「平成 28 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

1. 次の各問に答えよ。

(1) 数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 6 桁の数は平方数ではないことを示せ。

(2) 数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 9 桁の数のうち，99 の倍数となるもので最小のものを求めよ。

2. 平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 T と半径 1 の円板 D を共通部分 $T \cap D$ の面積が最大となるように置く。このとき共通部分 $T \cap D$ の面積を求めよ。

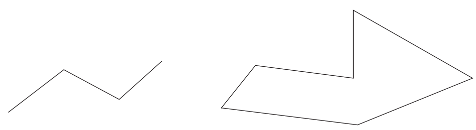
3. 次の各問に答えよ。

(1) 7 桁の数 $N_7 = 1111111$（百十一万千百十一）を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 32 桁の数 $N_{32} = \underbrace{111\cdots1}_{32}$ を 32 で割ったときの余りを求めよ。

(3) 2016 桁の数 $N_{2016} = \underbrace{111\cdots1}_{2016}$ を 2016 で割ったときの余りを求めよ。

4. 平面上で n 本の線分を繋いでできる折線を n−折線 といい，n−折線の端と端が繋がっているとき 閉 n−折線 という。
また，n−折線を作っている n 本の線分を 成分 とよぶとき，次の各問に答えよ。



3−折線　　閉 6−折線

(1) 平面上に同一直線上にない 3 点 A, B, C がある。このとき，平面上の閉 3−折線で，3 つの成分の中点が 3 点 A, B, C となるものが存在することを示せ。

(2) どの 3 点も同一直線上にない 4 点 A, B, C, D で，どのように閉 4−折線をとってもその 4 つの成分の中点が 4 点 A, B, C, D となり得ないものが存在することを証明せよ。

(3) (1),(2) や 5 点の場合などを考察して一般化した命題を作り，その主張が正しいことを証明せよ。

5. n は 2 以上の自然数とする。全員が同じ組に入る場合は除くとして，n 人を 2 つの組に分ける場合の数は，2^n-2（通り）と表すことができる。一方，この場合の数は ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$ （通り）とも表すことができる。すなわち，以下の等式①が成り立つ。

$$2^n-2={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

次の各問に答えよ。

(1) 上記の下線部のように場合の数を表すことができる理由を説明せよ。

(2) r は自然数で，$1 \leqq r \leqq n$ とする。
2 数 ${}_nC_{r-1}$，${}_nC_r$ のそれぞれを 2 で割ったときの
余りが等しいとき，${}_{n+1}C_r$ は偶数
余りが異なるとき，${}_{n+1}C_r$ は奇数
であることを証明せよ。ただし，証明のために必要な等式・不等式があれば，それもあわせて証明すること。

(3) ①の右辺の各項 ${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_3$，$\cdots$，${}_nC_{n-1}$ の値について調べる。
$n=8$ のとき，これらの値はすべて偶数である。
$n=7$ のとき，これらの値はすべて奇数である。
$n=6$ のとき，これらの値は偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返す。
このように，${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_3$，$\cdots$，${}_nC_{n-1}$ の値が偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返すための必要十分条件は，$n=2^k-2$（k は 2 以上の自然数）であることを証明せよ。

$\boxed{1}$

> (1) 数字 $1, 2, \ldots, 6$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 6 桁の数は, 決して平方数にならないことを示せ.
>
> (2) 数字 $1, 2, \ldots, 9$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 9 桁の数のうち, 99 の倍数となるもので最小のものを求めよ.

解答. 自然数 k が整数 n を割り切るとき $k \mid n$, そうでないとき $k \nmid n$ とかく. このとき

$$3 \mid N \iff 3 \mid \sum_{k=1}^{m} a_k,$$
$$9 \mid N \iff 9 \mid \sum_{k=1}^{m} a_k,$$
$$11 \mid N \iff 11 \mid \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} a_k$$

が成り立つ. ただし, 0〜9 の数字 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を順に並べてできる m 桁の数 N を $\overline{a_1 a_2 \cdots a_m}$ と書くものとする.

(1) 1〜6 をそれぞれ 1 回使ってできる 6 桁の数 $N = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ について

$$\sum_{k=1}^{6} a_k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

であるから, 上の判定法から $3 \mid N$ かつ $9 \nmid N$. つまり N は 3 の倍数だが 9 の倍数でないので, 平方数ではない.

(2) $99 = 9 \cdot 11$ であるから, 1〜9 をそれぞれ 1 回使ってできる 9 桁の数 $N = \overline{a_1 a_2 \cdots a_9}$ が 99 の倍数となるのは, N が 9 の倍数かつ 11 の倍数となるときである. まず

$$\sum_{k=1}^{9} a_k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

であるから, 上の判定法より N はつねに 9 の倍数である. また

$$\sum_{k=1}^{9} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{9} a_k - 2(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = 45 - 2(a_2 + a_4 + a_6 + a_8)$$

が成り立つ．この数を A とおくと, 上の判定法から

$$11 \mid N \quad \Longleftrightarrow \quad 11 \mid A$$

が成り立つ．ここで

$$1+2+3+4 \leqq a_2+a_4+a_6+a_8 \leqq 6+7+8+9$$

より $10 \leqq a_2+a_4+a_6+a_8 \leqq 30$ だから $-15 \leqq A \leqq 25$ である．さらに A は奇数だから, A が 11 の倍数となるのは $A=\pm 11$ のときである．よって $a_2+a_4+a_6+a_8=17, 28$.

