「2019 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{1}$ A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とする。数学の苦手な人は

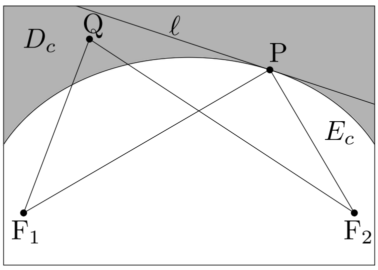
$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \qquad (※)$$

のような式変形をすることがある。もちろん，一般にはこれは正しくない。
例えば，$A=B=1$ とすれば，$\dfrac{1}{A+B} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} = 2$ である。
しかしながら，このような式変形は常に誤りなのだろうか。言い換えるなら， A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とするとき， (※) を満たすような数 A, B はまったく存在しないのだろうか。以下では，これについて考えてみよう。

(1) (※) を満たす実数 A, B は存在しないことを証明せよ。

(2) (※) を満たす複素数 A, B は存在するだろうか。存在するなら，それらをすべて求めよ。また，存在しないなら，それを証明せよ。

$\boxed{2}$ 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{F_1}, \mathrm{F_2}$ をとる。この 2 点間の距離 $\mathrm{F_1F_2}$ より大きい定数 c に対し， $\mathrm{F_1P} + \mathrm{F_2P} = c$ を満たす点 P の軌跡を E_c で表す。また，$\mathrm{F_1Q} + \mathrm{F_2Q} > c$ を満たす点 Q 全体が作る領域を D_c で表す。
E_c 上の任意の点 P に対し，点 P を通る直線で，点 P 以外の部分は 領域 D_c に含まれる直線がただ 1 つ存在する。この直線を点 P における E_c の接線という。また， 直線 ℓ が E_c 上のある点における接線となるとき E_c は ℓ を接線にもつという。
このとき，次の各問に答えよ。



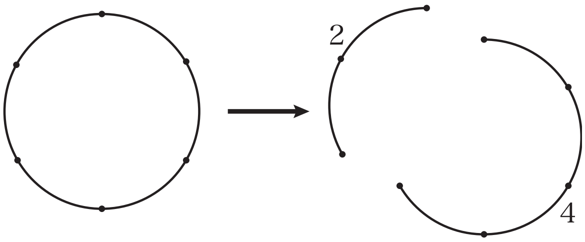
(1) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。 ℓ と直線 $\mathrm{F_1P}$ のなす角を θ_1 とし， ℓ と直線 $\mathrm{F_2P}$ のなす角を θ_2 とすると， $\theta_1 = \theta_2$ が成り立つことを証明せよ。ただし， 2 直線のなす角は $0°$ 以上 $90°$ 以下で考えるものとする。

(2) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。いま，点 P を通り ℓ とのなす角が等しい 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を考える。 ℓ_1, ℓ_2 がどちらも線分 $\mathrm{F_1F_2}$ と共有点をもたないならば,

　　ある定数 c' をとって，$E_{c'}$ は ℓ_1, ℓ_2 を共に接線にもつようにできる

ことを証明せよ。

$\boxed{3}$ ある1つの円を n 等分する点をとり，その等分点で円を r 個の弧に切り分けたとき，弧の長さの組数を $f(n,r)$ と表すことにする。
例えば，$n=6, r=2$，すなわち，円を6等分する点をとり，その等分点で円を2つの弧に切り分けたときは，円周の長さを仮に6と考えて，切り分けたときの弧の長さだけに着目すると，弧の長さの組は $(1,5),(2,4),(3,3)$ の3組できる。従って，このとき $f(6,2)=3$ である。



次に，$r=3$ のときについて考えよう。
例えば，$n=12$ として $f(12,3)$ を考えるとき，円周の長さを仮に12として，長さ1の弧を含むかどうかで場合分けしてみる。長さ1の弧を含む場合は，3つの弧のうちの1つの弧の長さを1に固定して，残り11の長さを2つの弧に分配すると考えることができる。長さ1の弧を含まない場合は，すべての弧の長さから1ずつ引き，残り9の長さを3つの弧に分配すると考えることができる。$f(12,3)$ がこのように場合分けされることを考えれば，ある関係が成り立つことに気づくはずだ。
下線部のことを参考にしながら，次の各問に答えよ。必要ならば次のことを用いても良い：

> a, d, n を自然数とする。a から始めて，d を次々に加えて n 個の自然数を作るとき，これら n 個の自然数の和は，n 番目に作られる数を ℓ とすると $\dfrac{n(a+\ell)}{2}$ である。
> (例) $a=1, d=3, n=5$ の場合，$1, 4, 7, 10, 13$ の和は次のようになる：
> $$1+4+7+10+13=\frac{5(1+13)}{2}=35$$

(1) $f(12,3)$ を求めよ。
(2) $f(219,3)$ を求めよ。
(3) 必要ならば n について場合分けを行って，$f(n,3)$ を n の式で表せ。また，可能ならば場合分けせずに $f(n,3)$ を n の1つの式で表せ。

