$\boxed{1}$ 奇数をa^2+b^2(ただし，a，b は$a<b$を満たす自然数)の形に表すことを考える．5 は$5=1^2+2^2$と表され，表し方はこの 1 通りである．一方，365 は$365=2^2+19^2=13^2+14^2$と 2 通りに表される．正の奇数 n に対し，平方数の和の表し方($n=a^2+b^2$，a，b は$a<b$を満たす自然数)の総数を$S(n)$と定める．ただし，表すことが出来ない場合は 0 と定めることとする．例えば，$S(5)=1$，$S(9)=0$，$S(365)=2$である．このとき，次の問に答えよ．

(1) $3\leqq p<20$ の素数 p で，$S(p)\geqq 1$ を満たすものをすべて求めよ(答えのみでよい)．

(2) 2 つの正の奇数 m，n に対して，

$$S(m)\geqq 1,\ S(n)\geqq 1 \text{ ならば } S(mn)\geqq 1$$

であることを証明せよ．

(3) $P(n)\geqq 4$ となる正の奇数 n を 1 つ求めよ．また，その奇数 n を 4 通りで表せ．

---

(1) $p=5,13,17$ ($5=1^2+2^2$，$13=2^2+3^2$，$17=1^2+4^2$)

(2) $m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$ (a，b，c，d は自然数)とおくと，

$$\begin{aligned} mn &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\ &= a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \end{aligned}$$

である．

a，b，c，d はいずれも自然数であるから，$ac+bd\neq 0$ である．

また，m は奇数であるから，a，b の一方は奇数で，もう一方は偶数である．奇数の方を a，偶数の方を b とする．n についても同様に，奇数の方を d，偶数の方を c とすると，$ad-bc$ は奇数となる．よって，$ad-bc\neq 0$．

mn は奇数であるから，$(ac+bd)^2$ と $(ad-bc)^2$ の偶奇は異なり，$ac+bd\neq ad-bc$．

したがって，$S(mn)\geqq 1$ である．

(3) (例) $5\times 13\times 17=1105$

表し方は$1105=4^2+33^2=9^2+32^2=12^2+31^2=23^2+24^2$

(参考)

$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$ (a，b，c，d は $a<b$，$c<d$ を満たす自然数)とすると，

$$\begin{aligned} mn &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\ &= (ad+bc)^2+(ac-bd)^2 \end{aligned}$$

である．

ここで，$a<b$，$c<d$ であるから，$ac+bd\neq ad+bc$，$ac-bd\neq 0$．

また，m，n が互いに素であるとき，$ad-bc\neq 0$ である．

$\because$ $ad-bc=0$ とすると，$a:b=c:d$ であるから，互いに素な自然数 p，q と自然数 k，l を用いて，

$$a=pk,\ b=qk,\ c=pl,\ d=ql$$

と表せる．このとき，

$$m=(p^2+q^2)k^2,\ n=(p^2+q^2)l^2$$

となり，公約数 $p^2+q^2(\geqq 2)$ をもつ．

したがって，m，n が互いに素であるとき，$S(mn)\geqq 2$ である．

2

ある自然数の逆数を，自然数の逆数の和で表すことを考える。

たとえば，2つの自然数の逆数の和で表すとき，和の順序を考えなければ，

$\frac{1}{2}$ は $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ，$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ と，2通りに表すことができる。

$\frac{1}{4}$ は $\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ，$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ ，$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ と，3通りに表すことができる。

以下，x, y, z, n は自然数とする。また，$x \leqq y \leqq z$ を満たすものとする。

(1) 方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は，何通りあるか。

(2) 方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{10000}$ を満たす自然数 $(x,\ y)$ の組は，何通りあるか。

(3) 方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}$ を満たすような z の最大値を，n の式で表せ。

解説

一般に，方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ について

$0<x \leqq y$ より，$0<\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{x}$ であるから

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{n}-\frac{1}{y}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqq \frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$$

