「2023年度高知県高等学校数学コンクール 解答例」

$\boxed{1}$

たとえば，x^4+x^2+1 は，係数が整数という条件の下で，$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ と２つの多項式に因数分解される。

x^4+x^2+n が，係数が整数という条件の下で，２つの多項式に因数分解されるための自然数 n の条件を求めよ。

【解答例】

a, b, c, d は整数とする。

(1)　(1次式)×(3次式) の形には因数分解できないことを示す。

$x^4+x^2+n=(x+a)(x^3+bx^2+cx+d)$ とおく。

この両辺に $x=-a$ を代入すると

$$a^4+a^2+n=0 \quad より \quad n=-a^2(a^2+1)\leqq 0$$

となり，n が自然数であることに反する。

よって，x^4+x^2+n が<u>1次式 $x+a$ を因数にもつことはない</u>ため，

(1次式)×(3次式) の形には因数分解できない。

(2)　(2次式)×(2次式) の形に因数分解されるための条件を求める。

$x^4+x^2+n=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ とおく。

(右辺)$=x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd$

左辺と係数を比較すると

$a+c=0$ ……①

$b+ac+d=1$ ……②

$bc+ad=0$ ……③

$bd=n$ ……④

①より　$c=-a$ ……⑤

②より　$b-a^2+d=1$ ……⑥

③より　$-ab+ad=0$　よって　$a(d-b)=0$

ゆえに　$a=0$　または　$b=d$

(ⅰ)　$a=0$ のとき

⑤より　$c=0$

⑥より　$d=1-b$

④より　$n=b(1-b)>0$　よって，$0<b<1$

これは，b が整数であることに反する。

(ⅱ)　$b=d$ のとき

⑥より　$a^2=2b-1\geqq 0$　…… ⑦

$2b-1$ は正の奇数であるから，a は奇数である。

$a=2m-1$ (m は整数) とすると，⑦より　$(2m-1)^2=2b-1$

よって　$b=2m^2-2m+1$

④より　$n=(2m^2-2m+1)^2$　となる。

逆に，$n=(2m^2-2m+1)^2$ のとき

$$\begin{aligned} x^4+x^2+n &= x^4+x^2+(2m^2-2m+1)^2 \\ &= x^4+2(2m^2-2m+1)x^2+(2m^2-2m+1)^2-(4m^2-4m+1)x^2 \\ &= \{x^2+(2m^2-2m+1)\}^2-\{(2m-1)x\}^2 \\ &= \{x^2+(2m-1)x+2m^2-2m+1\}\{x^2-(2m-1)x+2m^2-2m+1\} \end{aligned}$$

…… ⑧

と因数分解される。

また，(1) より，$x^2\pm(2m-1)x+2m^2-2m+1$ が 1 次式の積に因数分解されることはない。

(1), (2) より，係数が整数であるという条件の下で，$n=(2m^2-2m+1)^2$ のとき，x^4+x^2+n は，⑧のように 2 つの多項式に因数分解され，この形しかないことが示された。

したがって，求める n の条件は

$$n=(2m^2-2m+1)^2 \quad (\ m \text{ は整数})$$

の形に表されることである。

$\boxed{2}$

2つのサイコロ（立方体）A，Bで，次の条件を満たすものを見出せ：A,Bの各面には正の整数（目）が1つ書いてある．同じ目が2つ以上あってもよい．A,Bは普通のサイコロ（1〜6の目が各1個ある）とは異なるが，AとBを投げたときの目の和の出方は普通のサイコロ2つを投げたときとまったく同じである．例えば目の和が2になるのは1通り，3になるのは2通り，... というこ
（注）AとBの目の付き方は同じとは限らない．

解答. まず一般に, 次のことがわかる.

目が $a_1, a_2, \ldots, a_6$ と目が $b_1, b_2, \ldots, b_6$ であるサイコロ（いくつかの目は等しくてもよい）を同時に振ったとき, 目の和が k となる場合の数は, 多項式

$$(x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_6})(x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_6}) \qquad (\star)$$

を展開したときの x^k の係数に等しい.

とくに, 通常のサイコロについて, 目の和が k となる場合の数は, 多項式

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

を展開したときの x^k の係数に等しい. そこで, この多項式を上の形とは別の $(\star)$ の形, つまり $f(x)g(x)$ の形に因数分解する. ここで $f(x), g(x)$ が定数項のない, 正の整数を係数とする多項式で $f(1) = g(1) = 6$ であるとき, またそのときにかぎり, 題意を満たすサイコロ A, B が得られる. つまり

$$f(x) = \alpha x^a + \beta x^b + \gamma x^c + \cdots \quad (\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 6)$$

のとき, a の目が α 個, b の目が β 個, c の目が γ 個, ... のサイコロをつくればよい. $g(x)$ についても同様.