$\boxed{4}$ 2023桁の自然数 $N_k\ (k=0,1,2,\cdots,9)$ は10進数表記で次のように表される：

$$N_k = 20\underbrace{kk\cdots k}_{2019\text{個}}19$$

N_k のうち，19の倍数であるものを求めよ。

$\boxed{5}$ 記号 ◯，× を一列に n 個並べて記号の列を作る。このとき，以下の条件を満たす n は存在するか。存在する場合は最小の n を求め，存在しない場合はそれを証明せよ。

条件：どのように記号列を作っても等間隔に並ぶ3つの同じ記号が存在する

(例えば $n=5$ の場合は「◯◯◯××」や「×◯×◯×」では等間隔に並ぶ3つの同じ記号が存在するが，「◯◯×◯×」では等間隔に並ぶ3つの同じ記号は存在しない。従って $n=5$ は上の条件を満たしていない。)

問題

$\boxed{1}$ A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とする。数学の苦手な人は

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \tag{※}$$

のような式変形をすることがある。もちろん，一般にはこれは正しくない。例えば，$A=B=1$ とすれば，$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{2}$，$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 2$ である。しかしながら，このような式変形は常に誤りなのだろうか。言い換えるなら，A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とするとき，(※) を満たす数 A, B はまったく存在しないのだろうか。以下では，これについて考えてみよう。

(1) (※) を満たす実数 A, B は存在しないことを証明せよ。

(2) (※) を満たす複素数 A, B は存在するだろうか。存在するなら，それらをすべて求めよ。また，存在しないなら，それを証明せよ。

$\boxed{1}$ の解答

A, B は複素数とする。A, B が (※) を満たせば，(※) の両辺に $AB(A+B)$ をかけることで，$AB = B(A+B) + A(A+B)$ が成り立つ。これを整理することで，

$$AB = (A+B)^2 \tag{*}$$

が成り立つ。これを用いて，(1), (2) を考える。

(1) $A+B \neq 0$ なので $AB = (A+B)^2 > 0$ 成り立つ。また，$A, B \neq 0$ なので，$A^2, B^2 > 0$ である。ところで，(※) が成り立てば，

$$AB = (A+B)^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 + AB + B^2 = 0$$

であるが，上で述べたことにより，$A^2 + AB + B^2 > 0$ となり，これは成り立たない。

(2) (※) を満たす A, B が存在したとする。$A \neq 0$ なので，$t = \frac{B}{A}$ とおく。すると，$B = tA$ であり，(*) より

$$\begin{aligned} AtA &= (A+tA)^2 \\ tA^2 &= (1+t)^2 A^2 \\ t &= (1+t)^2 \qquad (A \neq 0) \end{aligned}$$

である。すなわち，t は二次方程式 $t^2 + t + 1 = 0$ を満たす。この方程式を解くと，

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

である。ここで，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと，$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ である。0 でない任意の複素数 A に対して，$B=\omega A$ または $B=\omega^2 A$ とおくと，$B, A+B\neq 0$ である。このとき A,B が (※) を満たすことを示そう。$B=\omega A$ のとき，

$$\frac{1}{A+B}=\frac{1}{(1+\omega)A}=-\frac{1}{\omega^2 A}$$
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{\omega+1}{\omega A}=\frac{-\omega^2}{\omega A}=-\frac{\omega^3}{\omega^2 A}=-\frac{1}{\omega^2 A}$$

である。また，$B=\omega^2 A$ のとき，

$$\frac{1}{A+B}=\frac{1}{(1+\omega^2)A}=-\frac{1}{\omega A}$$
$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}=\frac{\omega^2+1}{\omega^2 A}=\frac{-\omega}{\omega^2 A}=-\frac{1}{\omega A}$$

である。なお，ここで $\omega^2+\omega+1=0, \omega^3=1$ であることを用いた。以上により，(※) を満たす複素数 A,B は存在し，それは $B=\omega A$ または $B=\omega^2 A$ を満たす任意の複素数 (ただし $A\neq 0$) である。

■注意 1　$t=\frac{B}{A}$ とおく理由は以下の通り。$A=B$ のとき，(※) を満たす A,B が存在しないことは容易に分かる。実際，そのような A,B があれば，

$$\frac{1}{2A}=\frac{2}{A} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}=2$$

となり矛盾する。では，A,B がどのくらい異なれば (※) を満たすのか，ということになる。そこで，A,B の差異を差 $A-B$ や比 $\frac{B}{A}$ で表現することが考えられる。このとき，仮定 $A,B\neq 0$ をうまく使っているのは後者であろう。

■注意 2　形式的には，二次方程式の解の公式を $A^2+AB+B^2=0$ に適用しても解ける。つまり，

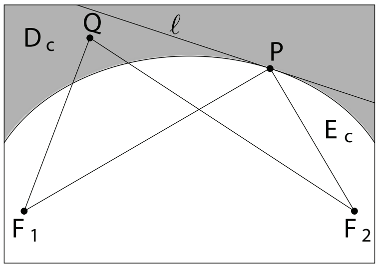
$$A=\frac{-B\pm\sqrt{-3B^2}}{2}=\frac{-B\pm\sqrt{3}iB}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}B$$