よって，$n<x \leqq y \leqq 2n$ ……① が成り立つ。

(1) ①より　$6<x \leqq y \leqq 12$

また，$\frac{1}{y}=\frac{1}{6}-\frac{1}{x}=\frac{x-6}{6x}$ より，$y=\frac{6x}{x-6}$

上の条件から，y の値を1つ1つ調べると，次のようになる。

x	7	8	9	10	11	12
$6x$	42	48	54	60	66	72
$x-6$	1	2	3	4	5	6
y	42	24	18	15	$\frac{66}{5}$	12

y は自然数であるから，$(x,\ y)=(7,\ 42),(8,\ 24),(9,\ 18),(10,\ 15),(12,\ 12)$

したがって，自然数 $(x,\ y)$ の組は5通りある。

(2) 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{n}$ について，①のことから

$x=n+a$，$y=n+b$ （a, b は自然数かつ $a\leqq b\leqq n$ ）

とおく。

方程式より $\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{n+b}=\dfrac{1}{n}$

両辺に $n(n+a)(n+b)$ をかけると　$n(n+b)+n(n+a)=(n+a)(n+b)$

式を整理すると　$ab=n^2$

$n=10000$ のとき，$ab=n^2=10000^2=\{(2\cdot5)^4\}^2=2^8\cdot5^8$ ……②

$2^8\cdot5^8$ の正の約数は全部で $(8+1)(8+1)=81$ 個あり，そのうちの1つを k とする。

$cd=2^8\cdot5^8$ を満たす自然数 c, d の組を考えると，$(c,\ d)=\left(k,\ \dfrac{2^8\cdot5^8}{k}\right)$ と対称的に

$(c,\ d)=\left(\dfrac{2^8\cdot5^8}{k},\ k\right)$ が存在するので，$c=d$ を満たす $(c,\ d)=(2^4\cdot5^4,\ 2^4\cdot5^4)$ の1組を除けば，対称性から，$c<d$ を満たす組と $c>d$ を満たす組は同数存在する。

よって，②を満たす a, b の組は，

$a=b$ を満たすものが1組

$a<b$ を満たすものが $(81-1)\div2=40$ 組

あるので，$a\leqq b$ を満たす組は全部で $1+40=41$ 組ある。

$(a,\ b)$ の各組の値に応じて，異なる $(x,\ y)$ の組が1つ定まるので，
自然数 $(x,\ y)$ の組は41通りある。

(3) 方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{n}$ について

$0<x\leqq y\leqq z$ より，$0<\dfrac{1}{z}\leqq\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{x}$ であるから

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqq\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}$$

よって，$n<x\leqq y\leqq z\leqq 3n$ が成り立つ。

このことから，

$$x=n+a,\ y=n+b,\ z=n+c\ \ (a,\ b,\ c\text{ は自然数かつ }a\leqq b\leqq c\leqq 2n)$$

とおく。

方程式より $\dfrac{1}{n+a}+\dfrac{1}{n+b}+\dfrac{1}{n+c}=\dfrac{1}{n}$

両辺に $n(n+a)(n+b)(n+c)$ をかけると

$$n(n+b)(n+c)+n(n+c)(n+a)+n(n+a)(n+b)=(n+a)(n+b)(n+c)$$

式を整理すると $2n^3+(a+b+c)n^2-abc=0$

$$(ab-n^2)c=n^2\{2n+(a+b)\}$$

この右辺は自然数であるから，$ab-n^2$ も自然数である。 ……③

よって $c=\dfrac{n^2\{2n+(a+b)\}}{ab-n^2}$ ……④

z が最大のとき，c も最大となるので，④の右辺の最大値を調べればよい。

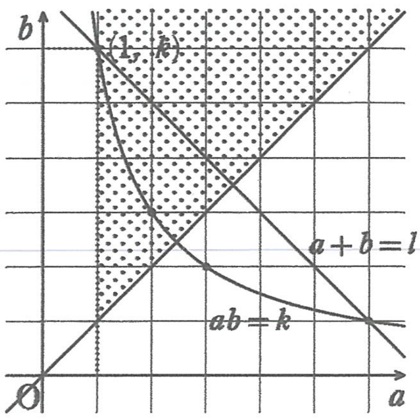
以下，$k,\ l$ は自然数とする。

ここで，いったん $ab=k$ と値を固定して，このときの $a+b$ の最大値を調べてみる。

ab 平面において，不等式 $a\leqq b$，$a\geqq 1$，$b\geqq 1$ を満たす領域において，(a, b) の値の組は，曲線 $ab=k$ 上の格子点を表す。