(i) $a_2+a_4+a_6+a_8=17$ のとき
できるだけ小さい数で条件をみたすものを探す．$N=\overline{12345****}$ の形の場合, $a_6+a_8 \geqq 6+7$ だから

$$a_2+a_4+a_6+a_8 \geqq 2+4+6+7=19>17$$

となり矛盾．一方, $N=\overline{1234*****}$ の形の場合, $a_2+a_4+a_6+a_8=17$ より $a_6+a_8=11$. よって $\{a_6, a_8\}=\{5,6\}$ であり $\{a_5, a_7, a_9\}=\{7,8,9\}$. この条件をみたす最小の N は $N=123475869$ である．

(ii) $a_2+a_4+a_6+a_8=28$ のとき
$N=\overline{1234*****}$ の形の場合, $a_6+a_8 \leqq 8+9$ より

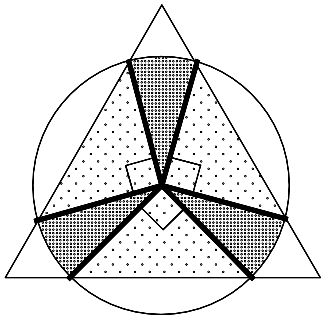
$$a_2+a_4+a_6+a_8 \leqq 2+4+8+9=23<28$$

となり矛盾．よって $N>123500000>123475869$ である．

以上より, 求める N の値は $N=123475869$ である．

2. 平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 T と半径 1 の円板 D を共通部分 $T\cap D$ の面積が最大となるように置く。このとき共通部分 $T\cap D$ の面積を求めよ。

解説



★ 共通部分 $T\cap D$ の面積が最大となるのは

円の中心と正三角形の重心が一致する場合 ★

です。

このことを前提とするなら、右図の状況から、求める最大値が

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot3+\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}$$

であることがわかりますが、問題は〈 ★★ の証明 〉です…。

以下、★★ の証明(概略)を

「 円の中心が正三角形の重心からずれると共通部分 $T\cap D$ の面積は小さくなる 」

という形で行います。

1 円と正三角形の位置関係 (1)

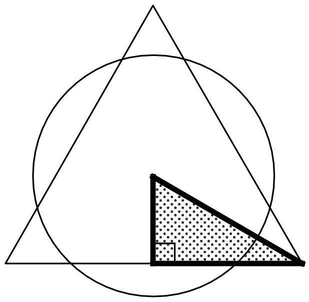
円と正三角形の位置関係に関して以下のことが簡単にわかります。

◆ 絞り込み① ◆

円の中心が正三角形の内部にある場合を調べれば十分です。

◆ 絞り込み② ◆

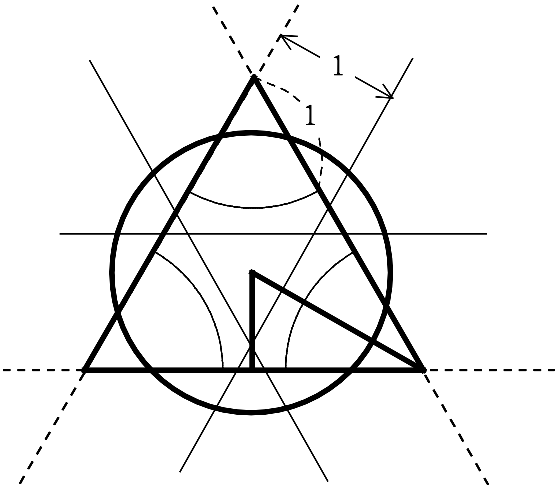
さらに、正三角形の対称性より、円の中心が右図の打点部(境界も含める)にある場合を調べれば十分です。

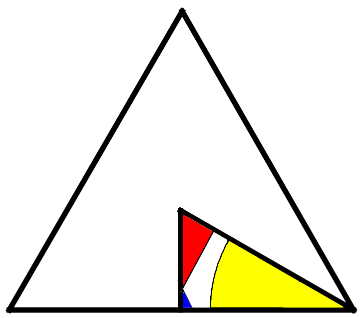


2 円と正三角形の位置関係 (2)