ということである。しかし，この方法だと $\sqrt{-3B^2}$ が $\sqrt{(\text{虚数})}$ となる可能性がある。これの意味を考えなくてはいけない。さらに，上の式変形では $\sqrt{-3B^2}=\sqrt{-3}\sqrt{B^2}$ も用いている。これが成り立つのかも問題である (例えば，$\sqrt{-1}\sqrt{-3}=-\sqrt{3}$, $\sqrt{(-1)(-3)}=\sqrt{3}$ のようなことがあるかもしれない)。長くなるので詳細は省くが，こういったことは結局は，方程式 $z^2=-3B^2$ の解が $z=\pm\sqrt{3}iB$ であることを示すことによって正当化できる。

$\boxed{2}$ 平面上の異なる２点 F_1, F_2 をとる。この２点間の距離 F_1F_2 より大きい定数 c に対し， $F_1P + F_2P = c$ を満たす点 P の軌跡を E_c で表す。また，$F_1Q + F_2Q > c$ を満たす点 Q 全体が作る領域を D_c で表す。

E_c 上の任意の点 P に対し，点 P を通る直線で，点 P 以外の部分は 領域 D_c に含まれる直線がただ１つ存在する。この直線を点 P における E_c の接線という。また， 直線 ℓ が E_c 上のある点における接線となるとき E_c は ℓ を接線にもつという。

このとき，次の各問に答えよ。



(1) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。 ℓ と直線 F_1P のなす角を θ_1 とし， ℓ と直線 F_2P のなす角を θ_2 とすると， $\theta_1 = \theta_2$ が成り立つことを証明せよ。ただし，２直線のなす角は 0° 以上 90° 以下で考えるものとする。

(2) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。いま，点 P を通り ℓ とのなす角が等しい２直線 ℓ_1, ℓ_2 を考える。 ℓ_1, ℓ_2 がどちらも線分 F_1F_2 と共有点をもたないならば，

　ある定数 c' が存在して，$E_{c'}$ は ℓ_1, ℓ_2 を共に接線にもつ

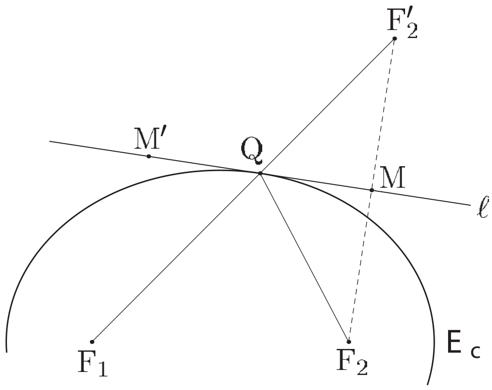
ことを証明せよ。

(証明)

(1)

(i) 点 P が直線 $\mathrm{F_1F_2}$ 上にあるとき
直線 $\mathrm{F_1P}$ と直線 $\mathrm{F_2P}$ は一致するので，接線 ℓ とのなす角は等しい。

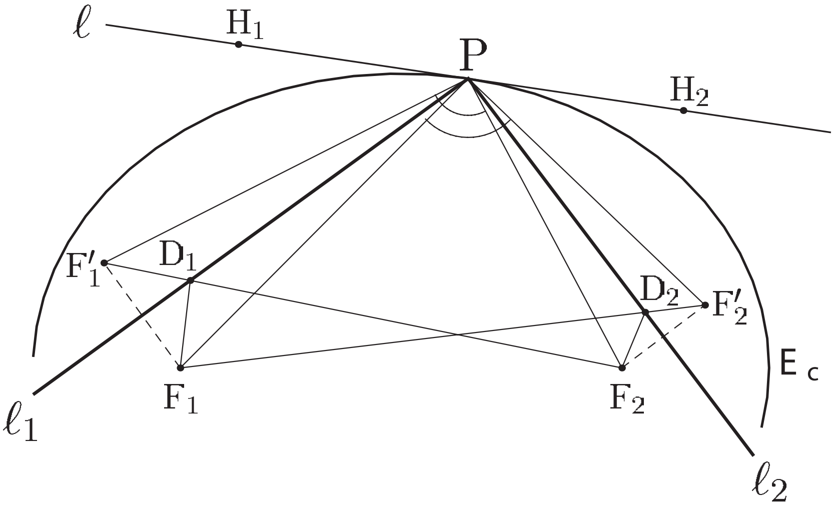
(ii) 点 P が直線 $\mathrm{F_1F_2}$ 上にないとき
点 $\mathrm{F_2}$ について，接線 ℓ に関して線対称な点を $\mathrm{F_2'}$ とする。線分 $\mathrm{F_2F_2'}$ と ℓ との交点を M，$\mathrm{F_1F_2'}$ と ℓ との交点を Q，点 M について，点 Q に関して点対称な点を $\mathrm{M'}$ とする。$\mathrm{M'}$ は直線 ℓ 上の点である。
点 Q は ℓ 上にあるので，$\triangle\mathrm{QMF_2} \equiv \triangle\mathrm{QMF_2'}$ より $\mathrm{QF_2'} = \mathrm{QF_2}$ である。また点 P も ℓ 上にあるので，$\mathrm{PF_2'} = \mathrm{PF_2}$ である。このとき点 Q は点 P と一致することを示す。



