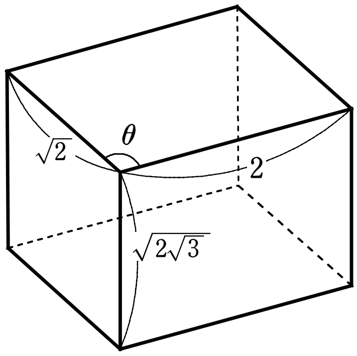
「平成 30 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{\mathbf{1}}$ ある立方体をある平面に正射影した図を考えると下図のようになった。
角 θ を求めよ。



$\boxed{\mathbf{2}}$ a は自然数とする。分母が a である既約分数全体の集合を $I(a)$ とする。
集合

$$I(a) \cap \{x \mid 0 < x < 1\}$$

に含まれる要素の総和を $S(a)$ とする。次の問に答えよ。

(1) $S(25)$, $S(27)$, $S(675)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $S(10!) = S(3628800)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a, b は正の定数，α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす定数とする。次の問に答えよ。

(1) 三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = \alpha, \mathrm{BC} = a$ とする。この三角形の面積が最大となるのは $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ のときであることを証明せよ。

(2) 凸四角形 ABCD において，$\angle\mathrm{BAD} = \alpha, \mathrm{BC} = a, \mathrm{CD} = b$ とする。この四角形の面積が最大となるときの形状を決定せよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数であるものを格子点という。自然数 $n \geqq 3$ に対し, 頂点がすべて格子点であるような正 n 角形を格子正 n 角形とよぶことにする。 次の問に答えよ。

(1) 格子正三角形は存在しないことを示せ。

(2) 格子正五角形は存在しないことを示せ。

$\boxed{5}$ まだ分数の割り算を知らない子供に $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3}$ をどのように考えたら良いと思うかを尋ねたら，子供は次のように答えました。
「ええっと $\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ なので，$\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3} = 1$　余り $\dfrac{1}{6}$ となるんじゃない？」
その子供に次のように返答しました。
「もしも $10 \div 7$ を考えるのならば，10 の中に 7 は 1 つあって，残りの部分は 3 で，3 の中にもう 7 は取れないので $10 \div 7 = 1$　余り 3 という答え方があるね。それとそっくりな考え方だから，そういう考え方もいいと思うけど，$10 \div 7 = 1.42857142857\dots$ のように答えに余りを使わない考え方の割り算もあるよね。そのような割り算をできないかな。」
すると子供はこう答えました。
「$\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ で，この中に $\dfrac{1}{3}$ が何個あるか考えればいいから...

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1 + \left(\frac{1}{6} \div \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) = \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \text{」}$$

この式は，通常期待されている答えの $\dfrac{3}{2}$ とは表記が異なりますが，自然数同士の割り算で商が無限小数になる場合と同様に正しい計算とみなすことができます。子供が最後の式をどのような手法で得たのかは定かではありませんが，最後の式を導く手法がいくつか考えられます。このことに関する次の問題に答えてください。

(1) $\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{10} \times 1 + \dfrac{3}{70}$ に注意すると $\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10} = 1 + \left(\dfrac{3}{70} \div \dfrac{1}{10}\right) = 1 + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}\right)$ とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，子供が考えた割り算のように，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を無限個の和で表記しなさい。

(2) a を実数とするとき, 次の和を求められないか考察しなさい。必要があれば a に適当な条件をつけて構いません。

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} &= 1 + \left(\frac{3}{70} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{3}{7} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{30}{70} \div \frac{7}{70}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{10}\left(\left(\frac{28}{70} + \frac{2}{70}\right) \div \frac{7}{70}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{2}{70} \div \frac{7}{70}\right) = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{20}{70} \div \frac{7}{70}\right)\end{aligned}$$

とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を $a_0 + \dfrac{b_1}{10} + \dfrac{b_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{b_n}{10^n} + \cdots$ の形で表しなさい。

(4) 実数 x と 0 から $n-1$ までのいくつかの整数 a_0, a_1, a_2, a_k , $b_1, b_2, b_3, \dots$ が

$$x = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + + \frac{b_3}{n^3} + \cdots$$