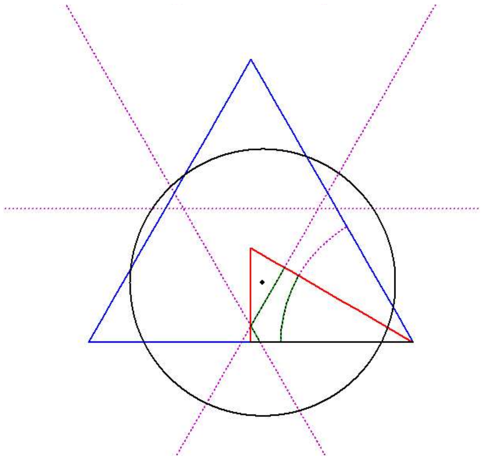
◆ 分類 ◆

円と正三角形の位置関係は、円の中心の位置によって次の図のように分類されます。

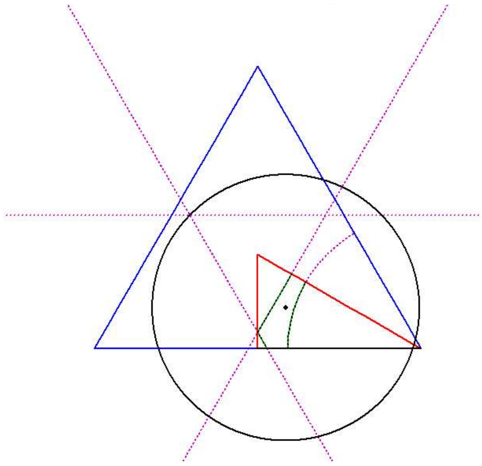




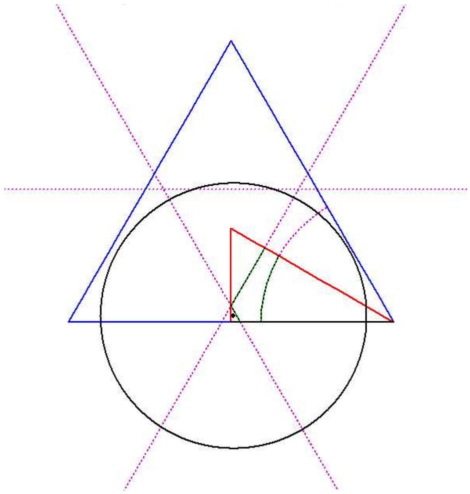
（ｉ）中心が赤色の部分にあるとき



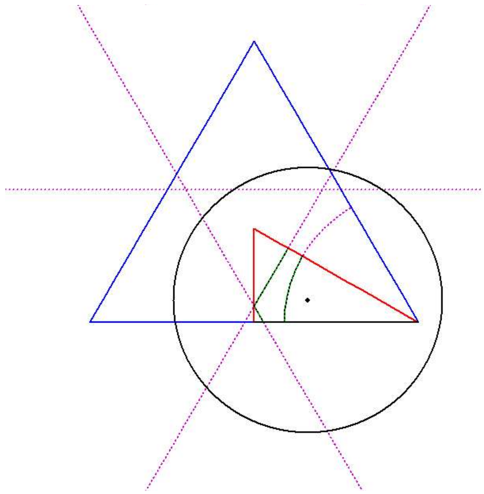
（ii）中心が白色の部分にあるとき



（iii）中心が青色の部分にあるとき



（iv）中心が黄色の部分にあるとき



3　円を移動させ、面積の増減を調べる（１）

◆ 移動の分解 ◆

　重心からの円の中心の移動について、まずは下方向の移動を、次に右方向への移動を考えます。

下方向への移動　中心が 2 の（ｉ）の領域、(iii)の領域にある場合が考えられます。

〈（ｉ）の領域にある場合〉

図3－1－1 より、下方向に移動すると面積が減少することがわかります。

さらに、図3－1－2 より、下方向へ移動するほど面積が減少していくことがわかります。

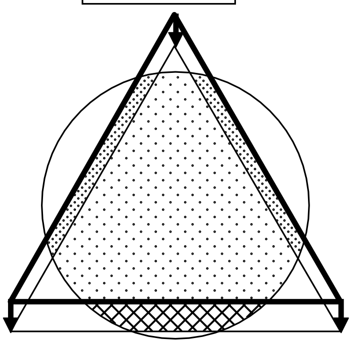


図3－1－1

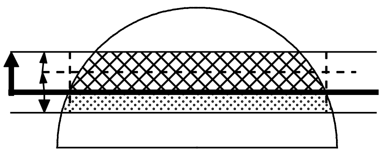
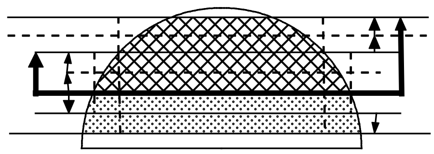


図3－1－2



問　中心が 2 の (iii) の領域にある場合を調べてみましょう。

右方向への移動　中心が (i), (ii), (iii), (iv) それぞれの領域にある場合を調べます。

〈 (i) の領域にある場合 〉

図3－2－1 より、右方向に移動すると面積が減少することがわかります。

さらに、図3－2－2 より、右方向へ移動するほど面積が減少していくことがわかります。

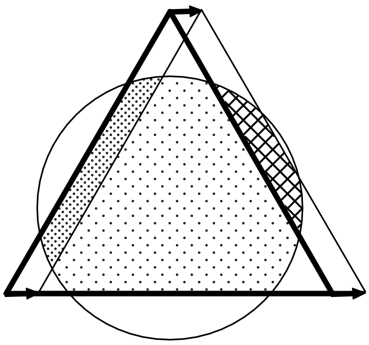


図3－2－1

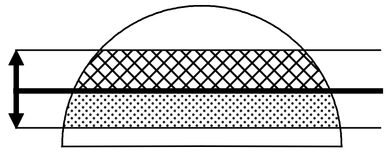
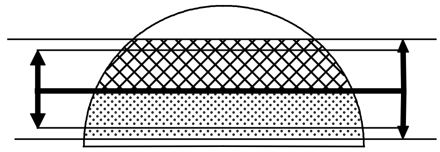


図3－2－2



問　中心が 2 の (ii), (iii), (iv) の領域にある場合を調べてみましょう。

4　円を移動させ、面積の増減を調べる (2)

2 の (i) ～ (iv) のそれぞれの場合について、左端から右方向に移動した場合の面積の増減を調べ、〈 ★★ の証明 〉を完成させてみましょう！

$\boxed{\mathbf{3}}$

次の各問に答えよ。

(1) 7 桁の数 $N_7 = 1111111$ (百十一万千百十一) を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 32 桁の数 $N_{32} = \underbrace{111\cdots1}_{32}$ を 32 で割ったときの余りを求めよ。

(3) 2016 桁の数 $N_{2016} = \underbrace{111\cdots1}_{2016}$ を 2016 で割ったときの余りを求めよ。

解説

(1) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ に注意すると

$$N_6 = 111111 = 111 \cdot 1000 + 111 = 111 \cdot 1001 = (N_3 \cdot 11 \cdot 13) \cdot 7$$

となり， N_6 は 7 で割り切れる。従って，

$$N_7 = 1111111 = 111111 \cdot 10 + 1 = N_6 \cdot 10 + 1$$

を 7 で割ったときの余りは 1 である。

(別解)

等比数列の和の公式を用いて， $N_7 = \displaystyle\sum_{k=1}^{7} 10^{k-1} = \frac{10^7 - 1}{10 - 1} = \frac{10^7 - 1}{9}$ となる。

$10 \equiv 3 \pmod 7$, $\quad 10^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $\quad 10^3 \equiv 3 \cdot 2 \equiv -1 \pmod 7$

$10^6 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod 7$, $\quad 10^7 \equiv 3 \pmod 7$

だから

$9N_7 = 10^7 - 1 \equiv 2 \equiv 2 + 7 = 9 \cdot 1 \pmod 7$

9 と 7 は互いに素だから

$N_7 \equiv 1 \pmod 7$ 　すなわち， N_7 を 7 で割ったときの余りは 1 である。

(2) $32 = 2^5$ だから $100000 = 10^5 = 2^5 \cdot 5^5$ は 32 の倍数である。

$N_{32} = \underbrace{111\cdots1}_{27} \cdot 10^5 + 11111 = N_{27} \cdot 10^5 + N_5$

だから N_{32} と N_5 は 32 で割ったときの余りは等しい。

$N_5 = 11111$ を 32 で割り算すると，余りは 7 となる。

従って， N_{32} を 32 で割ったときの余りも 7 である。

$$\begin{array}{r@{\,}r} & 347 \\ \cline{2-2} 32 \,\big)\!\! & 11111 \\ & \underline{96} \\ & 151 \\ & \underline{128} \\ & 231 \\ & \underline{224} \\ & 7 \end{array}$$