もし点 Q と点 P が異なるとすると，ℓ は点 P の接線だから，点 Q は領域 $\mathrm{D_C}$ に含まれるので $\mathrm{F_1Q+QF_2} > c \cdots$① が成り立つ。Q の定義から $\mathrm{F_1Q+QF_2} = \mathrm{F_1F_2} \cdots$② であり，点 P は $\mathrm{E_C}$ 上の点だから $\mathrm{F_1P+PF_2} = c$ であり，$\mathrm{PF_2} = \mathrm{PF_2'}$ より $c = \mathrm{F_1P+PF_2'} \geqq \mathrm{F_1F_2} \cdots$③ が成り立つ。①②③より $\mathrm{F_1F_2} = \mathrm{F_1Q+QF_2} > c \geqq \mathrm{F_1F_2}$ すなわち $\mathrm{F_1F_2} > \mathrm{F_1F_2}$ となり矛盾する。よって点 Q は点 P と一致する。

対頂角が等しいので $\theta_1 = \angle\mathrm{M'PF_1} = \angle\,\mathrm{MPF_2'} = \angle\mathrm{F_2PM} = \theta_2$ (証明終)

(2) 点 F_1 について，直線 ℓ_1 に関して線対称な点を F'_1 とする。また，点 F_2 について，直線 ℓ_2 に関して線対称な点を F'_2 とする。線分 F'_1F_2 と直線 ℓ_1 との交点を D_1，線分 $F_1F'_2$ と直線 ℓ_2 との交点を D_2 とする。 D_1 から接線 ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H_1, D_2 から接線 ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H_2 とする。



条件より $\angle H_1PD_1 = \angle\ D_2PH_2\ \cdots①$
(1) の結果より $\angle H_1PF_1 = \angle\ F_2PH_2\ \cdots②$　よって
$\angle D_1PF_1 = \angle H_1PF_1 - \angle H_1PD_1 = \angle F_2PH_2 - \angle D_2PH_2 = \angle F_2PD_2$
$\angle D_1PF_1 = \angle F'_1PD_1$, $\angle F_2PD_2 = \angle\ D_2PF'_2$　だから

$$\begin{aligned}\angle F'_1PF_2 &= \angle F'_1PF_1 + \angle F_1PF_2 = 2\angle D_1PF_1 + \angle F_1PF_2 = 2\angle F_2PD_2 + \angle F_1PF_2\\ &= \angle F_2PF'_2 + \angle F_1PF_2 = \angle F_1PF'_2\end{aligned}$$

が成り立つ。この結果 $\angle F'_1PF_2 = \angle F_1PF'_2$ と $F'_1P=F_1P$, $F_2P=F'_2P$ から $\triangle F'_1PF_2 \equiv \triangle F_1PF'_2$ が示される。

そこで $F'_1F_2 = F_1F'_2 = c'$ とおくと

$$F_1D_1+D_1F_2 = F'_1D_1+D_1F_2 = F'_1F_2 = c'$$

$$F_1D_2+D_2F_2 = F_1D_2+D_2F'_2 = F_1F'_2 = c'$$

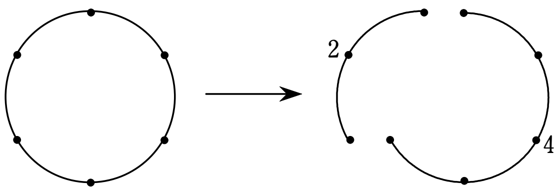
が成り立つ。よって，点 D_1,D_2 が $E_{c'}$ 上の点であり，直線 ℓ_1 が $E_{c'}$ 上の点 D_1 のおける接線であり，ℓ_2 が $E_{c'}$ 上の点 D_2 における接線になっていることがわかる。(証明終)

2019年度高知県高等学校数学コンクール　問題3　解説

$\boxed{3}$

ある１つの円を n 等分する点をとり，その等分点で円を r 個の弧に切り分けたとき，弧の長さの組数を $f(n, r)$ と表すことにする。

例えば，$n=6$, $r=2$，すなわち，円を 6 等分する点をとり，その等分点で円を 2 つの弧に切り分けたときは，円周の長さを仮に 6 と考えて，切り分けたときの弧の長さだけに着目すると，弧の長さの組は $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$ の 3 組できる。従って，このとき $f(6, 2)=3$ である。



