「2021 年度高知県高等学校数学コンクール 解答」

$\boxed{1}$ N を自然数とする。紙に左から $1, 2, 3, \cdots, N$ と自然数を書いた後，$5, 6, 7$ の 3 種類の数字を消すという操作を行う。このとき，残った数字の個数（文字数）を $S(N)$ で表す。例えば， $N = 20$ の場合は下の図のようになる。

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

↓

1 2 3 4   8 9 10 11 12 13 14 1   1   1   18 19 20

また， $S(20) = 25$ である。このとき，次の問に答えよ。

(1) $S(99)$ を求めよ。

(2) n を自然数とする。このとき，$S(10^n - 1)$ を n の式で表せ。

$\boxed{1}$ 解答

(1) 1 桁の数は十の位に 0 を補って，2 桁の整数とみる．また，はじめに 00 を補うと，この中に 0～9 の数字がそれぞれ同じ個数だけ出る．従って，それぞれの数字は

$$\frac{2\times10^2}{10} = 20 \text{ 個}$$

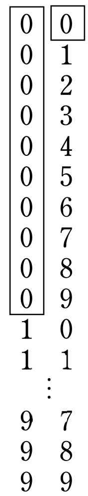
ずつ使われている．また，補った 0 は全部で

$$1 + 10 = 11 \text{ 個}$$

であるから，

$$S(99) = 2\times10^2 - 20\times3 - 11 = 129$$

である．



(2) (1)と同様に，k 桁($k = 1, 2, \cdots, n-1$)の整数は 0 を補って，n 桁の整数とみる．また，はじめに $\underbrace{00\cdots0}_{n\text{個}}$ を補うと，この中に 0～9 の数字がそれぞれ同じ個数だけ出て，その個数はそれぞれ

$$\frac{n\times10^n}{10} = n\cdot10^{n-1} \text{ 個}$$

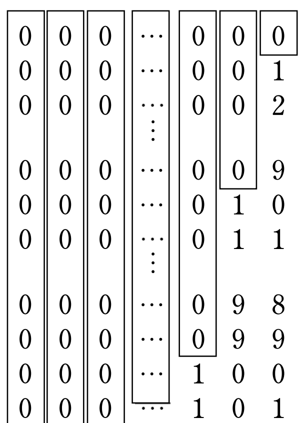
である．また，補った 0 は全部で

$$1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9} \text{ 個}$$

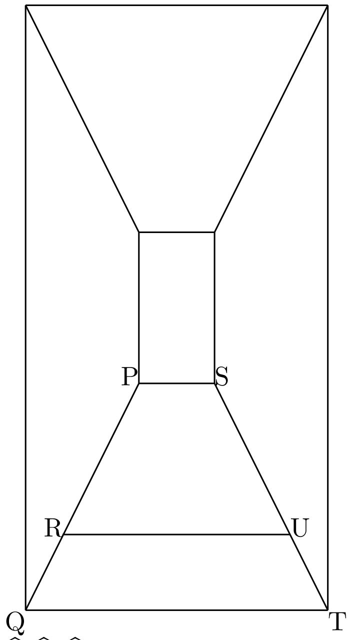
であるから，

$$S(10^n - 1) = n\cdot10^n - 3\times n\cdot10^{n-1} - \frac{10^n - 1}{9} = \frac{1 + (63n - 10)\cdot10^{n-1}}{9}$$

である．



$\boxed{2}$ 下の左の写真は平らなところにある一定の幅で真っ直ぐな廊下を撮影したものである。また，下の右の図は左の写真と同様に撮影された写真を図にしたものである。