(別解)

$k \geqq 5$ のとき $10^k \equiv 0 \pmod{32}$ である。

$N_{32} = \displaystyle\sum_{k=1}^{32} 10^{k-1} = \frac{10^{32} - 1}{9}$ だから

$9N_{32} = 10^{32} - 1 \equiv -1 \equiv -1 + 32 \cdot 2 = 63 = 9 \cdot 7 \pmod{32}$

となる。 9 と 32 は互いに素だから

$N_{32} \equiv 7 \pmod{32}$

すなわち， N_{32} を 32 で割ったときの余りは 7 である。

(3) まず， $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 32 \cdot 9 \cdot 7$ に注意する。

$2016 = 6 \cdot 336$ なので， N_{2016} を 6 桁ごとに区切って考えると

$$N_{2016} = 111111 \times \left\{(10^6)^{335} + (10^6)^{334} + \cdots + 10^6 + 1\right\}$$

と表すことができる。 $N_6 = 111111$ は 7 の倍数だったから， N_{2016} も 7 で割り切れる。

また， $N_{2016} = \underbrace{111\cdots1}_{2016}$ の各位の数の合計

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{2016} = 2016$$

は 9 で割り切れるので， N_{2016} 自身が 9 で割り切れる。

さらに，

$$N_{2016} = N_{2011} \cdot 10^5 + N_5$$

と表されるので，(2) と同様に考えると， N_{2016} を 32 で割ったときの余りは 7 となる。

N_{2016} を $2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7$ で割ったときの余りを $r\,(0 \leqq r < 2016)$ と置く。

N_{2016} は 7 と 9 の公倍数だったから， r も 7 と 9 で割り切れるので，

$$r = 7 \cdot 9s = 63s\,(0 \leqq s < 32)$$

と表せる。N_{2016} を 32 で割ったときの余りが 7 になることと $63 = 32 \cdot 2 - 1$ に注意すると，

$$r = (32 \cdot 2 - 1)s = 32 \cdot 2s - s = 32k + 7\,(k \text{ は整数 })$$

と表せる。よって，

$$s + 7 = 32(2s - k)$$

となり， $s + 7$ が 32 の倍数になる。このような s は $0 \leqq s < 32$ の範囲では $s = 25$ だけである。従って， N_{2016} を 2016 で割った余り r は

$$r = 63 \cdot 25 = 1575$$

である。

(別解)

$N_{2016} = \dfrac{10^{2016} - 1}{9}$ であり，(1) と同様にして

$$9N_{2016} = 10^{2016} - 1 = (10^6)^{336} - 1 \equiv 1^{336} - 1 = 0 \pmod 7$$

9 と 7 は互いに素だから $N_{2016} \equiv 0 \pmod 7$ である。

また， $10 \equiv 1 \pmod 9$ だから $10^{k-1} \equiv 1 \pmod 9 (k = 1, 2, \cdots)$ なので

$$N_{2016} = \sum_{k=1}^{2016} 10^{k-1} \equiv \sum_{k=1}^{2016} 1 = 2016 \equiv 0 \pmod 9$$

となる。

さらに， (2) と同様にして

$$N_{2016} \equiv 7 \pmod{32}$$

となる。

N_{2016} を $2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7$ で割った余りを $r\,(0 \leqq r < 2016)$ と置くと，以上のことから r は連立合同式

$$\begin{cases} r \equiv 0 \pmod 7 \\ r \equiv 0 \pmod 9 \\ r \equiv 7 \pmod{32} \end{cases}$$

の解となる。第 1 と第 2 の条件から $r = 7 \cdot 9s = 63s\,(0 \leqq s < 32)$ と置ける。ここで，

$$63 \equiv -1 \pmod{32}$$

に注意すると第 3 の条件から

$$r = 63s \equiv -s \equiv 7 \pmod{32}$$
$$s \equiv -7 \equiv 25 \pmod{32}$$

$0 \leqq s < 32$ から $s = 25$ となり，

$$r = 63 \cdot 25 = 1575$$

が得られる。

m を正の整数とします。2 つの整数 a, b について $a - b$ が m の倍数であるとき， a と b は m を法として合同であるといい，式で

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表します。このような式を合同式といいます。合同式について，次のことが成り立ちます：

a, b, c, d は整数， m, n は正の整数とする。

(1) $a \equiv a \pmod{m}$

(2) $a \equiv b \pmod{m}$ ならば $b \equiv a \pmod{m}$

(3) $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $b \equiv c \pmod{m}$ ならば $a \equiv c \pmod{m}$

(4) $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ ならば $a + c \equiv b + d \pmod{m}$

(5) $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ ならば $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

(6) $a \equiv b \pmod{m}$ かつ $c \equiv d \pmod{m}$ ならば $ac \equiv bd \pmod{m}$

(7) $a \equiv b \pmod{m}$ ならば $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

(8) $ca \equiv cb \pmod{m}$ かつ c と m が互いに素ならば $a \equiv b \pmod{m}$

次の定理は「中国の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem) 」と呼ばれています：
$k\,(\geqq 2)$ 個の正の整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ について，どの 2 個も互いに素ならば，任意の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ に対して，連立合同式

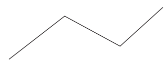
$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \cdots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

を満たす整数 x が $m_1 m_2 \cdots m_k$ を法としてただ 1 つ存在する。

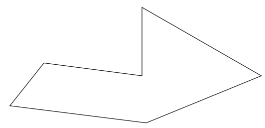
$\boxed{\mathbf{4}}$

平面上で n 本の線分を繋いでできる折線を <u>n–折線</u> といい，n–折線の端と端が繋がっているとき <u>閉 n–折線</u> という。

また，n–折線を作っている n 本の線分を <u>成分</u> とよぶとき，次の各問に答えよ。



3–折線



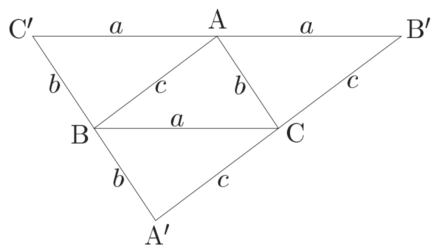
閉 6–折線

(1) 平面上に同一直線上にない 3 点 A, B, C がある。このとき，平面上の閉 3–折線で，3 つの成分の中点が 3 点 A, B, C となるものが存在することを示せ。