次に，$r=3$ のときについて考えよう。例えば，$n=12$ として $f(12, 3)$ を考えるとき，円周の長さを仮に 12 として，長さ 1 の弧を含むかどうかで場合分けしてみる。長さ 1 の弧を含む場合は，3 つの弧のうちの 1 つの弧の長さを 1 に固定して，残り 11 の長さを 2 つの弧に分配すると考えることができる。長さ 1 の弧を含まない場合は，すべての弧の長さから 1 ずつ引き，残り 9 の長さを 3 つの弧に分配すると考えることができる。$f(12, 3)$ がこのように場合分けされることを考えれば，ある関係が成り立つことに気づくはずだ。

下線部のことを参考にしながら，次の各問に答えよ。必要ならば次のことを用いても良い：

> a, d, n を自然数とする。a から始めて，d を次々に加えて n 個の自然数を作るとき，
>
> これら n 個の自然数の和は，n 番目に作られる数を l とすると $\dfrac{n(a+l)}{2}$ である。
>
> (例)　$a=1$, $d=3$, $n=5$ の場合，1, 4, 7, 10, 13 の和は次のようになる：
>
> $$1+4+7+10+13=\frac{5(1+13)}{2}=35$$

(1)　$f(12, 3)$ を求めよ。(2点)

(2)　$f(219, 3)$ を求めよ。(6点)

(3)　必要ならば n について場合分けを行って，$f(n, 3)$ を n の式で表せ。また，可能ならば場合分けせずに，$f(n, 3)$ を n の 1 つの式で表せ。(12点)

解答

下線部のことから，$f(n, r)$ を，長さ 1 の弧を含むかどうかで場合分けしたとき，

$$f(n, r)=f(n-1, r-1)+f(n-r, r) \quad \cdots\cdots ①$$

の関係が成り立つ。（ただし，この関係を用いなくても解くことができる。）

(1)　この問題は，『$x+y+z=12$, $x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数 x, y, z の組数を求めよ。』ということに等しい。

$3x \leqq x+y+z=12$ より $x \leqq 4$ なので　$x=1, 2, 3, 4$　が考えられる。

$x=1$ のとき，$y+z=11$, $1 \leqq y \leqq z$ を満たす y, z の組数は　5 通り

$x=2$ のとき，$y+z=10$, $2 \leqq y \leqq z$ を満たす y, z の組数は　4 通り

$x=3$ のとき，$y+z=9$, $3 \leqq y \leqq z$ を満たす y, z の組数は　2 通り

$x=4$ のとき，$y+z=8$, $4 \leqq y \leqq z$ を満たす y, z の組数は　1 通り

よって，条件を満たす自然数 x，y，z の組数は　$5+4+2+1=12$ 通り

ゆえに，　$f(12,\ 3)=12$

別解　①を用いれば，　$f(12,\ 3)=f(11,\ 2)+f(9,\ 3)=f(11,\ 2)+f(8,\ 2)+f(6,\ 3)$

$$=f(11,\ 2)+f(8,\ 2)+f(5,\ 2)+f(3,\ 3)=5+4+2+1=12$$

(2)　この問題は，『$x+y+z=219$，$x\leqq y\leqq z$ を満たす自然数 x，y，z の組数を求めよ。』ということに等しい。

$3x\leqq x+y+z=219$ より $x\leqq 73$ なので　$x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 73$　が考えられる。

k は自然数とする。

$x=2k-1$ のとき，　$y+z=220-2k$，$2k-1\leqq y\leqq z$ を満たす y，z の組数は

$$(110-k)-(2k-1)+1=112-3k\ (\text{通り})$$

$x=2k$ のとき，　$y+z=219-2k$，$2k\leqq y\leqq z$ を満たす y，z の組数は

$$(109-k)-2k+1=110-3k\ (\text{通り})$$

よって，x が奇数 ($x=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 73$) のときの組数は

$$109+106+103+\cdots\cdots+4+1=\frac{37(109+1)}{2}=2035\ (\text{通り})$$

x が偶数 ($x=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 72$) のときの組数は

$$107+104+101+\cdots\cdots+5+2=\frac{36(107+2)}{2}=1962\ (\text{通り})$$

ゆえに，$f(219,\ 3)=2035+1962=3997$

別解　m は 0 以上の整数とする。

$$n=2m \text{ のとき，}\quad f(n,\ 2)=m=\frac{n}{2}$$

$$n=2m+1 \text{ のとき，}\quad f(n,\ 2)=m=\frac{n-1}{2}$$

$f(0,\ 3)=f(1,\ 3)=f(2,\ 3)=0$ であるから，①の関係より

$f(3,\ 3)=f(2,\ 2)$，　$f(6,\ 3)=f(5,\ 2)+f(2,\ 2)$，　$f(9,\ 3)=f(8,\ 2)+f(5,\ 2)+f(2,\ 2)$

$f(4,\ 3)=f(3,\ 2)$，　$f(7,\ 3)=f(6,\ 2)+f(3,\ 2)$，　$f(10,\ 3)=f(9,\ 2)+f(6,\ 2)+f(3,\ 2)$