この格子点を直線 $a+b=l$ が通るときの y 切片 l の最大値を求める。

点 $(1,\ k)$ を通るとき，l は最大となるので，$ab=k$ と値を固定したとき，$a=1,\ b=k$ で $a+b$ は最大値 $1+k$ をとる。 ……⑤



$ab=k$ と値を固定したとき，

④から，$a+b$ が最大値をとるとき，④も最大値をとる。

⑤から，$a+b$ の最大値と，そのときの a, b の値は定まる。

すなわち，$a=1$, $b=k$ で $a+b$ は最大値 $1+k$ をとり，④も最大値をとる。

③から，$ab-n^2 \geqq 1$ より $ab \geqq n^2+1$

ここで，$ab=n^2+1$ と $ab=n^2+m$ (m は2以上の自然数) のときの④の最大値の大小を比較してみる。

$ab=n^2+1$ のときは，

$a=1$, $b=n^2+1$ で，$a+b$ は最大値 $1+(n^2+1)=n^2+2$ をとり，

④の最大値は $\dfrac{n^2\{2n+(n^2+2)\}}{(n^2+1)-n^2}=n^2(n^2+2n+2)$ ……⑥

$ab=n^2+m$ のときは，

$a=1$, $b=n^2+m$ で，$a+b$ は最大値 $1+(n^2+m)=n^2+m+1$ をとり，

④の最大値は $\dfrac{n^2\{2n+(n^2+m+1)\}}{(n^2+m)-n^2}=\dfrac{n^2(n^2+2n+m+1)}{m}$ ……⑦

⑥と⑦の値の差をとると

$$n^2(n^2+2n+2)-\frac{n^2(n^2+2n+m+1)}{m}$$

$$=\frac{mn^2(n^2+2n+2)-n^2(n^2+2n+m+1)}{m}$$

$$=\frac{(m-1)n^2(n+1)^2}{m}>0$$

よって，ab の値の固定をはずしたとき，$a=1$, $b=n^2+1$ のときの④の値が，c の最大値である。

すなわち，c の最大値は，⑥より $c=n^2(n^2+2n+2)$

したがって，z の最大値は $z=c+n=n^2(n^2+2n+2)+n=n(n+1)(n^2+n+1)$

$\boxed{3}$

2024 年度 数学コンクール 大問 3 解答例

問

n を 2 以上の自然数とします．ある試行において，確率 $\dfrac{1}{n}$ で起きる事象 A を考えます．この試行は，何度繰り返そうと，それぞれは独立しているものとします．この試行を n 回行い，1 回だけ A が起きる確率を $p(n)$ とします．このとき

$$\text{全ての } n(\geqq 2) \text{ に対し } \frac{1}{3} < p(n) \leqq \frac{1}{2}$$

となることを証明してください．

解答例 1

$p(n) = n \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}$ である．以降

$$n \geqq 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \leqq \frac{1}{p(n)} < 3 \quad \cdots \quad (\star)$$

を示す．

$n = 2$ のとき $(\star)$ は明らかに成り立つ．$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(n)} &= \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&= 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{n-1} + \sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \frac{1}{(n-1)^k} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \frac{1}{(n-1)^k} \\
&\geqq 2
\end{aligned}$$

より $2 \leqq \dfrac{1}{p(n)}$ が成り立つ. さらに

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p(n)} &= \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\
&= \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&= 1+(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}+\sum_{k=2}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_k \frac{1}{(n-1)^k} \\
&= 2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!}\cdot\frac{1}{(n-1)^k} \\
&= 2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{1\cdot 2\cdots k}\cdot 1\cdot\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n-1}\right) \\
&\leqq 2+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1 \\
&= 2+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{2^{n-2}}\right\}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 3-\frac{1}{2^{n-2}} \\
&< 3
\end{aligned}$$

より $\dfrac{1}{p(n)} < 3$ も成り立つ. 以上より, 2 以上の全ての自然数 n に対し $(\star)$ は成り立つ.