等式

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= x(1 + x^3)(1 + x + x^2) \\ &= x(1 + x)(1 - x + x^2)(1 + x + x^2) \end{aligned}$$

より

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 = x^2(1 + x)^2(1 - x + x^2)^2(1 + x + x^2)^2$$

が得られる. この多項式の条件を満たす分解について, 次のことがわかる.

- $f(x)$ も $g(x)$ も x を因子にもつ（定数項をもたないから）.
- $f(x)$ も $g(x)$ も $1+x, 1+x+x^2$ を因子にもつ（$f(1)=g(1)=6$ だから）.

したがって（後は $(1-x+x^2)^2$ を分配するだけなので）

$$f(x)=x(1+x)(1+x+x^2)\ ,\ g(x)=x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2$$

としてよい. このとき

$$\begin{aligned}f(x)&=x(1+x)(1+x+x^2)=x(1+2x+2x^2+x^3)\\&=x+2x^2+2x^3+x^4,\\g(x)&=x(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)^2\\&=(x+2x^2+2x^3+x^4)(1-2x+3x^2-2x^3+x^4)\\&=x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^8\end{aligned}$$

である. したがって条件を満たすのは, 目が

$$(1,2,2,3,3,4),\quad (1,3,4,5,6,8)$$

であるサイコロの組である.

追記：母関数について

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して級数（無限和）

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

を, この数列の**母関数**という. 母関数によって, 数列の問題を関数・級数の問題として考えることができるようになる. するとそれらの理論（微積分など）を用いることができるので, 母関数は時に非常に有用である.

例えば, 正の整数 n を「相異なる正の整数の和に分割する方法の個数」を $A(n)$, 「正の奇数の和に分割する方法の個数」を $B(n)$ とする（n 自身も, 条件を満たすときは一つの分割とみなす）.

$$\begin{aligned}&5=4+1=3+2,\quad 5=3+1+1=1+1+1+1+1\\&6=5+1=4+2=3+2+1,\\&6=5+1=3+3=3+1+1+1=1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

だから $A(5)=B(5)=3$, $A(6)=B(6)=4$ である. 実は $A(n)$ と $B(n)$ の母関数は一致することが証明できる. そのことから

任意の n に対して $A(n)=B(n)$ である

ことがわかる（オイラー）.

$\boxed{3}$ a, b, c, d を $a+b+c+d=0$ を満たす【互いに相異なる】実数とし，放物線 $y=px^2$ $(p \neq 0)$ 上に 4 点 A，B，C，D を x 座標がそれぞれ a，b，c，d となるようにとる．2 直線 AB，CD が交わるとき，その交点 E について，

$$\mathrm{AE} \times \mathrm{BE} = \mathrm{CE} \times \mathrm{DE}$$

が成り立つことを証明せよ．

直線 AB の式は $y=p(a+b)x-pab$ であり，CD の式は,

$$y=p(c+d)x-pcd\ .$$

$a+b+c+d=0$ より，CD の式は

$$y=-p(a+b)x-pcd\ .$$

$m=p(a+b)$ とおくと，直線 AB，CD の式はそれぞれ

$$y=mx-pab\ ,\quad y=-mx-pcd\ .$$

従って，2 直線 AB，CD の方程式は

$$(y-mx+pab)(y+mx+pcd)=0\ .$$

これを整理して適当に置き換えることで.

$$y^2-m^2x^2+Ax+By+C=0\ .$$

さて,

$$-\frac{m^2+1}{p}(y-px^2)+(y^2-m^2x^2+Ax+By+C)=0 \cdots (*)$$

を考えると，$(*)$は

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ で表され,

放物線 $y=px^2$ と 2 直線 AB，CD の交点 A，B，C，D を通る．

よって，$(*)$は円の方程式を表し，A，B，C，D は同一円周上にあることが言える．

方べきの定理より,

$$\mathrm{AE} \times \mathrm{BE} = \mathrm{CE} \times \mathrm{DE}$$

が成り立つ.

$\boxed{4}$

0 以上の整数 n に対し
$$F_n = 2^{2^n} + 1$$
とします．このような数はフェルマー数と呼ばれ, 現在も盛んに研究されています．フェルマー数は

$$\begin{aligned}
F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3 \\
F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5 \\
F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17 \\
F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257 \\
F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537
\end{aligned}$$

は素数であることが知られていますが, F_5 は素数になりません．実際
$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$
となります．実は, フェルマー数で素数になるものは F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 しか見つかってなく, 他のフェルマー数で素数になるものが有るかは, 数学の最先端の研究においても未解決です．以上をふまえて, 次の問を考えてください.

$\boxed{\text{問}}$ 素数 73 は, 全ての n に対し, F_n の約数にならないことを証明してください.