$f(5,\ 3)=f(4,\ 2)$，　$f(8,\ 3)=f(7,\ 2)+f(4,\ 2)$，　$f(11,\ 3)=f(10,\ 2)+f(7,\ 2)+f(4,\ 2)$

と，　$f(n,\ 3)$ は，　$f(n,\ 2)$ の累計で表される。

$$\begin{aligned}
f(219,\ 3)&=\{f(2,\ 2)+f(8,\ 2)+f(14,\ 2)+\cdots\cdots+f(218,\ 2)\}\\
&\qquad+\{f(5,\ 2)+f(11,\ 2)+f(17,\ 2)+\cdots\cdots+f(215,\ 2)\}\\
&=\left(\frac{2}{2}+\frac{8}{2}+\frac{14}{2}+\cdots\cdots+\frac{218}{2}\right)+\left(\frac{5-1}{2}+\frac{11-1}{2}+\frac{17-1}{2}+\cdots\cdots+\frac{215-1}{2}\right)\\
&=(1+4+7+\cdots\cdots+109)+(2+5+8+\cdots\cdots+107)\\
&=\frac{37(1+109)}{2}+\frac{36(2+107)}{2}=2035+1962=3997
\end{aligned}$$

(3)　この問題は，『$x+y+z=n$，$x \leqq y \leqq z$ を満たす自然数 x，y，z の組数を求めよ。』ということに等しい。

m は 0 以上の整数，k は自然数とする。

$n=6m$ のとき

$x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 2m$　が考えられる。

$x=2k-1$ のとき，$y+z=6m-2k+1$，$2k-1 \leqq y \leqq z$ を満たす y，z の組数は

$(3m-k)-(2k-1)+1=3m-3k+2$ (通り)

$x=2k$ のとき，$y+z=6m-2k$，$2k \leqq y \leqq z$ を満たす y，z の組数は

$(3m-k)-2k+1=3m-3k+1$ (通り)

よって，x が奇数 ($x=1,\ 3,\ 5,\ \cdots\cdots,\ 2m-1$) のときの組数は

$$(3m-1)+(3m-4)+\cdots\cdots+5+2=\frac{m\{(3m-1)+2\}}{2}=\frac{m(3m+1)}{2}\ (\text{通り})$$

x が偶数 ($x=2,\ 4,\ 6,\ \cdots\cdots,\ 2m$) のときの組数は

$$(3m-2)+(3m-5)+\cdots\cdots+4+1=\frac{m\{(3m-2)+1\}}{2}=\frac{m(3m-1)}{2}\ (\text{通り})$$

ゆえに，$f(n,\ 3)=3m^2=3\left(\dfrac{n}{6}\right)^2=\dfrac{n^2}{12}$　$\left(=\dfrac{n^2+3}{12}-\dfrac{1}{4}\right)$

以下，同様に場合分けを進めていけば，次のような結果が得られる。

$n=6m$ のとき，　$f(n,\ 3)=\dfrac{n^2}{12}$　$\left(=\dfrac{n^2+3}{12}-\dfrac{1}{4}\right)$

$n=6m\pm1$ のとき，$f(n,\ 3)=\dfrac{n^2-1}{12}$　$\left(=\dfrac{n^2+3}{12}-\dfrac{1}{3}\right)$

$n=6m\pm2$ のとき，$f(n,\ 3)=\dfrac{n^2-4}{12}$　$\left(=\dfrac{n^2+3}{12}-\dfrac{7}{12}\right)$

$n=6m\pm3$ のとき，$f(n,\ 3)=\dfrac{n^2+3}{12}$

以上のことから，$f(n,\ 3)$ は，$\dfrac{n^2+3}{12}$ を超えない最大の自然数である。

ガウス記号を用いれば，$f(n,\ 3)=\left[\dfrac{n^2+3}{12}\right]$ となる。

$\boxed{\text{別解}}$　$n=6m$ のとき

$$\begin{aligned}f(n,\ 3)&=\{f(2,\ 2)+f(8,\ 2)+\cdots\cdots+f(6m-4,\ 2)\}+\{f(5,\ 2)+f(11,\ 2)+\cdots\cdots+f(6m-1,\ 2)\}\\&=\left(\frac{2}{2}+\frac{8}{2}+\cdots\cdots+\frac{6m-4}{2}\right)+\left(\frac{5-1}{2}+\frac{11-1}{2}+\cdots\cdots+\frac{(6m-1)-1}{2}\right)\\&=\{1+4+\cdots\cdots+(3m-2)\}+\{2+5+\cdots\cdots+(3m-1)\}\\&=\frac{m\{1+(3m-2)\}}{2}+\frac{m\{2+(3m-1)\}}{2}=3m^2=3\left(\frac{n}{6}\right)^2=\frac{n^2}{12}\quad\left(=\frac{n^2+3}{12}-\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

以下，同様にして，$f(n,\ 3)$ を $f(n,\ 2)$ の累計で求めることができる。

$\boxed{4}$ 2023 桁の自然数 $N_k\,(k=0,1,2,\cdots,9)$ は 10 進数表記で次のように表される.

$$N_k=20\underbrace{kk\cdots k}_{2019個}19$$

N_k のうち，19 の倍数であるものを求めよ.