をみたす時に，負でない整数 $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ と小数点と呼ばれる「.」と 負でない整数 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ をこの順番に並べた

$$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots$$

のことを実数 x の n 進表記といいます。例えば $\dfrac{3}{2}$ の 3 進表記は

$$1.11111\cdots$$

であり，$\dfrac{10}{7}$ の 10 進表記は

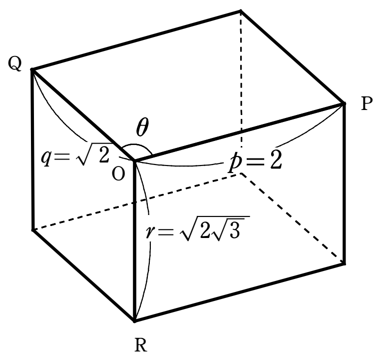
$$1.42857142857\cdots$$

となります。$\dfrac{11}{8}$ を 3 進表記しなさい。

2018. 高知県高等学校数学コンクール　大問 1 解説 ①

1　ある立方体をある平面に正射影した図を考えると下図のようになった。

角 θ を求めよ。



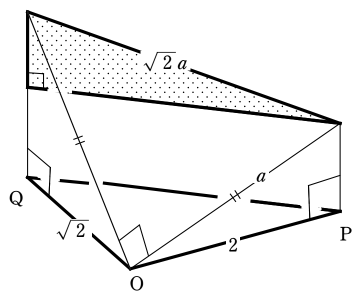
よせられた解答(概略)

1　何らかの方法で立方体の一辺 a を求める。(＊)

2　a が求まれば，右下図打点部の直角三角形に着目することで

$$PQ^2=(\sqrt{2}\,a)^2-\left|\sqrt{a^2-(\sqrt{2})^2}-\sqrt{a^2-2^2}\right|^2$$
$$=6+2\sqrt{(a^2-2)(a^2-4)}$$

により PQ^2 が求まる。



3　PQ^2 が求まれば，△OPQ で余弦定理を用いることで

$$\cos\theta=\frac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2\times OP\times OQ}$$
$$=\frac{-\sqrt{(a^2-2)(a^2-4)}}{2\sqrt{2}}$$

がわかり θ が求まる。

★　★　★　★　★　★　★　★

(＊) 結果的には $a^2=\dfrac{p^2+q^2+r^2}{2}$ とわかり，$a^2=3+\sqrt{3}$ となることから

$$\cos\theta=\frac{-\sqrt{(2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-2)}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}$$
$$=\frac{-2\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

から $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ とわかります。

■ $\cos\theta$ を p, q, r で表すと

$$\cos\theta=\frac{OP^2+OQ^2-PQ^2}{2\times OP\times OQ}$$
$$=\frac{-\sqrt{(a^2-p^2)(a^2-q^2)}}{pq}$$
$$=\frac{-\sqrt{(-p^2+q^2+r^2)(p^2-q^2+r^2)}}{2pq}\left(=\frac{-\sqrt{r^4-(p^2-q^2)^2}}{2pq}\right)$$

となります。■

ひとこと

① 問題文に「… 図のようになった。…」とあることから，$\theta=\angle POQ$, $\angle QOR$, $\angle ROP$ は鈍角であるということは前提としました。

② 多くの人(全員？)が必要性のみで議論をしていました。このようにできる根拠は
　(ⅰ) 問題文から正射影が図のようになる立方体と平面の存在は前提となっていること
　(ⅱ) 必要条件から求まる解がただひとつしかないこと
です。

以下の解答では，正射影が図のようになる立方体と平面の存在も示した上で θ を求めることにします。

解答

設定①

立方体を OA, OB, OC を辺にもつ一辺 a の立方体とする。立方体の平面への正射影は平面の平行移動によって変わらない。そこで，正射影を考える平面(平面 π とする)を O を通る平面として設定し，点 A, B, C がそれぞれ平面 π 上の点 P, Q, R に正射影されて問題の図のようになるとする。P, Q, R が決まれば立方体の正射影が確定することから 3 点 P, Q, R についてのみ考えることにする。

