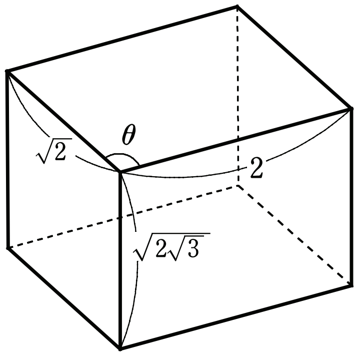
「平成 30 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{\mathbf{1}}$ ある立方体をある平面に正射影した図を考えると下図のようになった。
角 θ を求めよ。



$\boxed{\mathbf{2}}$ a は自然数とする。分母が a である既約分数全体の集合を $I(a)$ とする。
集合

$$I(a) \cap \{x \mid 0 < x < 1\}$$

に含まれる要素の総和を $S(a)$ とする。次の問に答えよ。

(1) $S(25),\ S(27),\ S(675)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $S(10!) = S(3628800)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a, b は正の定数, α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす定数とする。次の問に答えよ。

(1) 三角形 ABC において, $\angle\mathrm{BAC} = \alpha, \mathrm{BC} = a$ とする。この三角形の面積が最大となるのは $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ のときであることを証明せよ。

(2) 凸四角形 ABCD において, $\angle\mathrm{BAD} = \alpha, \mathrm{BC} = a, \mathrm{CD} = b$ とする。この四角形の面積が最大となるときの形状を決定せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数であるものを格子点という。自然数 $n \geqq 3$ に対し, 頂点がすべて格子点であるような正 n 角形を格子正 n 角形とよぶことにする。 次の問に答えよ。

(1) 格子正三角形は存在しないことを示せ。

(2) 格子正五角形は存在しないことを示せ。

$\boxed{5}$ まだ分数の割り算を知らない子供に $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3}$ をどのように考えたら良いと思うかを尋ねたら，子供は次のように答えました。

「ええっと $\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ なので，$\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3} = 1$　余り $\dfrac{1}{6}$ となるんじゃない？」

その子供に次のように返答しました。

「もしも $10 \div 7$ を考えるのならば，10 の中に 7 は 1 つあって，残りの部分は 3 で，3 の中にもう 7 は取れないので $10 \div 7 = 1$　余り 3 という答え方があるね。それとそっくりな考え方だから，そういう考え方もいいと思うけど，$10 \div 7 = 1.42857142857\ldots$ のように答えに余りを使わない考え方の割り算もあるよね。そのような割り算をできないかな。」

すると子供はこう答えました。

「$\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ で，この中に $\dfrac{1}{3}$ が何個あるか考えればいいから...

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1 + \left(\frac{1}{6} \div \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) = \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \text{」}$$

この式は，通常期待されている答えの $\dfrac{3}{2}$ とは表記が異なりますが，自然数同士の割り算で商が無限小数になる場合と同様に正しい計算とみなすことができます。子供が最後の式をどのような手法で得たのかは定かではありませんが，最後の式を導く手法がいくつか考えられます。このことに関する次の問題に答えてください。

(1) $\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{10} \times 1 + \dfrac{3}{70}$ に注意すると $\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10} = 1 + \left(\dfrac{3}{70} \div \dfrac{1}{10}\right) = 1 + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}\right)$ とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，子供が考えた割り算のように，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を無限個の和で表記しなさい。

(2) a を実数とするとき, 次の和を求められないか考察しなさい。必要があれば a に適当な条件をつけて構いません。

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

(3)
$$\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} = 1 + \left(\frac{3}{70} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{3}{7} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{30}{70} \div \frac{7}{70}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{10}\left(\left(\frac{28}{70} + \frac{2}{70}\right) \div \frac{7}{70}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{2}{70} \div \frac{7}{70}\right) = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{20}{70} \div \frac{7}{70}\right)$$
とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を $a_0 + \dfrac{b_1}{10} + \dfrac{b_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{b_n}{10^n} + \cdots$ の形で表しなさい。

(4) 実数 x と 0 から $n-1$ までのいくつかの整数 a_0, a_1, a_2, a_k , $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が

$$x = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + + \frac{b_3}{n^3} + \cdots$$

をみたす時に，負でない整数 $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ と小数点と呼ばれる「.」と 負でない整数 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ をこの順番に並べた

$$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots$$

のことを実数 x の n 進表記といいます。例えば $\dfrac{3}{2}$ の 3 進表記は

$$1.11111 \cdots$$

であり，$\dfrac{10}{7}$ の 10 進表記は

$$1.42857142857 \cdots$$

となります。$\dfrac{11}{8}$ を 3 進表記しなさい。