【解答】

フェルマーの小定理より，

$$10^{18}\equiv 1\pmod{19}$$

であるから，

$$10^{18}-1=\underbrace{9\cdots 9}_{18個}\equiv 0\pmod{19}$$

である．9 と 19 は互いに素であるから，$\underbrace{1\cdots 1}_{18個}$ は 19 の倍数である.

$$\begin{aligned}N_k&=20kkk\underbrace{0\cdots 0}_{2018個}+k\times\underbrace{1\cdots 1}_{2016個}\times 100+19\\&=1kkk\underbrace{0\cdots 0}_{2018個}+19\times 10^{2021}+k\times\underbrace{1\cdots 1}_{2016個}\times 100+19\\&=1kkk\underbrace{0\cdots 0}_{2018個}+19\times\boxed{整数}\end{aligned}$$

ここで，10^{2018} と 19 は互いに素であるから，

N_k が 19 の倍数 $\Longleftrightarrow$ $1kkk$（$=M_k$とおく）が 19 の倍数

が成り立つ．$1000\equiv 12\pmod{19}$，$111\equiv 16\pmod{19}$ であるから，

$$\begin{aligned}M_k&=1000+k\times 111\\&\equiv 12-3k\pmod{19}\end{aligned}$$

$M_k\equiv 0$ のとき，3 と 19 は互いに素であるから，$M_k\equiv 0$ のとき，

$$k\equiv 4\pmod{19}$$

したがって，N_4 のみが 19 の倍数になる.

【フェルマーの小定理】
　p が素数，a が p の倍数でない整数とする．このとき，
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
が成り立つ．

【補題１】
　p を素数とする．${}_p\mathrm{C}_k$（$k=1, 2, 3, \cdots, p-1$）はすべて p の倍数である．

[証明]
$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p\times(p-1)\times\cdots\times(p-k+1)}{k\times(k-1)\times\cdots\times 1}$$
であり，$k<p$ より，分母は p の倍数ではないから，
$${}_p\mathrm{C}_k = p\times(\text{整数})$$
となり，${}_p\mathrm{C}_k$（$k=1, 2, 3, \cdots, p-1$）はすべて p の倍数である．

【補題２】
　a は整数，p は素数とする．
$$(a+1)^p \equiv a^p+1 \pmod{p}$$

[証明]
　二項定理より，
$$(a+1)^p = a^p + {}_p\mathrm{C}_1 a^{p-1} + {}_p\mathrm{C}_2 a^{p-2} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} a^1 + 1$$
であり，【補題１】より，
$$(a+1)^p \equiv a^p+1 \pmod{p}$$
が成り立つ．

[フェルマーの小定理の証明]
　自然数 n に対する数学的帰納法を用いて，
$$n^p \equiv n \pmod{p}$$
を示す．
　$n=1$ のときは，確かに成り立つ．
　$n^p \equiv n \pmod{p}$ であるとき，【補題２】より，
$$(n+1)^p \equiv n^p+1 \pmod{p}$$
であり，帰納法の仮定より，$n^p \equiv n \pmod{p}$ であるから，
$$(n+1)^p \equiv n+1 \pmod{p}$$
となる．
　したがって，数学的帰納法により，$n^p \equiv n \pmod{p}$ が示せた．
　これより，
$$a^p \equiv a \pmod{p}$$
である．いま，a は素数 p の倍数でないから，a と p は互いに素である．したがって，
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$
が成り立つ．

$\boxed{5}$ 記号 ○, × を 一列に n 個並べて記号の列を作る。このとき, 以下の条件を満たす n は存在するか。存在する場合は最小の n を求め, 存在しない場合はそれを証明せよ。

条件 : どのように記号列を作っても等間隔に並ぶ 3 つの同じ記号が存在する

(例えば $n=5$ の場合は「○○○××」や「×○×○×」では等間隔に並ぶ 3 つの同じ記号が存在するが,「○○×○×」では等間隔に並ぶ 3 つの同じ記号は存在しない。従って $n=5$ は上の条件を満たしていない。)

$\boxed{\text{解答}}$

条件を満たす n は存在し, 最小の n が 9 であることを示す。
以下の (1), (2) をを示せば OK である。

(1) 8 以下の n は条件を満たさない。
(2) $n=9$ は条件を満たす。

(1) の証明 :

$n=8$ の場合, 以下の記号列は条件を満たさない。なぜなら, ……

○	○	×	×	○	○	×	×

これより, 8 以下の n は条件を満たさない。なぜなら, ……

(2) の証明に入る前にいくつか準備・確認をしておく。

$\boxed{0}$ 〈 良い並べ方と悪い並べ方 〉

記号の並べ方のうち, 等間隔に並ぶ 3 つの同じ記号が存在する並べ方を<u>良い並べ方</u>, 等間隔に並ぶ 3 つの同じ記号が存在しない並べ方を<u>悪い並べ方</u>ということにする。