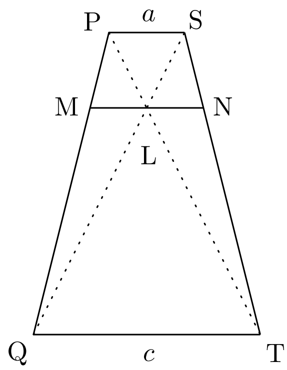


図における点 P,Q,R,S,T,U に対応する実際の廊下の点を $\widehat{\mathrm{P}},\widehat{\mathrm{Q}},\widehat{\mathrm{R}},\widehat{\mathrm{S}},\widehat{\mathrm{T}},\widehat{\mathrm{U}}$ であらわす。ここで $\widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{Q}}/\!/\widehat{\mathrm{S}}\widehat{\mathrm{T}},\quad \widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{Q}}\perp\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{T}},\quad \widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{S}}/\!/\widehat{\mathrm{R}}\widehat{\mathrm{U}}/\!/\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{T}}$ であるものとする。また図において $\mathrm{PS}=a$, $\mathrm{RU}=b$, $\mathrm{QT}=c$ とする。実際の床は平面であると仮定し，実際の線分は写真においても線分として撮影されるものとして次の問に答えよ。

(1) 2 点 $\widehat{\mathrm{P}},\widehat{\mathrm{Q}}$ の中点を $\widehat{\mathrm{M}}$ とし, この点 $\widehat{\mathrm{M}}$ に対応する図の点を M とする。また 2 点 $\widehat{\mathrm{S}},\widehat{\mathrm{T}}$ の中点を $\widehat{\mathrm{N}}$ とし, この点 $\widehat{\mathrm{N}}$ に対応する図の点を N とする。2 点 M,N の距離を a,c であらわせ。

(2) $a=1\mathrm{cm}$, $b=16\mathrm{cm}$, $c=21\mathrm{cm}$, $\widehat{\mathrm{R}}\widehat{\mathrm{Q}}=1\mathrm{m}$ とするとき, 2 点 $\widehat{\mathrm{P}},\widehat{\mathrm{Q}}$ の距離を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答



(1) 線分 $\widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{T}}$ と線分 $\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{S}}$ との交点を $\widehat{\mathrm{L}}$ とするとき, 線分 $\widehat{\mathrm{M}}\widehat{\mathrm{N}}$ は $\widehat{\mathrm{L}}$ を通るので,
線分 PT と線分 QS との交点を L とするとき, 線分 MN は L を通る.
$\triangle$LPS と $\triangle$LTQ は相似であるから $\mathrm{PS}:\mathrm{TQ}=\mathrm{PL}:\mathrm{TL}=a:c$
よって $\mathrm{PL}:\mathrm{PT}=a:(a+c)$
$\triangle$PML と $\triangle$PQT は相似であるから

$$\mathrm{ML}:\mathrm{QT}=\mathrm{PL}:\mathrm{PT}=a:(a+c),\quad \mathrm{ML}=\frac{a\mathrm{QT}}{a+c}=\frac{ac}{a+c}$$

同様にして $\mathrm{LN}=\dfrac{ac}{a+c}$ が得られ, $\mathrm{MN}=\mathrm{ML}+\mathrm{LN}=\dfrac{2ac}{a+c}$

(2) $\widehat{\mathrm{M}}_0$, $\widehat{\mathrm{N}}_0$ をそれぞれ $\widehat{\mathrm{P}}$, $\widehat{\mathrm{S}}$ とする。また $k=0,1,2,\ldots$ のとき $\widehat{\mathrm{M}}_k$ と $\widehat{\mathrm{Q}}$ の中点を $\widehat{\mathrm{M}}_{k+1}$ とし, $\widehat{\mathrm{N}}_k$ と $\widehat{\mathrm{T}}$ の中点を $\widehat{\mathrm{N}}_{k+1}$ とする。先ほどの議論より $\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2=\dfrac{2\cdot\dfrac{2ac}{a+c}\cdot c}{\dfrac{2ac}{a+c}+c}=\dfrac{4ac}{2a+a+c}=\dfrac{4ac}{3a+c}$,

$$\mathrm{M}_3\mathrm{N}_3=\frac{2\cdot\dfrac{4ac}{3a+c}}{\dfrac{4ac}{3a+c}+c}=\frac{8ac}{4a+3a+c}=\frac{8ac}{7a+c}$$