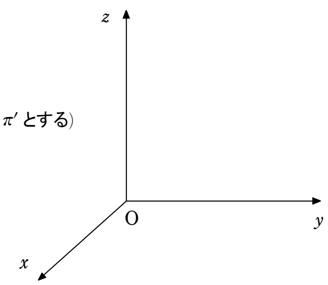
なお，問題の図の設定から

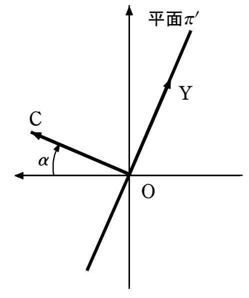
$\angle POQ=\theta$, $\angle QOR$, $\angle ROP$ はすべて鈍角である … ★

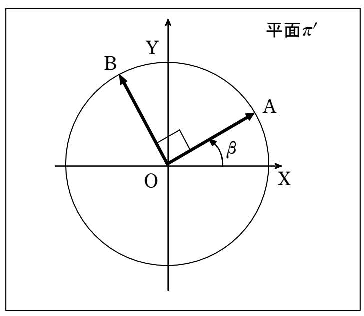
ことは前提とする。

設定②

さらに，平面 π を xy 平面，点 C は xz 平面の $x\geqq 0$ かつ $z\geqq 0$ の領域にあるとして一般性を失わない。このとき，辺 OA, OB を含む平面(平面 π' とする)は，点 O を通り $\overrightarrow{OC}\,(\neq\vec{0})$ を法線ベクトルとする平面であることに注意する。







ここで，点 C を xz 平面上で点 $(a, 0, 0)$ を正の方向に $\alpha\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ 回転した点と考えると

C$(a\cos\alpha, 0, a\sin\alpha)$ とかけ(上左図)

X$(0, a, 0)$

Y$\left(a\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right), 0, a\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\ (=(-a\sin\alpha, 0, a\cos\alpha))$

とすると，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OX}=0$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OY}=0$ より点 X, Y は平面 π' 上の点であり

$|\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{OY}|=a$, $\overrightarrow{OX}\perp\overrightarrow{OY}$ であることから

$$\overrightarrow{OA}=\cos\beta\,\overrightarrow{OX}+\sin\beta\,\overrightarrow{OY}$$
$$\overrightarrow{OB}=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{OX}+\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{OY}$$

とかけて(上右図)

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\cos\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\sin\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$
$$=\cos\beta\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}+\sin\beta\begin{pmatrix}-a\sin\alpha\\0\\a\cos\alpha\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$
$$=-\sin\beta\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}+\cos\beta\begin{pmatrix}-a\sin\alpha\\0\\a\cos\alpha\end{pmatrix}$$

とかけることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}-a\sin\alpha\sin\beta\\a\cos\beta\\0\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}-a\sin\alpha\cos\beta\\-a\sin\beta\\0\end{pmatrix}$$

とかける。

以上のことから与えられた問題は $0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$ の前提のもと

$$☆\begin{cases}a\cos\alpha=\sqrt{2\sqrt{3}} & \cdots ① \\ a^2(\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta)=2^2 & \cdots ② \\ a^2(\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta)=(\sqrt{2})^2 & \cdots ③\end{cases}$$

をみたす a,α,β に対し θ を求めることである。ここで

$$☆\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\cos^2\alpha=2\sqrt{3} & \cdots ①' \\ a^2(1+\sin^2\alpha)=6 & \cdots ②+③ \\ a^2(\cos^2\beta-\sin^2\beta)(1-\sin^2\alpha)=2 & \cdots ②-③\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\cos^2\alpha=2\sqrt{3} \\ a^2(2-\cos^2\alpha)=6 \\ a^2\cos^2\alpha\cos 2\beta=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2\cos^2\alpha=2\sqrt{3} \\ a^2=3+\sqrt{3} \\ \cos 2\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1 \\ a^2=3+\sqrt{3} \\ \cos 2\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

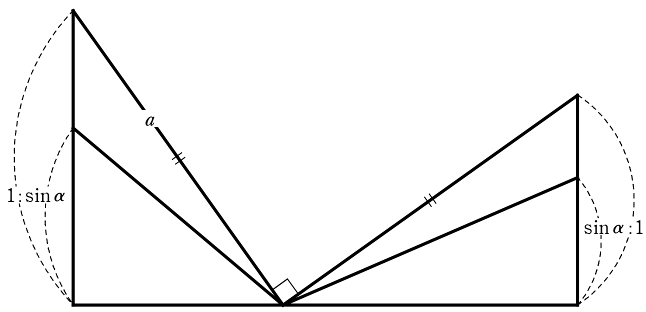
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\sqrt{3+\sqrt{3}} \\ \cos\alpha=\sqrt{\sqrt{3}-1},\ \sin\alpha=\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \cos 2\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \sin 2\beta=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{cases}$$