$\boxed{1}$ 〈 記号の対称性 〉

並べ方 A に対し, ○ と × の記号をすべて入れ替えた並べ方を A′ で表すことにする。このとき, A が良い並べ方か悪い並べ方かは A′ のそれと一致する。

				A											A'			
○	○	×	○	×	×	○	×	○	⇔	×	×	○	×	○	○	×	○	×

2 〈 並べ方の対称性 〉

下図のように線対称な並べ方 A, B は, 並び方が良いか悪いかを考える際には互いに並びを逆向きにみたものであることから実質同じ並び方といえる。

A

○	○	×	○	×	×	○	×	○

←線対称→

B

○	×	○	×	×	○	×	○	○

3 〈 3×3 のマス目による表現 〉

$n=9$ の場合, 下左図の ① から ⑨ への横並びの記号列を下右図の 3×3 のマス目への ① から ⑨ への記号配列で表すことにする。

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨

→

⇒

↓ ↓ ↓

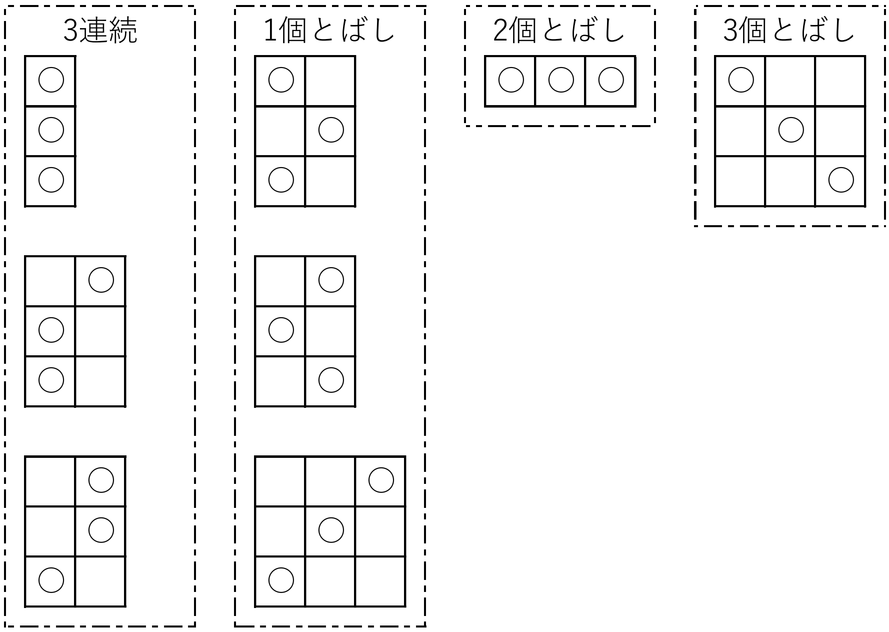
①	④	⑦
②	⑤	⑧
③	⑥	⑨

○	○	×	○	×	×	○	×	○

⇒

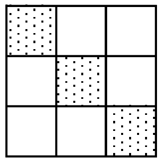
○	○	○
○	×	×
×	×	○

この 3×3 のマス目による表現では良い並べ方は以下の配列を含むものとなる。



(２) の証明：

$n=9$ が条件をみたすこと, すなわち 3×3 のマス目へのどのような記号配列も良い並べ方であることを配列を分類して調べていくことにする。



3×3 のマス目への記号配列を左上から右下への対角線の配列(右図打点部)で以下の (ア), (イ) に分類する。

(ア) すべて同じ記号の場合

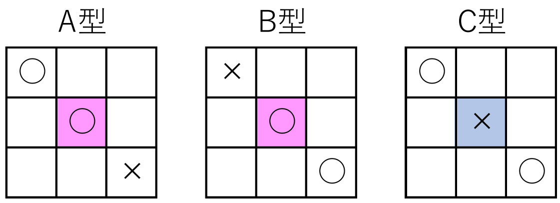
この場合は良い並べ方である。

(イ) ○, × 両方の記号がある場合

この場合は 2 個の記号と 1 個の記号に分かれることになる。

このとき, $\boxed{1}$〈 記号の対称性 〉より ○ が 2 個, × が 1 個の配列を調べれば十分である。

さらに, 中心が ○ か × かで分類すれば, 中心が ○ の A 型と B 型, 中心が × の C 型の配列を調べれば良いことになる(下図)。



ここで, A 型, B 型は $\boxed{2}$〈 並べ方の対称性 〉より実質同じ配列であること, さらに, C 型で悪い並べ方の可能性があるのは C−1 型か C−2 型の配列であるが, これも $\boxed{2}$〈 並べ方の対称性 〉より実質同じ配列であることから, 結局 A 型と C−1 型のみ調べればよいことがわかる。そこで, 以下実際に調べてみると(下図)……。