(2) どの 3 点も同一直線上にない 4 点 A, B, C, D で，どのように閉 4–折線をとってもその 4 つの成分の中点が 4 点 A, B, C, D となり得ないものが存在することを証明せよ。

(3) (1),(2) や 5 点の場合などを考察して一般化した命題を作り，その主張が正しいことを証明せよ。

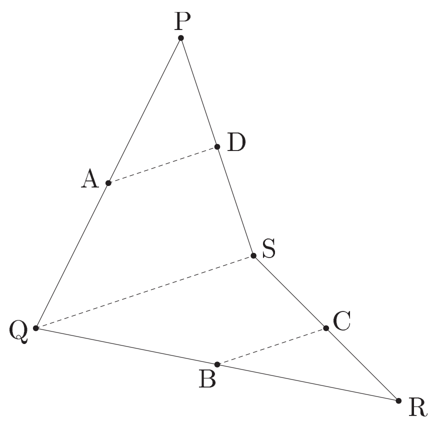
解説 (1) 3 点 A, B, C がつくる $\triangle$ABC に合同な三角形 3 枚を右の図のように $\triangle$ABC の各辺上におくと，三角形の内角の和は 180° であるから



$$\angle \mathrm{C'AB'} = \angle \mathrm{A'BC} = \angle \mathrm{B'CA'} = 180^\circ$$

したがって，$\triangle$A′B′C′ を得る。これがその 3 つの成分の中点が A, B, C となる閉 3–折線である。

(2) もし，与えられた 4 点 A, B, C, D を 4 つの成分の中点とする閉 4–折線 PQRS があったとして，PQ の中点が A，QR の中点が B，RS の中点が C，SP の中点が D であるとする。いま，S と Q を結んで，$\triangle$PQS，$\triangle$RSQ を考えれば，中点連結定理より



$$\mathrm{AD} /\!/ \mathrm{QS}\ ,\ \ \mathrm{AD} = \tfrac{1}{2}\mathrm{QS}\ ,\ \ \mathrm{BC} /\!/ \mathrm{QS}\ ,\ \ \mathrm{BC} = \tfrac{1}{2}\mathrm{QS}$$

が成り立つ。よって

$$\mathrm{AD} /\!/ \mathrm{BC}\ ,\ \ \mathrm{AD} = \mathrm{BC}$$

であり，四角形 ABCD は平行四辺形である。
したがって，四角形 ABCD が平行四辺形とならない 4 点 A, B, C, D をとれば，この 4 点を成分の中点とする閉 4–折線は存在しない。

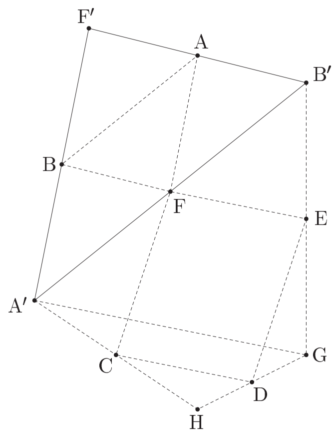
(3) i) 平面上に 5 点 A, B, C, D, E があるとき
C, D, E, F が平行四辺形の頂点となるように点 F をとり，3 点 A, B, F が閉 3‒折線 $A'B'F'$ の 3 つの成分の中点になるように A', B', F' をとる。$B'E$ の延長上に $B'E=EG$ となる点 G をとれば

$$FE /\!/ A'G\ ,\ \ FE=\frac{1}{2}A'G$$

である。さらに $A'C$ と GD の延長線の交点を H とすると

$$A'G /\!/ CD\ ,\ \ CD=\frac{1}{2}A'G$$

だから，C は $A'H$ の中点，D は GH の中点であり，閉 5‒折線 $F'A'HGB'$ が求めるものである。



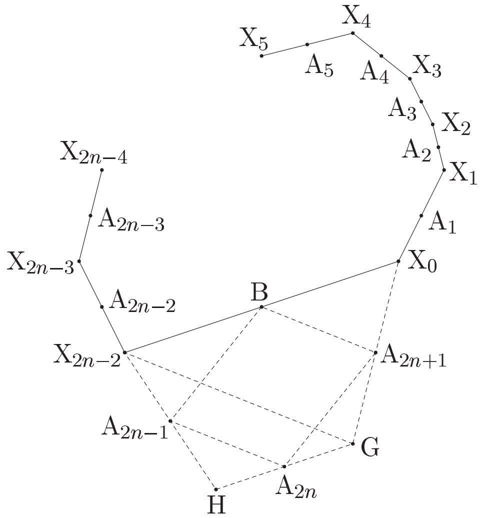
ii) 「どの 3 点も同一直線上にない任意の $(2n+1)$ 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$ に対し，これらを各成分の中点とする閉 $(2n+1)$‒折線が存在する。」

（証明）n に関する数学的帰納法で証明する。

I) $n=1$ のとき (1) で済み

II) $n-1 \longrightarrow n$

$\because$ A_{2n-1}，A_{2n}，A_{2n+1}，B が平行四辺形の頂点となるように点 B をとる。仮定より， A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n-2}，B が各成分の中点となるような閉 $(2n-1)$‒折線 X_1，X_2，$\cdots$，X_{2n-2}，X_0 がある。X_0A_{2n+1} の延長上に $X_0A_{2n+1}=A_{2n+1}G$ を満たす G をとり，GA_{2n} の延長上に $GA_{2n}=A_{2n}H$ を満たす点 H をとれば，A_{2n-1} は $X_{2n-2}H$ の中点となるから，閉 $(2n+1)$‒折線 X_1, X_2, $\cdots$, X_{2n-2}, H, G, X_0 が求めるものになる。