$\boxed{\text{解答例 2}}$

$p(n)=n\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}=\dfrac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}$ である．
$n=2$ のとき，主張は明らかに成り立つ．$n \geqq 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}-p(n) &= \frac{1}{2}-\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}\\
&= \frac{n^{n-1}-2(n-1)^{n-1}}{2n^{n-1}}\\
&= \frac{1}{2n^{n-1}}\left[\{1+(n-1)\}^{n-1}-2(n-1)^{n-1}\right]\\
&= \frac{1}{2n^{n-1}}\left\{(n-1)^{n-1}+(n-1)\cdot(n-1)^{n-2}+\sum_{k=0}^{n-3}{}_{n-1}\mathrm{C}_k(n-1)^k-2(n-1)^{n-1}\right\}\\
&= \frac{1}{2n^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-3}{}_{n-1}\mathrm{C}_k(n-1)^k\\
&\geqq 0
\end{aligned}
$$

より $p(n)\leqq\dfrac{1}{2}$ が成り立つ．
次に，2 以上の自然数 n に対し

$$3(n-1)^{n-1}>n^{n-1}\quad\left(\Leftrightarrow \frac{n}{n-1}<3^{\frac{1}{n-1}}\right)\quad\cdots(\sharp)$$

が成り立つことを帰納法を用いて示す．$n=2$ のとき $(\sharp)$ は明らかに成り立つ．また，ある $n\ (\geqq 2)$ での $(\sharp)$ の成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
(n+1)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k n^k = n^n + n\cdot n^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{n!}{k!(n-k)!}n^k \\
&= 2n^n + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\cdot\frac{n^{k+1}}{(n-k)(n-1)^k}(n-1)^k \\
&= 2n^n + \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{1}{1-\frac{k}{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^k(n-1)^k \\
&\leqq 2n^n + \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{1}{1-\frac{n-2}{n}}\left(3^{\frac{1}{n-1}}\right)^k(n-1)^k \quad (\because \text{帰納法の仮定}\ (\sharp)) \\
&= 2n^n + \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{1}{1-\frac{n-2}{n}}\cdot 3^{\frac{k}{n-1}}\cdot(n-1)^k \\
&\leqq 2n^n + \sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{1}{1-\frac{n-2}{n}}\cdot 3\cdot(n-1)^k \\
&= 2n^n + \frac{3}{1-\frac{n-2}{n}}\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-1}\mathrm{C}_k(n-1)^k \\
&= 2n^n + \frac{3n}{2}\left[\{1+(n-1)\}^{n-1}-(n-1)^{n-1}\right] \\
&= 2n^n + \frac{3}{2}n^n - \frac{3}{2}n(n-1)^{n-1} \\
&= 3n^n + \frac{n}{2}\left\{n^{n-1}-3(n-1)^{n-1}\right\} \\
&< 3n^n \quad (\because \text{帰納法の仮定}\ (\sharp))
\end{aligned}$$

が言えるので, $(\sharp)$ は全ての $n \geqq 2$ において成り立つ.

以上より, 2 以上の自然数 n に対し

$$p(n)-\frac{1}{3}=\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}}-\frac{1}{3}=\frac{3(n-1)^{n-1}-n^{n-1}}{3n^{n-1}}>0 \quad (\because (\sharp))$$

が言えるので $p(n)>\dfrac{1}{3}$ が示される.

