「2024年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{1}$ 奇数を a^2+b^2 (ただし，a,b は $a<b$ をみたす自然数) の形に表すことを考える。5 は $5=1^2+2^2$ と表され， 表し方はこの 1 通りである。一方， 365 は $365=2^2+19^2=13^2+14^2$ と 2 通りに表される。正の奇数 n に対し， 平方数の和の表し方 ($n=a^2+b^2$, a,b は $a<b$ を満たす自然数) の総数を $S(n)$ と定める。 ただし，表すことが出来ない場合は 0 と定めることとする。例えば $S(5)=1$, $S(9)=0$, $S(365)=2$ である。 このとき， 次の問に答えよ。

(1) $3 \leqq p < 20$ の素数 p で，$S(p) \geqq 1$ を満たすものをすべて求めよ (答えのみでよい)。

(2) 2 つの正の奇数 m,n に対して

$$S(m) \geqq 1, S(n) \geqq 1 \text{ ならば } S(mn) \geqq 1$$

であることを証明せよ。

(3) $S(n) \geqq 4$ となる正の奇数 n を 1 つ求めよ。また，その奇数 n を 4 通りで表せ。

$\boxed{2}$ ある自然数の逆数を，自然数の逆数の和で表すことを考える。たとえば，2 つの自然数の逆数の和で表すとき，和の順序を考えなければ，

$$\frac{1}{2} \text{ は } \quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \quad \text{ と，2 通りに表すことができる。}$$

$$\frac{1}{4} \text{ は } \quad \frac{1}{5}+\frac{1}{20}, \quad \frac{1}{6}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{8}+\frac{1}{8} \quad \text{ と，3 通りに表すことができる。}$$

以下， x,y,z,n は自然数とする。また， $x \leqq y \leqq z$ を満たすものとする。

(1) 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$ を満たす自然数 (x,y) の組は，何通りあるか。

(2) 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10000}$ を満たす自然数 (x,y) の組は，何通りあるか。

(3) 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{n}$ を満たすような z の最大値を， n の式で表せ。

$\boxed{3}$ 確率に対しての有りがちな解釈間違いのひとつに「確率 $\dfrac{1}{10}$ のものは， 10 回のうち 1 回だけ必ず起こる」といったものが有ります。 この背景をもとに， 以下の問を考えてみてください。

(問) n を 2 以上の自然数とします。 ある試行において，確率 $\dfrac{1}{n}$ で起きる事象 A を考えます。 この試行は， 何度繰り返そうと， それぞれは独立しているものとします。 この試行を n 回行い， 1 回だけ A が起きる確率を $p(n)$ とします。 このとき

$$\text{全ての } n(\geqq 2) \text{ に対し } \frac{1}{3} < p(n) \leqq \frac{1}{2}$$

となることを証明してください。

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ。

(1) 空間上の正三角形 ABC に対し， AP, BP, CP が互いに直交するような点 P が存在することを示せ。

(2) 空間上の三角形 ABC に対し， 次の条件

- 点 P は 3 点 A,B,C とは異なる
- AP, BP, CP は互いに直交する

をみたす点 P が存在するような三角形 ABC の条件を求めよ。

$\boxed{5}$ n を正の整数とする。A, B の 2 人で，n 以下の正の整数を交互に選ぶ，次のようなゲームを行う：まず A が 1 つの数を選び，それ以降は交互に「直前に選ばれた数の約数か倍数」を 1 つ選ぶ。既に選ばれた数は指定できない。選ぶ数がなくなった方が負けである。（例えば $n=2$ のとき，A が 1 を選んでも 2 を選んでも B は残った方を選べ，A にはもう選ぶ数がないので A の負け。つまりこの場合 B が必勝である。）B が必勝となるような $n \leqq 100$ のうち，最大のものを N とする。

(1) N の値を答えよ（答のみでよい)。

(2) n が (1) で答えた値より大きいとき，A が必勝戦略をもつことを示せ。

(3) n が (1) で答えた値のとき，B が必勝戦略をもつことを示せ。

(4) 上のゲームに， さらに「A は最初に偶数を選ばなければならない」というルールを追加してゲームを行う。このとき，B が必勝戦略をもつようなできるだけ大きい n の値を見つけよ。

（注）「A に必勝戦略がある」とは，B がどのように正の整数を選んでいっても、A がそれに適切に対応して正の整数を選んでいけば勝てるということである。