, 一般に $\mathrm{M}_k\mathrm{N}_k=\dfrac{2^k ac}{(2^k-1)a+c}\quad(k=1,2,3,\ldots)$ を数学的帰納法で示すことが出来る. ここで

$$\mathrm{M}_6\mathrm{N}_6=\frac{2^6\cdot1\cdot21}{(2^6-1)\cdot1+21}=\frac{64\cdot21}{63+21}=\frac{64}{3+1}=16=\mathrm{RU}$$

であるから, $\widehat{\mathrm{P}}\widehat{\mathrm{Q}}=1\times2^6\mathrm{m}=64\mathrm{m}$

3 △ABC の辺 AB 上に点 P を, 辺 BC 上に点 Q を, 辺 CA 上に点 R をとる。ただし, P, Q, R は頂点とは異なる点とする。さらに, △APR, △BQP, △CRQ の外心をそれぞれ A′, B′, C′ とする。このとき, △ABC と △A′B′C′ は, 3 点 P, Q, R のとり方によらず必ず相似となることを示せ。

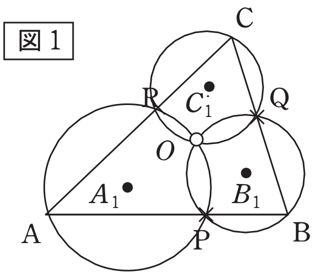
3 解答

（方針1） 寄せられた解答は, すべて以下の方針のものでした。この考えでの正確な議論は, 3 円の位置関係が, 図 1 の状況とは限らないことから, 結構面倒なものとなります。

（1） 3 つの外接円 C_1, C_2, C_3 が 1 点 O で交わることを示す。

（2） 角の関係から 2 角相等を示す。

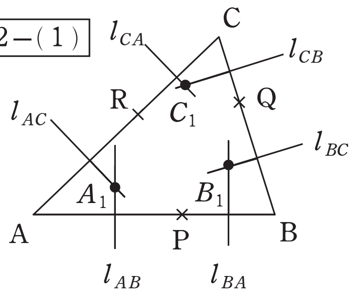
図 1



（方針2）

（1） 線分 AP, AR の垂直二等分線をそれぞれ, l_{AB}, l_{AR} とし, これらの交点を A_1 とする。
($l_{AB} \not\parallel l_{AC}$ より交点は存在する)。
同様に, 線分 BP, BQ の垂直二等分線 l_{AB}, l_{AR} と交点 B_1 , 線分 CQ, CR の垂直二等分線 l_{AB}, l_{AR} と交点 C_1 とする（図 2－(1)）。$A_1 = A'$, $B_1 = B'$, $C_1 = C'$ である。

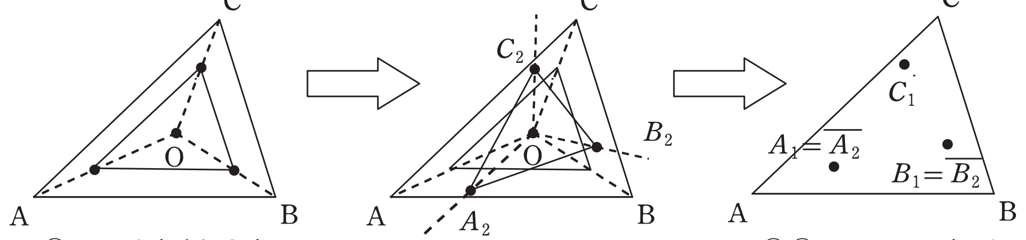
図 2－(1)



（2）（1）の A_1, B_1 に対して, A_1 を端点とする動径を考え, AB に平行な半直線を始線として角を計り, 動径 A_1B_1 の角 θ を $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で定めることができる。

この θ を用いて,（(1) とは別の形の）図 2－(2) ①→②→③ で, $\triangle \overline{A_2}\ \overline{B_2}\ \overline{C_2}$ を定める。

図 2－(2)