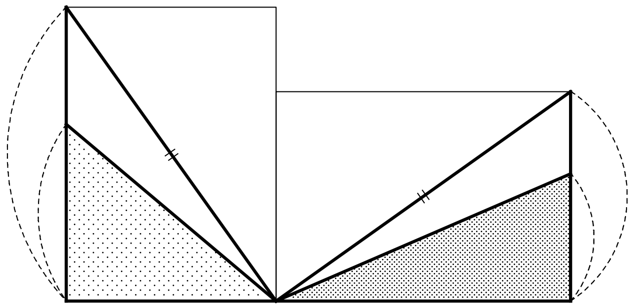
で，このような $a,\alpha,\beta\ (a>0,\ 0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2})$ は確かに存在し，このとき

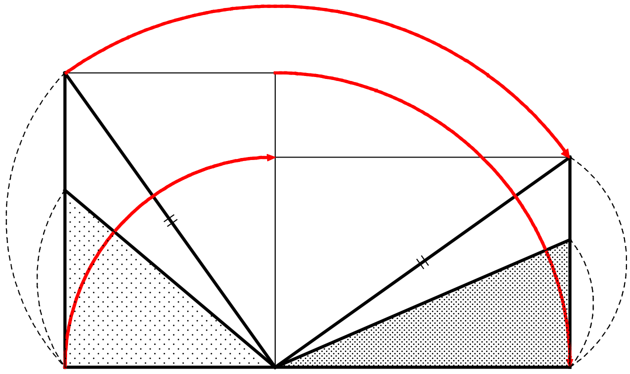
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$
$$=\frac{a^2\sin\beta\cos\beta(\sin^2\alpha-1)}{2\sqrt{2}}$$
$$=\frac{-a^2\cos^2\alpha\times\frac{1}{2}\sin 2\beta}{2\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

から $\theta=\frac{2}{3}\pi$ とわかる。

$\boxed{\text{別解}}$







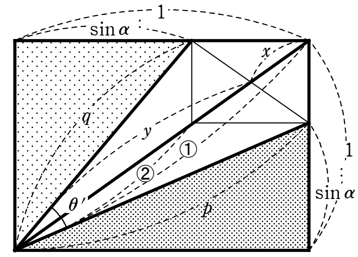


図 1

右の $\boxed{\text{図 1}}$ で

①^2−②$^2=a^2-a^2\sin^2\alpha=a^2\cos^2\alpha=r^2$ であり

①^2−②$^2=(x+y)^2-(y-x)^2=4xy$ でもあることから $r^2=4xy$ が成り立つ。

また，中線定理から $p^2+q^2=2(x^2+y^2)$ が成り立つ。

したがって $\begin{cases}r^2=4xy \\ p^2+q^2=2(x^2+y^2)\end{cases}$ $\cdots$ ☆☆ であり，これを用いて

$\cos\theta'=\dfrac{p^2+q^2-(2x)^2}{2pq}$（余弦定理）の値を求めると

$$p^2+q^2-(2x)^2=2(y^2-x^2)$$
$$=\sqrt{\{2(y^2-x^2)\}^2}$$
$$=\sqrt{\{2(x^2+y^2)\}^2-(4xy)^2}$$
$$=\sqrt{(p^2+q^2)^2-r^4}$$

から $\cos\theta'=\dfrac{\sqrt{(p^2+q^2)^2-r^4}}{2pq}$ とわかる(下記 $\boxed{\text{補足}}$ 参照)。

$p=2,\ q=\sqrt{2},\ r=\sqrt{2\sqrt{3}}$ を代入して計算すると

$\cos\theta'=\dfrac{\sqrt{36-12}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $\theta'=\dfrac{\pi}{6}$ であり，求める $\theta=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{2}{3}\pi$ とわかる。

$\boxed{\text{補足}}$

（1）☆☆ から $\begin{cases}4x^2\cdot 4y^2=r^4 \\ 4x^2+4y^2=2(p^2+q^2)\end{cases}$ であり, $4x^2,\ 4y^2\ (4x^2<4y^2)$ は t についての 2 次方程式 $t^2-2(p^2+q^2)t+r^4=0$ の異なる 2 解です。