解答例

$2^9 = 512 = 7 \cdot 73 + 1$ より, 9 以上の自然数 k に対し
$$2^k + 1 = 2^{k-9} \cdot 2^9 + 1 = 2^{k-9}(7 \cdot 73 + 1) + 1 = 2^{k-9} \cdot 7 \cdot 73 + 2^{k-9} + 1$$
が得られる．よって, $2^k + 1$ が 73 の倍数であると仮定すると
$$2^{k-9} + 1 = (2^k + 1) - 2^{k-9} \cdot 7 \cdot 73$$
も 73 の倍数となる．よって, ある自然数 k に対し $2^k + 1$ が 73 の倍数になるならば, k を 9 で割った余り r $(0 \leqq r < 9)$ に対し $2^r + 1$ も 73 の倍数となる．その一方,
$$2^0+1 = 1,\ 2^1+1 = 2,\ 2^2+1 = 5,\ 2^3+1 = 9,\ 2^4+1 = 17,\ 2^5+1 = 33,\ 2^6+1 = 65,\ 2^7+1 = 129,\ 2^8+1 = 257$$
は全て 73 の倍数にならないため, これは上の結論に矛盾する．以上より, 任意の自然数 k に対し $2^k + 1$ は 73 の倍数にならないことが示され, フェルマー数 $F_n = 2^{2^n} + 1$ も 73 の倍数にならないことが示される.

$\boxed{5}$

実数 x に対して，x をこえない最大の整数を $[x]$ で表す。$[x]$ は x の整数部分とよばれることがある。例えば，$[2.4] = 2$, $[-3.14] = -4$ である。また，$\langle x \rangle = x - [x]$ とおく。$\langle x \rangle$ は x の小数部分とよばれることがある。例えば，$\langle 2.4 \rangle = 0.4$, $\langle -3.14 \rangle = 0.86$ である。このとき，次の各問に答えよ。

(1) $[x^2] = [x]^2$ かつ $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$ となる実数 x をすべて求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ で以下の条件 (ア) と (イ) の両方を満たすものの具体例を一つ挙げよ。また，自分が挙げた具体例が，確かに (ア) と (イ) の両方を満たすことの証明もつけること。なお，(イ) において ${a_n}^2$ とは $a_n \times a_n$ のことを表す。

(ア) すべての自然数 n に対して $n < a_n < n+1$ が成り立つ。

(イ) すべての自然数 n に対して $[{a_n}^2] = [a_n]^2$ が成り立つ。

■解答

(1) 実数 x が $[x^2] = [x]^2$ かつ $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$ を満たすとしよう。すると，$\langle x \rangle$ の定義より

$$\begin{aligned}[x]^2 &= (x - \langle x \rangle)^2 \\ &= x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2\end{aligned}$$

および

$$[x^2] = x^2 - \langle x^2 \rangle$$

が成り立つ。$[x^2] = [x]^2$ かつ $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$ だから

$$\begin{aligned}x^2 - \langle x^2 \rangle &= x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \\ 0 &= 2\langle x \rangle^2 - 2x\langle x \rangle \\ 0 &= 2\langle x \rangle(\langle x \rangle - x)\end{aligned}$$

が成り立つ。最後の式が成り立つのは，$\langle x \rangle = 0$ または $\langle x \rangle = x$ となるときに限られる。$\langle x \rangle$ の定義より $\langle x \rangle = 0$ となる必要十分条件は $0 = x - [x]$ すなわち $x = [x]$ となることである。言い換えるなら，$\langle x \rangle = 0$ となる必要十分条件は，x が整数となることである。また，$\langle x \rangle$ の定義より $\langle x \rangle = x$ となる必要十分条件は $[x] = 0$ となること，すなわち $0 \leqq x < 1$ を満たすことである。よって，x は整数または $0 < x < 1$ を満たす実数である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = n + \frac{1}{3n}$$

で定める。このとき，$\{a_n\}$ は明らかに条件 (ア) を満たす。(イ) を満たすことを示そう。n を任意の自然数とすると，

$$
\begin{aligned}
[{a_n}^2] &= \left[\left(n+\frac{1}{3n}\right)^2\right] \\
&= \left[n^2+\frac{2}{3}+\frac{1}{9n^2}\right]
\end{aligned}
$$

である。ここで，$0<\dfrac{1}{9n^2}\leqq\dfrac{1}{9}$ だから

$$
\frac{2}{3}<\frac{2}{3}+\frac{1}{9n^2}\leqq\frac{7}{9}
$$

が成り立つ。したがって，$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{9n^2}$ は ${a_n}^2$ の小数部分である。よって，$[{a_n}^2]=n^2$ を得る。一方，$0<\dfrac{1}{3n}\leqq\dfrac{1}{3}$ なので，$\dfrac{1}{3n}$ は a_n の小数部分だから $[a_n]^2=n^2$ も成り立つ。