① △ABC を外心 O を中心として $\dfrac{1}{2\cos\theta}$ 倍する。（拡大・縮小）

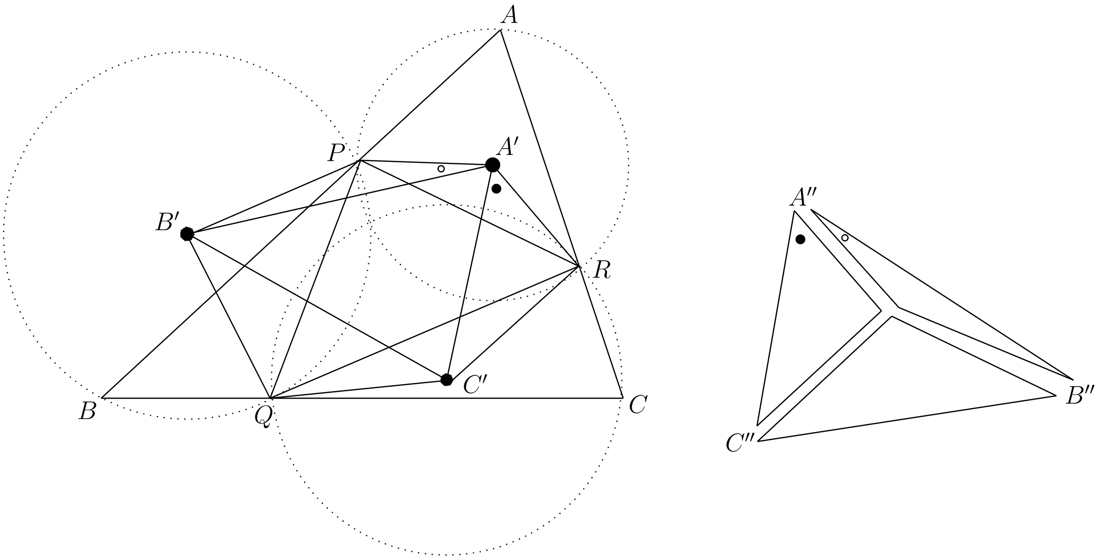
② さらに ① でできた三角形を O を中心に θ 回転する。

③ ②の $\triangle A_2B_2C_2$ を平行移動し, A_2, B_2 を, A_1, B_1 に重なるようにできる。このとき, C_2 の移動先は…

このとき, $\overline{A_2} = A_1$, $\overline{B_2} = B_1$ から, $\overline{C_2} = C_1$ である（なぜか？）。
したがって, $\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle A_2B_2C_2 \backsim \triangle\mathrm{A'B'C'}$ が示されたことになる。■

（方針3）

以上の2つの方針は対称に扱える点の対称性を崩しているが，対称性を崩さない方針も考えられる．



証明． まず円周角の定理から

$$\angle PA'R = 2\angle A, \quad \angle QB'P = 2\angle B, \quad \angle RC'Q = 2\angle C$$

である．よって

$$\angle RA'P + \angle PB'Q + \angle QC'R = 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2\pi$$

であるから，六角形 $A'PB'QC'R$ において

$$\angle A'PB' + \angle B'QC' + \angle C'RA' = 2\pi$$

である．したがって，$\triangle A'PB'$, $\triangle B'QC'$, $\triangle C'RA'$ に平行移動・回転を施して P, Q, R を重ね，さらに $A'P$ と $A'R$, $B'Q$ と $B'P$, $C'R$ と $C'Q$ をそれぞれ重ねることができる．このとき A', B', C' が移った点をそれぞれ A'', B'', C'' とすると，$\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$ である（三辺相当）．とくに

$$\angle B'A'C' = \angle B''A''C'' = \angle PA'B' + \angle RA'C'$$

だから

$$\angle B'A'C' = \frac{1}{2}\angle PA'R = \angle BAC$$

が成り立つ．同様に

$$\angle C'B'A' = \angle CBA, \quad \angle A'C'B' = \angle ACB$$

が成り立つ．したがって $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ である． $\square$