I),II) より主張はすべての自然数 n について成り立つ。

注) (3) の ii) は次のように精密化できる。
「$n \geqq 3$ のとき，どの 3 点も同一直線上にない任意の n 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対し，それらを成分の中点とする閉 n‒折線が存在するための必要十分条件は n が奇数であることである。」

(証明) $\Rightarrow$) 上記の通り

$\Leftarrow$) $n \geqq 3$ として，対偶「n が偶数ならば、どの 3 点も同一直線上にない n 個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ で，それらを成分の中点とする閉 n‒折線が存在しないものがある。」を示せばよい。例えば，$\overrightarrow{OA_k}=\overrightarrow{a_k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n=2m)$，$\overrightarrow{OX_k}=\overrightarrow{x_k}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ として，$\frac{1}{2}(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{x_1})=\overrightarrow{a_1}$，$\frac{1}{2}(\overrightarrow{x_1}+\overrightarrow{x_2})=\overrightarrow{a_2}$，$\cdots$，$\frac{1}{2}(\overrightarrow{x_{n-1}}+\overrightarrow{x_0})=\overrightarrow{a_n}$ をみたす閉 n‒折線 $X_0X_1\cdots X_n$ が存在したとすれば，$\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}-\cdots+(-1)^n\overrightarrow{a_{n-1}}+(-1)^{n+1}\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{0}$ が成り立たねばならない。そこで，$\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}-\cdots+(-1)^n\overrightarrow{a_{n-1}}+(-1)^{n+1}\overrightarrow{a_n}=\overrightarrow{0}$ をみたさない $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{a_n}$ をとればよい。(細部をチェックせよ。)

$\boxed{5}$

n は 2 以上の自然数とする。全員が同じ組に入る場合は除くとして，n 人を 2 つの組 A, B に分ける場合の数は，2^n-2(通り) と表すことができる。一方，この場合の数は ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$（通り）とも表すことができる。すなわち，以下の等式①が成り立つ。

$$2^n-2={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

(1) 上記の下線部のように場合の数を表すことができる理由を説明せよ。

(2) r は自然数で，$1 \leqq r \leqq n$ とする。
2 数 ${}_nC_{r-1}$，${}_nC_r$ のそれぞれを 2 で割ったときの
余りが等しいとき，${}_{n+1}C_r$ は偶数
余りが異なるとき，${}_{n+1}C_r$ は奇数
であることを証明せよ。ただし，証明のために必要な等式・不等式があれば，それもあわせて証明すること。

(3) ①の右辺の各項 ${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_3$，$\cdots$，${}_nC_{n-1}$ の値について調べる。
$n=8$ のとき，これらの値はすべて偶数である。
$n=7$ のとき，これらの値はすべて奇数である。
$n=6$ のとき，これらの値は偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返す。
このように，${}_nC_1$，${}_nC_2$，${}_nC_3$，$\cdots$，${}_nC_{n-1}$ の値が偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返すための必要十分条件は，$n=2^k-2$（k は 2 以上の自然数）であることを証明せよ。

(解説)

(1) まず，重複順列の考え方を用いる。1人につき A組に入るか，B組に入るかで 2 通りの入り方があるため，全員が同じ組に入ってもよいとすると，n人の入り方は積の法則により 2^n 通りである。
ここから，全員がA組に入る場合と，全員がB組に入る場合の 2 通りを除くと，場合の数は
2^n-2 (通り) と表される。
次に，組合せの考え方を用いる。A組に入る人数で n人の入り方を場合分けすると，
(1人がAに入る)または(2人がAに入る)または……または($n-1$人がAに入る)
となるため，場合の数は ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}$ (通り) とも表される。

(2) $(n+1)$ 人の中から A 組に入る r 人を選ぶときについて考える。
(i) その r 人の中に，ある特定の 1 人が含まれるとき，その 1 人を除く残り n人から $(r-1)$ 人を選ぶので，場合の数は ${}_nC_{r-1}$ (通り)
(ii) その r 人の中に，ある特定の 1 人が含まれないとき，その 1 人を除く残り n 人から r 人を選ぶので，場合の数は ${}_nC_r$ (通り)
これを合わせた場合の数は，${}_{n+1}C_r$ (通り) に等しい。よって，等式 ${}_{n+1}C_r={}_nC_{r-1}+{}_nC_r$ ……② が成り立つ。
2 数 ${}_nC_{r-1}$, ${}_nC_r$ がともに偶数または，ともに奇数のとき，2 数 ${}_nC_{r-1}$, ${}_nC_r$ のそれぞれを 2 で割ったときの余りは等しい。このとき，②の関係により，${}_{n+1}C_r$ は偶数である。
2 数 ${}_nC_{r-1}$, ${}_nC_r$ の一方が偶数で，他方が奇数のとき，2 数 ${}_nC_{r-1}$, ${}_nC_r$ のそれぞれを 2 で割ったときの余りは異なる。このとき，②の関係により，${}_{n+1}C_r$ は奇数である。

別解

$$
\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_{r-1}+{}_n\mathrm{C}_r &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{rn!}{r(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r)!(n-r+1)} \\
&= \frac{rn!}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!} \\
&= \frac{n!\{r+(n-r+1)\}}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}={}_{n+1}\mathrm{C}_r
\end{aligned}
$$