したがって，解の公式から $4x^2=(p^2+q^2)-\sqrt{(p^2+q^2)^2-r^4}$ であり

$\cos\theta'=\dfrac{p^2+q^2-(2x)^2}{2pq}=\dfrac{p^2+q^2-4x^2}{2pq}=\dfrac{\sqrt{(p^2+q^2)^2-r^4}}{2pq}$ とわかります。

（2）☆☆ から $(p^2+q^2)+r^2=2(x+y)^2=2a^2$ であり，正方形の一辺の長さが $\sqrt{\dfrac{p^2+q^2+r^2}{2}}$ とわかります。

$\boxed{2}$

a は自然数とする．分母が a である既約分数全体の集合を $I(a)$ とする．集合

$$I(a)\cap\{x|0<x<1\}$$

に含まれる要素の総和を $S(a)$ とする．次の問に答えよ．

(1)　$S(25)$，$S(27)$，$S(675)$ をそれぞれ求めよ．

(2)　$S(10!)=S(3628800)$ を求めよ．

＊＊

【解１】全体から余分なものを引くと…

(1)　$S(25)=\dfrac{1}{25}+\dfrac{2}{25}+\cdots+\dfrac{24}{25}+\dfrac{25}{25}-\left(\dfrac{5}{25}+\dfrac{10}{25}+\dfrac{15}{25}+\dfrac{20}{25}+\dfrac{25}{25}\right)$

$$=\frac{1+2+\cdots+25}{25}-\frac{5(1+2+3+4+5)}{25}=\frac{26}{2}-\frac{6}{2}=10\,.$$

同様に，

$$S(27)=\frac{1+2+\cdots+27}{27}-\frac{3+6+\cdots+27}{27}=9\,.$$

$$S(675)=\frac{1+2+\cdots+675}{675}-\frac{5+10+\cdots+675}{675}-\frac{3+6+\cdots+675}{675}+\frac{15+30+\cdots+675}{675}=180\,.$$

(2)<u>準備</u>

4 個の集合 A,B,C,D に対して，

$$N(A\cup B\cup C\cup D)=N(A\cup B\cup C)+N(D)-N((A\cup B\cup C)\cap D)$$

であり，$(A\cup B\cup C)\cap D=(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)$ であるから，

$$\begin{aligned}&N((A\cup B\cup C)\cap D)\\&=N(A\cap D)+N(B\cap D)+N(C\cap D)\\&\qquad -N((A\cap D)\cap(B\cap D))-N((B\cap D)\cap(C\cap D))-N((C\cap D)\cap(A\cap D))\\&\qquad +N((A\cap D)\cap(B\cap D)\cap(C\cap D))\\&=N(A\cap D)+N(B\cap D)+N(C\cap D)\\&\qquad -\{N(A\cap B\cap D)+N(B\cap C\cap D)+N(C\cap A\cap D)\}\\&\qquad +N(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&N(A\cup B\cup C\cup D)\\&=N(A)+N(B)+N(C)+N(D)\\&\qquad -\{N(A\cap B)+N(B\cap C)+N(A\cap C)+N(A\cap D)+N(B\cap D)+N(C\cap D)\}\\&\qquad +N(A\cap B\cap C)+N(A\cap B\cap D)+N(A\cap C\cap D)+N(B\cap C\cap D)\\&\qquad -N(A\cap B\cap C\cap D)\end{aligned}$$

<u>解答</u>

$N=10!$ とおく．

N 個の分数（既約とは限らない）$\dfrac{1}{N},\dfrac{2}{N},\dfrac{3}{N},\cdots,\dfrac{N}{N}$ のうち，分子が自然数 p の倍数であるものの和を S_p と表すことにする．このとき，

$$S_p=\frac{p}{N}+\frac{2p}{N}+\frac{3p}{N}+\cdots+\frac{N}{N}=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{p}+1\right).$$