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ。

(1) p を素数，r を $1 \leqq r \leqq p-1$ である自然数とする。このとき，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であることを証明せよ。

(2) $(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1) = x^{p-1} + a_1x^{p-2} + a_2x^{p-3} + \cdots + a_{p-2}x + a_{p-1}$ とする。p が 3 以上の素数であるとき，$a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ はそれぞれ p で割り切れることを証明せよ。

(3) m は正の整数とする。2 つの整数 a, b について $a-b$ が m の倍数であることを

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。このとき，「素数 p に対して，$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ である」を証明せよ。

※ 問題のテーマ：ウィルソンの定理

ウィルソンの定理を高校数学の範囲で証明できるように誘導をつけたもの。
誘導なしで考えさせられれば良いのだが，誘導がないと解くのは困難だと思われる。
有名定理を題材にして，高校生が整数問題に親みを感じてもらえればという意図がある。

$\boxed{4}$（解答）

（１）$r=1$のとき，${}_pC_1=p$であり題意は成り立つので，　を２以上の自然数とする。

$${}_pC_r=\frac{p(p-1)\cdots(p-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1}$$

　は　個から　個とる組合わせの総数なので，自然数である。

ここで，　は素数であり，２　　　　より，　は　，$r-1$，$\cdots$，２ のいずれでも割り切れない。

したがって　$t=\dfrac{(p-1)\cdots(p-r+1)}{r(r-1)\cdots 2\cdot 1}$ とおくと，

tは整数であり，${}_pC_r=pt$

よって，　は　の倍数である。

（２）$p=3$のとき題意は成り立つので，
　を５以上の素数とする。

与えられた式をxの代わりに$x+1$で考え，両辺に$x+1$をかけると，

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+p)$$

$$=(x+1)^p+a_1(x+1)^{p-1}+\cdots+a_{p-1}(x+1)$$

この式の右辺と与えられた式の両辺に$x+p$をかけたものを考えることで

$$(x+1)^p+a_1(x+1)^{p-1}+\cdots+a_{p-1}(x+1)$$

$$=(x+p)(x^{p-1}+a_1x^{p-2}+\cdots a_{p-2}x+a_{p-1})$$ 　を得る。

これはxに関する恒等式より

両辺を展開して，xに関する係数を比べることで，次の関係式を得る。

$a_1={}_pC_2$

$2a_2={}_pC_3+a_1\cdot{}_{p-1}C_2$

$3a_3={}_pC_4+a_1\cdot{}_{p-1}C_3+a_2\cdot{}_{p-2}C_2$

…………

$(p-2)a_{p-2}=p+(p-1)a_1+\cdots+3a_{p-3}$

$(p-1)a_{p-1} = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{p-2}$

ここで，問題 1 より，

$a_1 = {}_pC_2$ は　で割り切れる。

次に，a_1，${}_pC_3$ が　で割り切れるので，

$2a_2$，すなわち a_2 は　で割り切れる。

同様に，$a_3, \cdots, a_{p-2}$ は　で割り切れる。

よって，　　　　　　　　はそれぞれ　で割り切れる。

（3） $p = 2, 3$ のとき題意は成り立つので，
　を 5 以上の素数とする。

$(p-1)a_{p-1} = 1 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_{p-2}$ であり，

(1) より，　　　　　　　　は　で割り切れるので，

$(p-1)a_{p-1}$ を　で割った余りは　である。

$(p-1)a_{p-1} = pa_{p-1} - a_{p-1}$ より

$-a_{p-1}$ を　で割った余りは　である。

よって，a_{p-1} を　で割った余りは　　である。

ここで，$a_{p-1} = (p-1)!$ より

　　を　で割ったときの余りは　　である。　　　（解答終）

$\boxed{5}$ A, B の二人で以下のルール (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) によるゲームを行う：