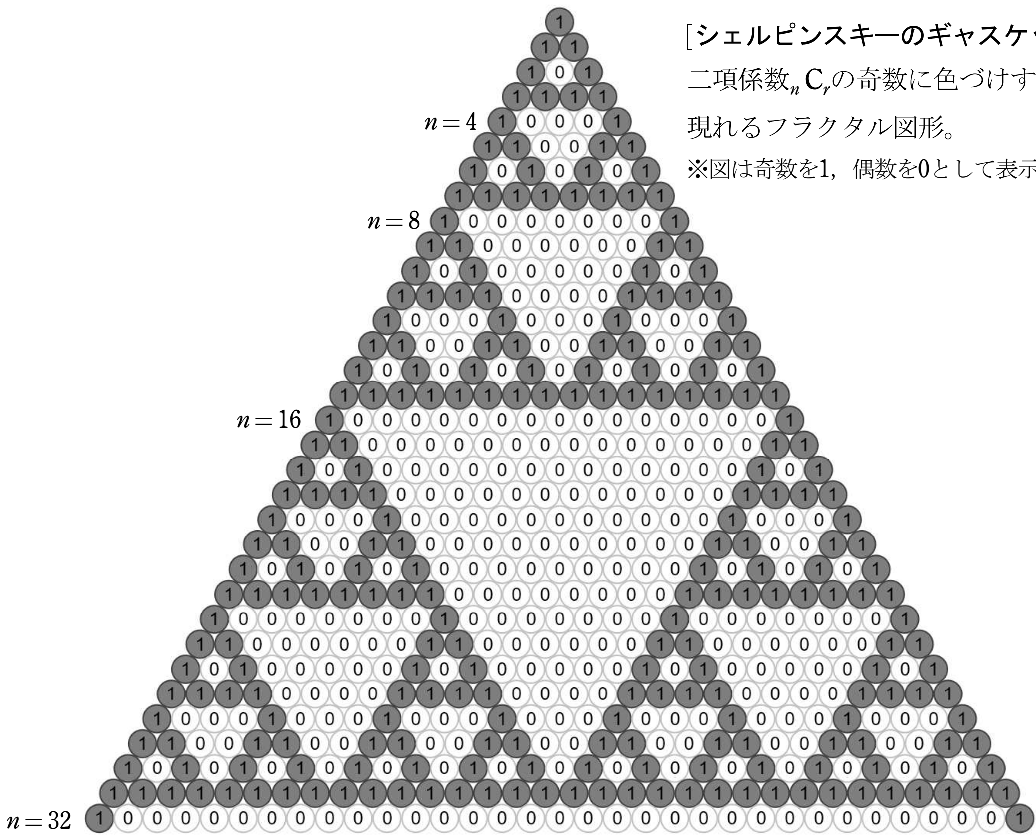
(3)　この問題は，パスカルの三角形，二項係数，シェルピンスキーのギャスケットという構造を知っていれば，かなり見通しのよい問題となる。

［パスカルの三角形］

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

［二項係数］

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & {}_0\mathrm{C}_0 & & & & \\
 & & & {}_1\mathrm{C}_0 & & {}_1\mathrm{C}_1 & & & \\
 & & {}_2\mathrm{C}_0 & & {}_2\mathrm{C}_1 & & {}_2\mathrm{C}_2 & & \\
 & {}_3\mathrm{C}_0 & & {}_3\mathrm{C}_1 & & {}_3\mathrm{C}_2 & & {}_3\mathrm{C}_3 & \\
{}_4\mathrm{C}_0 & & {}_4\mathrm{C}_1 & & {}_4\mathrm{C}_2 & & {}_4\mathrm{C}_3 & & {}_4\mathrm{C}_4
\end{array}
$$



［シェルピンスキーのギャスケット］
二項係数${}_n\mathrm{C}_r$の奇数に色づけすると現れるフラクタル図形。
※図は奇数を1，偶数を0として表示

※友田勝久さんのフリーソフト「色分けパスカル」で描画
http://www.osaka−kyoiku.ac.jp/~tomodak/

まず，${}_n\mathrm{C}_r\ (1\leqq r\leqq n-1)$ の値がすべて偶数であるための<u>必要十分条件</u>は，$n=2^k$ であることを証明する。

『$n=2^k \Longrightarrow {}_n\mathrm{C}_r\,(1\leqq r\leqq n-1)$ の値がすべて偶数』　の証明

$n=2^k$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}=\frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}=\frac{n}{r}\cdot\frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!(r-1)!}=\frac{n}{r}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

ゆえに　　$r\cdot{}_n\mathrm{C}_r=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　……③

> 別解　n 人から r 人の代表を選び，さらにその r 人の中からリーダー 1 人を決めるとき，
> (i)　初めに n 人から代表の r 人を選ぶと ${}_n\mathrm{C}_r$ 通り。さらに，その r 人の中からリーダー 1 人を選ぶと r 通りあるので，この場合の数は $r\cdot{}_n\mathrm{C}_r$ 通り。
> (ii)　初めに n 人からリーダー 1 人を選ぶと n 通り。その 1 人を除いた $(n-1)$ 人から代表の残り $(r-1)$ 人を選ぶと ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り。よって，$n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り。
> したがって，③の等式が得られる。

ここで，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ は自然数なので，③の右辺は n の倍数，すなわち 2^k の倍数である。

よって，左辺も 2^k の倍数となり，素因数 2 を k 個以上含む。$1\leqq r\leqq n-1=2^k-1$ であることから，r は素因数 2 を最大でも$(k-1)$個しか含まないので，${}_n\mathrm{C}_r$ は素因数 2 を少なくとも 1 つ含む。

したがって，$n=2^k$ のとき，${}_n\mathrm{C}_r\,(1\leqq r\leqq n-1)$ の値はすべて偶数である。

『${}_n\mathrm{C}_r\,(1\leqq r\leqq n-1)$ の値がすべて偶数 $\Longrightarrow$ $n=2^k$』　の証明

この命題の対偶『$n\fallingdotseq 2^k \Longrightarrow$ ある ${}_n\mathrm{C}_r\,(1\leqq r\leqq n-1)$ の値は奇数』を示す。

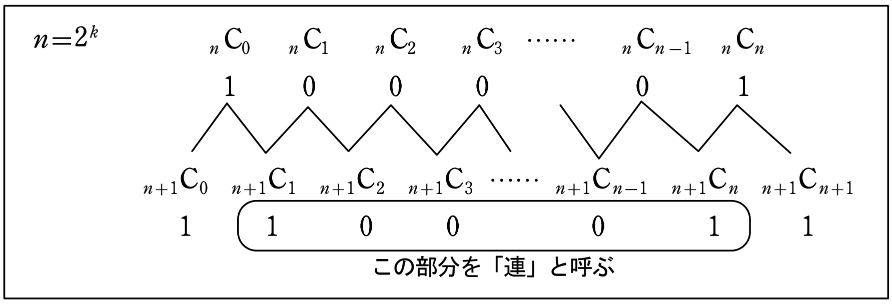
すなわち，$2^k+1\leqq n\leqq 2^{k+1}-1$ のとき，${}_n\mathrm{C}_r\,(1\leqq r\leqq n-1)$ の値の中に，必ず奇数が含まれることを示す。

