
- (2) 自然数 $n = m^r l^s$ (m, l, r, s : 自然数) がある。この自然数 n の正の約数の個数が $(2r + 1)(4s + 1)(r + 3s + 1)$ であるとき、 n はどんな数だと言えるか。
- (3) 自然数 n の正の約数は 45 個あり、それらの総和は 12493 になるという。自然数 n を求めよ。

2. 図 1 の長方形 ABCD は、図 2 の 3 つの長方形をたてに並べたものである。

$\angle CAB$ の大きさを求めよ。できればいろいろな解法を考えよ。



3. 数列 $\{ a_n \}$ (n は 0 以上の整数) が

$$n = 2m (\text{偶数}) \text{ のとき } a_{2m} = {}_{2m+1}C_0 + {}_{2m}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_m = \sum_{k=0}^m {}_{2m+1-k}C_k$$

$$n = 2m + 1 (\text{奇数}) \text{ のとき } a_{2m+1} = {}_{2m+2}C_0 + {}_{2m+1}C_1 + \cdots + {}_{m+1}C_{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} {}_{2m+2-k}C_k$$

で定められている。次の各問に答えよ。

- (1) $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。

4. 四面体 O-ABC において、各辺の長さを

$$OA = BC = a, \quad OB = CA = b, \quad OC = AB = c$$

とする。この四面体の体積を V として、 V^2 を a, b, c を用いて因数分解した式で表せ。

5. 実数 x を、 $x = a + b$ (a は整数、 b は $0 \leq b < 1$ を満たす実数) と表すとき、 b を x の小数部分という。実数 x に対して、 b_1, b_2, b_3, \dots の値を、以下の手順に従って、順次定める。

≪ 手順 ≫ x の小数部分を b_1 とする。

$b_1 \neq 0$ ならば、 $\frac{1}{b_1}$ の小数部分を b_2 とする。

$b_2 \neq 0$ ならば、 $\frac{1}{b_2}$ の小数部分を b_3 とする。

以下、この操作を $b_n = 0$ (n は自然数) とならない限り続ける。

- (1) $x = \sqrt{7}$ のとき、 b_{2015} の値を求めよ。

- (2) 分母にさらに分数が含まれるような階層構造の分数を「連分数」という。例えば、 $\frac{11}{7}$ は、上の手順を利用すると次のように連分数で表すことができる。

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{4}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

$x = \frac{37}{14}$ に対し、上の手順で定めた b_1, b_2, \dots において

$$b_n = 0$$

となったとする。このとき、 $y = b_{n-1}$ とおき $x = \frac{37}{14}$ を y を含む連分数で表せ。

- (3) 不等式 $p < \sqrt{7} < q$, $q - p < \frac{1}{1400}$ をともに満たす有理数 p, q の組 (p, q) で、 p, q を既約分数で表したときの分母がいずれも 2 桁の自然数となるものを 1 組求めよ。