$\boxed{\text{解答例3}}$（数学IIIの知識を使います.）

$p(n) = n \cdot \dfrac{1}{n} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ である. ここで, 関数

$$f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} \quad (0 < x < 1)$$

を考える.

$$\log f(x) = \log x^{\frac{x}{1-x}} = \frac{x \log x}{1 - x}$$

の両辺を微分すると

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\log x + 1 - x}{(1-x)^2} \quad \cdots \quad (\star)$$

となる. ここで, 関数

$$g(x) = \log x + 1 - x \quad (0 < x \leqq 1)$$

を考えると, $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 > 0 \ (0 < x < 1)$ より

$$0 < x < 1 \Rightarrow \log x + 1 - x = g(x) < \lim_{x \to 1-0} g(x) = g(1) = 0$$

が得られる. よって $(\star)$ より $\dfrac{f'(x)}{f(x)} < 0$ が得られ, $f(x) > 0$ より $f'(x) < 0$ が得られる. 以上より

$$p(n) = f\left(1 - \frac{1}{n}\right) > f\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = p(n+1)$$

が示されるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= p(2) > p(3) > p(4) > \cdots \\
&> \lim_{n\to\infty} p(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \lim_{h \to -0} (1+h)^{-\frac{1}{h}-1} \quad \left(h = -\frac{1}{n} \text{ での置き換え}\right) \\
&= \lim_{h \to -0} \frac{(1+h)^{-1}}{(1+h)^{\frac{1}{h}}} \\
&= \frac{1}{e} > \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

が言える. 以上より, 任意の自然数 $n \geqq 2$ に対し $\dfrac{1}{3} < p(n) \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つ.

4

次の問に答えよ．

(1) 空間上の正三角形 ABC に対し，AP, BP, CP が互いに直交するような点 P が存在することを示せ。

(2) 空間上の三角形 ABC に対し，次の条件
   - 点 P は 3 点 A,B,C とは異なる
   - AP, BP, CP は互いに直交する

   をみたす点 P が存在するような三角形 ABC の条件を求めよ．

（解答）

(1) 正三角形の辺の長さを $\sqrt{2}$ として一般性を失わない。座標を取り直して A$(1,0,0)$, B$(0,1,0)$, C$(0,0,1)$ とするとき，原点 O が先ほどの点 P の条件を満たしている。

(2) 三角形 ABC において点 A, B, C に向かい合う辺の長さをそれぞれ a, b, c と表わすことにする。
まず必要条件を求めよう。条件をみたす点 P が存在すると仮定する。 $s = \mathrm{PA}$, $t = \mathrm{PB}$, $u = \mathrm{PC}$ とする。
このとき

$$a^2 = t^2 + u^2$$
$$b^2 = u^2 + s^2$$
$$c^2 = s^2 + t^2$$

よって

$$\cos\angle A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ca} = \frac{2s^2}{2ca} = \frac{s^2}{ca} > 0$$

同様に $\cos\angle B > 0$, $\cos\angle C > 0$ となるので三角形 ABC は鋭角三角形となる。
次に三角形 ABC が鋭角三角形であるとき，条件をみたす点の存在を示す。$b^2 + c^2 - a^2 > 0$ であるので $\tilde{s} > 0$ を用いて $2\tilde{s}^2 = b^2 + c^2 - a^2$ とおくことができる。同様に $\tilde{t}, \tilde{u} > 0$ を用いて

$$2\tilde{t}^2 = c^2 + a^2 - b^2$$
$$2\tilde{u}^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

とおくことができる。これより

$$a^2 = \tilde{t}^2 + \tilde{u}^2$$
$$b^2 = \tilde{u}^2 + \tilde{s}^2$$
$$c^2 = \tilde{s}^2 + \tilde{t}^2$$

となる。 これは座標を取り直すことよって A$(\tilde{s},0,0)$, B$(0,\tilde{t},0)$, C$(0,0,\tilde{u})$ とできることを意味する。この座標の原点を O とすると，O は 3 点 A,B,C と異なり，OA, OB, OC は互いに直交する。
以上のことから，「三角形 ABC が鋭角三角形である」が求める条件といえる。

5

問題. n を正の整数とする．A, B の 2 人で，n 以下の正の整数を交互に選ぶ，次のようなゲームを行う：まず A が 1 つの数を選び，それ以降は交互に「直前に選ばれた数の約数か倍数」を 1 つ選ぶ．既に選ばれた数は指定できない．選ぶ数がなくなった方が負けである．(例えば $n=2$ のとき，A が 1 を選んでも 2 を選んでも B は残った方を選べ，A にはもう選ぶ数がないので A の負け．つまりこの場合 B が必勝である.）

B が必勝となるような $n \leqq 100$ のうち，最大のものを N とする．

(1) N の値を答えよ（答のみでよい）.