(Ⅰ) 色が 50 色と正 $2n$ 角形がある。A は色を一つ指定してその色を B に伝え，B は正 $2n$ 角形のまだ色のついていない頂点を一つ選んでその色に塗り，その位置を A に伝える。この手続きを最大 $2n$ 回繰り返す。A は同じ色を何回指定してもよい。

(Ⅱ) 同じ色の 3 つの頂点で，二等辺三角形の 3 頂点となるものができた段階で B の勝ちとし，手続きは終了とする。

(Ⅲ) 手続きを $2n$ 回終了した段階で B の勝ちでなければ A の勝ちとする。

このとき，以下の問に答えよ。

(1) A に必勝戦略があるような n の値を決定せよ。

(2) 勝敗に関する (Ⅱ) のルールを

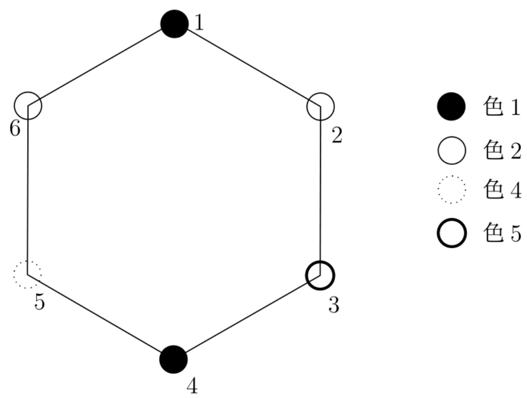
(Ⅱ)$'$ 同じ色の 2 つの頂点で，最も長い対角線の両端となるものができた段階で B の勝ちとし，手続きは終了とする。

としてゲームを行うことにする。このとき，A に必勝戦略があるような最大の n の値を求めよ。つまり，$n = k$ のときは A が必勝，$n \geqq k+1$ のときは B が必勝となるような k の値を求めよ。

（注）「A に必勝戦略がある」とは，B がどのような戦略を取っても，A がそれに適切に対応すれば勝てるということである。

以下は $n = 3$ におけるゲームの手続きの一例である（正六角形の頂点に，時計回りに 1 から 6 の番号をつけている）。

1 回: A は色 1 を指定し，B は頂点 1 を塗る。
2 回: A は色 2 を指定し，B は頂点 6 を塗る。
3 回: A は色 4 を指定し，B は頂点 5 を塗る。
4 回: A は色 2 を指定し，B は頂点 2 を塗る。
5 回: A は色 5 を指定し，B は頂点 3 を塗る。
6 回: A は色 1 を指定し，B は頂点 4 を塗る。



(Ⅱ) のルールの下では 6 回の手続きが終了した段階で A の勝ち, (Ⅱ)$'$ のルールの下では 6 回の手続きが終了した段階で B の勝ちである。

$\boxed{5}$ 解答

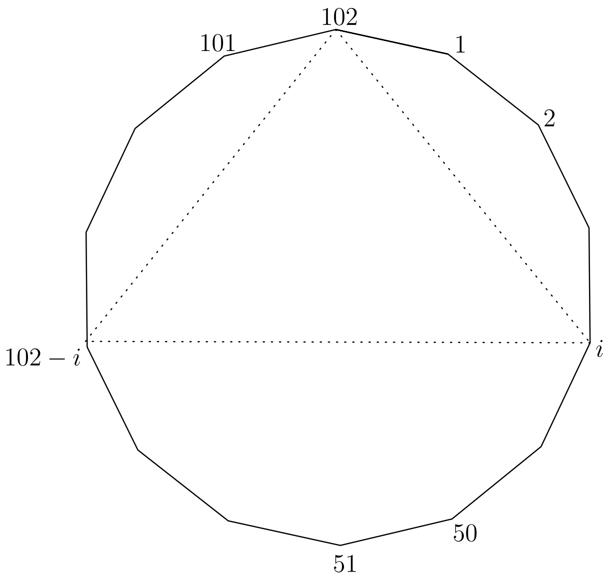
正 $2n$ 角形の頂点に時計回りに 1 から $2n$ までの番号をつけ, 色に 1 から 50までの番号をつける. 頂点や色をその番号でよぶ.