$n=2^k$ のとき，${}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ {}_n\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{n-1}$ の値はすべて偶数であり，${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$ は奇数であるから，(2) で示した等式②より，

${}_{n+1}\mathrm{C}_1={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1$ と，${}_{n+1}\mathrm{C}_n={}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n$ は奇数である。

${}_{n+1}\mathrm{C}_m={}_n\mathrm{C}_{m-1}+{}_n\mathrm{C}_m$ (m は自然数, $2\leqq m\leqq n-1$)はすべて偶数である。

よって，${}_{n+1}\mathrm{C}_1,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_2,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1},\ {}_{n+1}\mathrm{C}_n$ は，両端の2個が奇数，内部の $(n-2)$ 個はすべて偶数となる。この「奇数, 偶数, 偶数, ……, 偶数, 偶数, 奇数」の部分を「連」と呼ぶことにする。

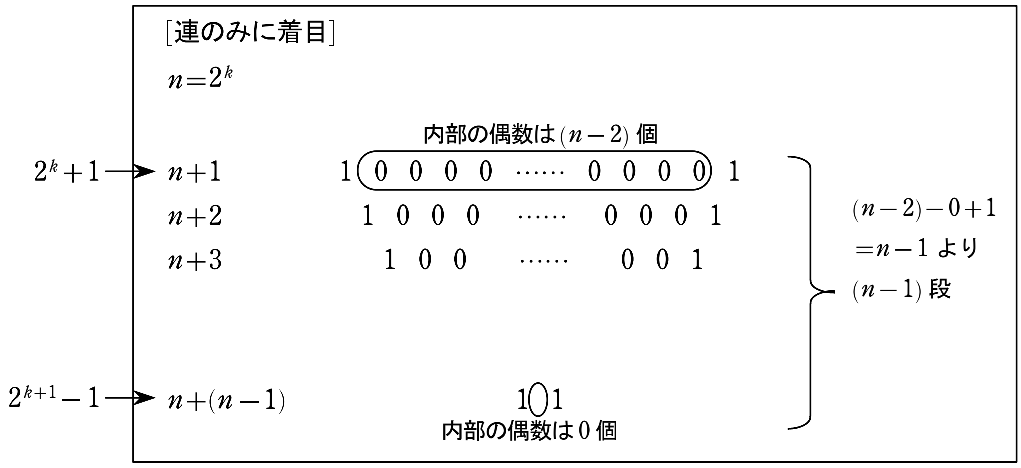


この連をもとにすると，(2) で示した等式②より，

${}_{n+2}\mathrm{C}_2={}_{n+1}\mathrm{C}_1+{}_{n+1}\mathrm{C}_2$ と，${}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+1}\mathrm{C}_{n-1}+{}_{n+1}\mathrm{C}_n$ は奇数であり，この2つの奇数を両端とする内部の $(n-3)$ 個の数 ${}_{n+2}\mathrm{C}_m={}_{n+1}\mathrm{C}_{m-1}+{}_{n+1}\mathrm{C}_m$ (m は自然数, $3\leqq m\leqq n-1$) はすべて偶数であるため，内部の偶数が 1 個少ない次の連ができる。

この操作を繰り返すと，最終的に，連は 2つの奇数 ${}_{n+(n-1)}\mathrm{C}_{n-1}$, ${}_{n+(n-1)}\mathrm{C}_n$ のみとなり，内部の偶数は 0 個となる。

内部の偶数の個数に着目すると，$(n-2)-0+1=n-1$ より，連は続けて $(n-1)$ 回できる。
$n+(n-1)=2n-1=2\cdot 2^k-1=2^{k+1}-1$ であるから，
$2^k+1\leqq n\leqq 2^{k+1}-1$ のとき，${}_n\mathrm{C}_r\ (1\leqq r\leqq n-1)$ の値の中には，少なくとも連の両端である2つの奇数が必ず含まれることが分かる。



したがって，${}_n\mathrm{C}_r\ (1\leqq r\leqq n-1)$ の値がすべて偶数ならば，$n=2^k$ である。

以上の理由により，${}_n\mathrm{C}_r\ (1\leqq r\leqq n-1)$ の値がすべて偶数であるための必要十分条件は，$n=2^k$ である。　…… ④

一方，${}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ {}_n\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{n-1}$ の値が偶数, 奇数, 偶数, 奇数, …… と交互に繰り返すとき，${}_n\mathrm{C}_{n-1}={}_n\mathrm{C}_1$ であることから，${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ は偶数である。また，${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$ は奇数であるから，(2) で示した等式②より，${}_{n+1}\mathrm{C}_m={}_n\mathrm{C}_{m-1}+{}_n\mathrm{C}_m$ (m は自然数, $1\leqq m\leqq n$)はすべて奇数である。
また，${}_{n+1}\mathrm{C}_0={}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}=1$ であるから，${}_{n+1}\mathrm{C}_0,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_1,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,\ {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}$ の値はすべて奇数である。よって，(2) で示した等式②より，${}_{n+2}\mathrm{C}_m={}_{n+1}\mathrm{C}_{m-1}+{}_{n+1}\mathrm{C}_m$ (m は自然数, $1\leqq m\leqq n+1$) の値はすべて偶数である。この計算の逆も成り立ち，④で示したことにより，$n+2=2^k$ である。

したがって，${}_n\mathrm{C}_1,\ {}_n\mathrm{C}_2,\ {}_n\mathrm{C}_3,\ \cdots\cdots,\ {}_n\mathrm{C}_{n-1}$ の値が偶数, 奇数, 偶数, 奇数, …… と交互に繰り返すための必要十分条件は，$n=2^k-2$ (k は 2 以上の自然数) である