よって，<u>準備</u>と同様に考えて，

$$\begin{aligned}S(N)&=\frac{1+2+\cdots+N}{N}-(S_2+S_3+S_5+S_7)+(S_6+S_{10}+S_{14}+S_{15}+S_{21}+S_{35})-(S_{30}+S_{42}+S_{70}+S_{105})+S_{210}\\&=\frac{N+1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{N}{2}+\frac{N}{3}+\frac{N}{5}+\frac{N}{7}+4\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{6}+\frac{N}{10}+\frac{N}{14}+\frac{N}{15}+\frac{N}{21}+\frac{N}{35}+6\right)\\&\qquad -\frac{1}{2}\left(\frac{N}{30}+\frac{N}{42}+\frac{N}{70}+\frac{N}{105}+4\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{N}{210}+1\right)\\&=\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}-\frac{1}{30}-\frac{1}{42}-\frac{1}{70}-\frac{1}{105}+\frac{1}{210}\right)\\&=414720\end{aligned}$$

【解２】工夫して足していくと…

(1) $S(25)=\dfrac{1}{25}+\dfrac{2}{25}+\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}+\dfrac{6}{25}+\dfrac{7}{25}+\cdots+\dfrac{22}{25}+\dfrac{23}{25}+\dfrac{24}{25}$

$=\left(\dfrac{1}{25}+\dfrac{24}{25}\right)+\left(\dfrac{2}{25}+\dfrac{23}{25}\right)+\left(\dfrac{3}{25}+\dfrac{22}{25}\right)+\cdots$

$=1+1+\cdots+1$

$=1\times$(25以下で25と互いに素な自然数の個数)$\div 2=10$

以下，同様.

(2)

<u>準備１</u>

2つの自然数 A, B の最大公約数を (A, B) と表すと，

$$(a, n)=1 \Leftrightarrow (n-a, n)=1$$

<u>証明</u>

$\Rightarrow$) $(n-a, n)=d(>1)$ と仮定すると， $n-a=kd$， $n=ld$ (k, l は自然数)とおける.

この２式より

$$a=n-kd=ld-kd=(l-k)d$$

となり， a は d の倍数となる．よって，$(a, n)\geqq d>1$ となり，$(a, n)=1$ に反する.

したがって，$(n-a, n)=1$ である.

逆についてもこれと同様の流れで証明ができる. □

このことから，(1)を一般化して，

$$S(N)=\frac{(N\text{以下で}N\text{と互いに素な自然数の個数})}{2}$$

が分かる.

<u>準備２</u>

自然数 n に対して，関数 $\varphi(n)$ を

$$\varphi(n)=(n\text{以下で}n\text{と互いに素な自然数の個数})$$

と定める（この関数をオイラー関数という). この関数について

Ⓐ 素数 p，自然数 e に対して，$\varphi(p^e)=p^e-p^{e-1}$.

Ⓑ 素数 p と自然数 n が互いに素（n は p で割り切れない）のとき，

$\varphi(p^e n)=\varphi(p^e)\varphi(n)$ （e は自然数).

が成り立つ.

（Ⓑを一般化して，$(m, n)=1$ のとき，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$，がいえる.）

<u>証明</u>

Ⓐ 1以上 p^e 以下のもののうち p の倍数となるのは，$\dfrac{p^e}{p}=p^{e-1}$ 個ある.

よって，$\varphi(p^e)=p^e-p^{e-1}$

Ⓑ 下のような $p^e\times n$ マスの表を考える．このうち $p^e n$ と互いに素な数の個数を数える.

	1列目	2列目	3列目	…	k 列目	…	n 列目
1行目	1	2	3	…	k	…	n
2行目	$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$n+k$	…	$2n$
3行目	$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$	…	$2n+k$	…	$3n$
…	…	…	…	…	…	…	…
p 行目	$(p-1)n+1$	$(p-1)n+2$	$(p-1)n+3$	…	$(p-1)n+k$	…	pn
…	…	…	…	…	…	…	…
p^e 行目	$(p^e-1)n+1$	$(p^e-1)n+2$	$(p^e-1)n+3$	…	$(p^e-1)n+k$	…	$p^e n$