(1) まず, $n \leqq 50$ なら明らかに A が必勝である. どの色も 2 回以下しか宣言しなければよい. $n \geqq 51$ のとき, $i = 1, 2, \ldots, 50$ に対して $1 \leqq i \leqq 50 < 2n - i < 2n$ である. そこで次のような B の戦略を考える.

(i) 色 i が宣言されたのが初めてなら頂点 i を, 2 度目なら頂点 $2n - i$ を塗る.

(ii) 色 i が 3 度目に宣言されたら頂点 $2n$ を塗る.

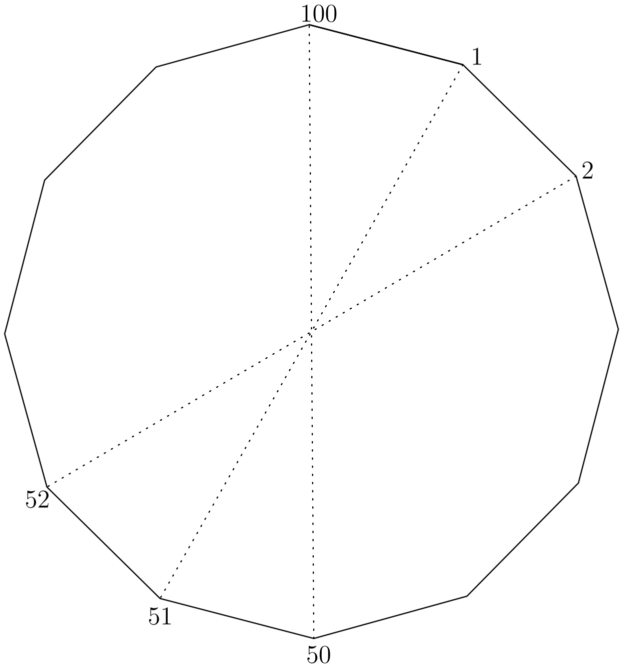
ある i $(1 \leqq i \leqq 50)$ に対して色 i は 3 回以上宣言される. このとき頂点 i, $2n - i$, $2n$ からなる二等辺三角形ができるから, B はこの戦略によって勝てる. したがって, A に必勝戦略があるのは $n \leqq 50$ のときであり, そのときに限る.



(2) 正 $2n$ 角形の最も長い対角線をなす頂点のペアは $(i, n + i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ である. $n \geqq 50$ のとき, 次のような B の戦略を考える.

- 色 i が宣言されたのが初めてなら頂点 i を, 2 度目なら頂点 $n + i$ を塗る.

ある i $(1 \leqq i \leqq 50)$ に対して色 i は 2 回以上宣言されるから, B はこの戦略によって勝てる.



次に $n = 49$ のとき, 次のような A の戦略を考える.

(i) まず, 色 $1, 2, \ldots, 50$ を順に宣言する. 最も長い対角線は 49 本しかないから, 少なくとも 1 本の両端にはともに色がついている. その対角線を L とし, その両端の色を c_1, c_2 とする. $c_1 \neq c_2$ である.

(ii) 次に色 c_1, c_2 を宣言する. B がどの頂点を c_1, c_2 で塗っても, 最も長い対角線の両端が同じ色になることはない（2 回使われた色は c_1, c_2 だけであり, それらは 1 回づつ L の両端を塗るのに使われているから）. さらに, L の両端を除いて, 色 $1, 2, \ldots, 50$ はちょうど 1 回づつ使われている. したがって (i) と同様に, L 以外の最も長い対角線のうち, 少なくとも 1 本の両端にはともに色がついており, それらの色は相異なる. そこで, 次にそれらの色を宣言する. 以下これを繰り返す.

A がこの戦略をとると, 最も長い対角線の両端が同じ色で塗られることはない. したがって A はこの戦略で勝てる.

以上より, A に必勝戦略がある最大の n の値は $n = 49$ である.