(2) n が (1) で答えた値より大きいとき，A が必勝戦略をもつことを示せ.

(3) n が (1) で答えた値のとき，B が必勝戦略をもつことを示せ.

(4) 上のゲームに, さらに「A は最初に偶数を選ばなければならない」というルールを追加してゲームを行う．このとき，B が必勝戦略をもつようなできるだけ大きい n の値を見つけよ.

解答. n 以下の素数 p で $2p > n$ をみたすものを,「(n に関する）大きい素数」とよぶことにする．まず，次が成り立つことがわかる．

補題. n に関する大きい素数が 2 つあれば，A は次の戦略で勝てる.

(i) p, q を n に関する大きい素数とする．A はまず p を選ぶ.

(ii) B は 1 を選ぶしかない.

(iii) A は q を選ぶ．このとき B には選べる数がないので A の勝ちである.

(1) $N=10$ である.

(2) $11 \leqq n \leqq 100$ のとき，つねに n に関する大きい素数が 2 つ存在することを確認する.

$11 \leqq n \leqq 13$ のとき，7 と 11 は大きい素数である.

$14 \leqq n \leqq 21$ のとき，11 と 13 は大きい素数である.

$22 \leqq n \leqq 33$ のとき，17 と 19 は大きい素数である.

$34 \leqq n \leqq 57$ のとき，29 と 31 は大きい素数である.

$58 \leqq n \leqq 93$ のとき，47 と 53 は大きい素数である．

$94 \leqq n \leqq 100$ のとき，83 と 89 は大きい素数である．

したがって上の補題から，$11 \leqq n \leqq 100$ のとき，A は必勝戦略をもつ．

(3) $n = 10$ のとき，1〜10 の正の整数を次の 5 つの組に分ける．

$$\{1,7\},\quad \{2,6\},\quad \{3,9\},\quad \{4,8\},\quad \{5,10\}$$

すると，B は「A が選んだ数と同じ組の数を選ぶ」という戦略で勝てる（A がどの数を選んでも，B が選ぶ数はつねに残っているから）．したがって B は必勝戦略をもっている．

(4) （これは特殊な問題です．完全な解答（つまり B が必勝戦略をもつ最大の n の値の決定）は高校数学の範囲をはるかに超えるので求めません.）

例えば $n = 15$ のとき, 1〜15 の数を

$$\{1,11,13\},\quad \{2,10\},\quad \{3,9\},\quad \{4,8\},\quad \{5,15\},\quad \{6,12\},\quad \{7,14\}$$

と組に分けると, A がどの組の数を選んでも, B は同じ組の別の数を選べる．なお, $\{1,11,13\}$ については, まず 1 が選ばれる．B が 11 と 13 のどちらかを選べば, もう片方は宣言されることはない（つまり, 11 と 13 はこのゲームにおいては実質的に 1 つの数である）．したがって, B が選ぶ数はつねに残っているから B が必勝である．

上のように, 1 と大きい素数を 1 つの組とし, 残りの数を約数・倍数の関係にある 2 つの数からなる組たちに分けられれば, B が必勝である．

この戦略がとれる, なるべく大きい n を探すと例えば $n = 118$ が見つかる．この場合, 次のように組み分けすればよい．

$\{1,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113\}$ (1 と大きい素数),
$\{2,62\}, \{3,111\}, \{4,52\}, \{5,115\}, \{6,18\}, \{7,91\}, \{8,104\}, \{9,45\}, \{10,100\}$,
$\{11,77\}, \{12,24\}, \{13,65\}, \{14,70\}, \{15,75\}, \{16,112\}, \{17,85\}, \{19,95\}, \{20,60\}$,
$\{21,63\}, \{22,66\}, \{23,69\}, \{25,50\}, \{26,78\}, \{27,81\}, \{28,56\}, \{29,87\}, \{30,90\}$,
$\{31,93\}, \{32,64\}, \{33,99\}, \{34,68\}, \{35,105\}, \{36,72\}, \{37,74\}, \{38,76\}$,
$\{39,117\}, \{40,80\}, \{41,82\}, \{42,84\}, \{43,86\}, \{44,88\}, \{46,92\}, \{47,94\}, \{48,96\}$,
$\{49,98\}, \{51,102\}, \{53,106\}, \{54,108\}, \{55,110\}, \{57,114\}, \{58,116\}, \{59,118\}$

（組み分けを考えるときは, 上の $\{59,118\}$ などのように, ペアが決まりやすいところから考えていく）

したがって, $n = 118$ のときはBが必勝戦略をもっている.（実はこれが最大値である. しかしその証明はだいぶ難しい.）

（補足）(4) を解く上で, A の戦略についても考えた方がよい.

ゲームの推移を, 選んだ数と矢印で表す. 例えばAが a_1, Bが b_1, Aが a_2 を選んだことを

$$a_1 \ \to\ b_1 \ \to\ a_2$$

と表す.

(1) の「大きい素数」を使った戦略と同様に, 次のことがいえる.

$\dfrac{n}{4} < p \leqq \dfrac{n}{3}$ をみたす素数を「ゴルディロックス素数」とよぶことにする（これはここだけの用語）. ゴルディロックス素数が3つ, 大きい素数が1つあるとき, A は次の戦略で勝てる.

(i) p, q, r をゴルディロックス素数とし, s を大きい素数とする（これらはすべて相異なることに注意）. A は最初に $2p$ を選ぶ.

(ii) s は1の直後にしか選べないので, ゲームのどこかでBが1を選べば, A は s を選んで勝てる. したがって, B は他に選択肢がある限り1を選ばないとしてよい.

(iii) このとき, ゲームは（Aが適切に手を打てば）次のように推移する.

$$2p \to 2 \to 2q \to q \to 3q \to 3 \to 3r \to r \to 2r \to 1 \quad \text{または}$$
$$2p \to p \to 3p \to 3 \to 3q \to q \to 2q \to 2 \to 2r \to r \to 3r \to 1$$

（B の選択肢は, 最初に2か p を選ぶところ以外, つねに1つしかない）

したがって, B は最終的に1を選ぶことになり, A は s を選んで勝てる.

例えば $n = 1000$ のとき, $251, 257, 263$ はゴルディロックス素数, 503 は大きい素数である. したがってこのときはAが必勝戦略をもつ.

（注）「A は最初に偶数を選ばなければならない」というルールがない場合

一般に「$n \geqq 3$ のとき, $n/2$ と n の間には素数が存在する」（つまり「大きい素数」がある）ことが知られている.（ベルトランの仮説, あるいはチェビシェフの定理）. また, この種の結果で「$n \geqq 11$ のとき, $n/2$ と n の間には 2 つ以上の素数が存在する」というものがある.

そのような素数は n に関する大きい素数だから, $n \geqq 11$ のときつねに A が必勝戦略をもつ.

「A は最初に偶数を選ばなければならない」というルールを付け加えた場合

$n \geqq 177$ のとき, ゴルディロックス素数は 3 つ以上存在することが証明できる. したがって, 上の補足で述べたことから, $n \geqq 177$ のときつねに A が必勝戦略をもつ.

$119 \leqq n \leqq 176$ の範囲ではゴルディロックス素数が 2 つ以下のときもあるが, その場合も個別に A が必勝戦略をもつことを示せる.

例えば $n = 119$ のとき, ゴルディロックス素数は 31 しかないが, この場合 A は最初に 62 を選べばよい. こうするとゲームは次のように推移する.

$$62 \to 31 \to 93 \to 3 \quad \text{または}$$
$$62 \to 2 \to 74 \to 37 \to 111 \to 3$$

こうして, B に 3 を選ばせることができる. その後は

$$3 \to 69 \to 23 \to 115 \to 5 \to 85 \to 17 \to 119 \to 7 \to 91 \to 13 \to 65$$

と進み, B は 1 を選ぶしかなくなるので, A は例えば 113（素数）を選んで勝てる.