1以上n以下のうち，nと互いに素なものの個数は$\varphi(n)$個である．

よって，nと互いに素な列番号をもつ$\varphi(n)$列だけを考える．

kを$(k, n)=1$を満たす自然数とする．

枠で囲んだk列目の1行目からp行目までのp個の数はいずれもnと互いに素である．

これらはどの2つもpで割った余りが異なるので，pで割り切れるのはちょうど1個．

よって，p個の数のうち$p^e n$と互いに素なものは$p-1$個．

$p+1$～$2p$行目，$2p+1$～$3p$行目，…についても同様に$p-1$個あるので，k列目で$p^e n$と互いに素なのは

$$\frac{p^e}{p}(p-1)=p^e-p^{e-1}=\varphi(p^e)\text{個.}$$

したがって，$\varphi(p^e n)=\varphi(p^e)\varphi(n)$．　□

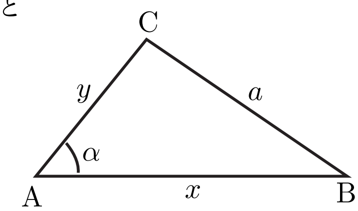
【解答】
$$\begin{aligned}S(10!)&=\frac{\varphi(10!)}{2}\\&=\frac{\varphi(2^8)\times\varphi(3^4)\times\varphi(5^2)\times\varphi(7)}{2}\\&=\frac{(2^8-2^7)(3^4-3^3)(5^2-5^1)(7^1-7^0)}{2}\\&=414720\end{aligned}$$

3

> a, b は正の定数， α は $0 < \alpha < \pi$ を満たす定数とする。次の問に答えよ。
>
> (1) 三角形 ABC において， $\angle\mathrm{BAC} = \alpha, \mathrm{BC} = a$ とする。この三角形の面積が最大となるのは $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ のときであることを証明せよ。
>
> (2) 凸四角形 ABCD において， $\angle\mathrm{BAD} = \alpha, \mathrm{BC} = a, \mathrm{CD} = b$ とする。この四角形の面積が最大となるときの形状を決定せよ。

解説

(1) 三角形 ABC の面積を S とおき， $x = \mathrm{AB}, y = \mathrm{AC}$ とおくと



$$S = \frac{1}{2}xy\sin\alpha$$

となる。また，余弦定理により $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$ が成り立つ。

いま，不等式 $(x-y)^2 \geqq 0$ が常に成り立つので

$$x^2 - 2xy + y^2 \geqq 0$$
$$\therefore x^2 + y^2 \geqq 2xy$$

となる。ここで等号は $x = y$ のときに成り立つ。従って，

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha \geqq 2xy - 2xy\cos\alpha = 2xy(1-\cos\alpha)$$

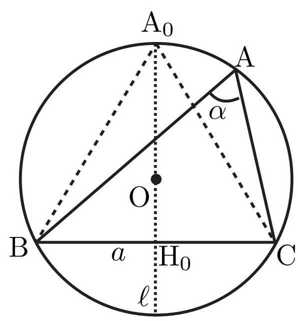
となる。 $0 < \alpha < \pi$ の条件から $1 - \cos\alpha > 0$ なので

$$xy \leqq \frac{a^2}{2(1-\cos\alpha)}$$

となる。よって，

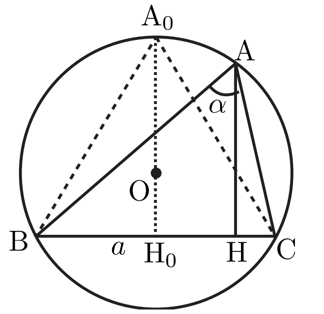
$$S \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2(1-\cos\alpha)}\sin\alpha = \frac{a^2\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)} = \frac{a^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{4 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}}$$

となる。
従って， $x = y$ すなわち $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ のときに S は最大値 $\dfrac{a^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}}$ をとる。(証明終わり)
(別証) 条件 $\angle\mathrm{BAC} = \alpha, \mathrm{BC} = a$ を満たす任意の三角形 ABC をとる。
いま，三角形 ABC の外接円を考え，その中心を O とし，この外接円を円 O と呼ぶことにする。中心 O を通り直線 BC に垂直な直線 ℓ を考える。この直線 ℓ と円 O の交点のうち弧 BAC と交わる点を $\mathrm{A_0}$ とし，直線 ℓ と直線 BC の交点を $\mathrm{H_0}$ とする。



円周角の定理により $\angle\mathrm{BA_0C} = \alpha$ が成り立つ。また， ℓ は線分 BC の垂直二等分線だから $\mathrm{A_0B} = \mathrm{A_0C}$ を満たしている。従って，

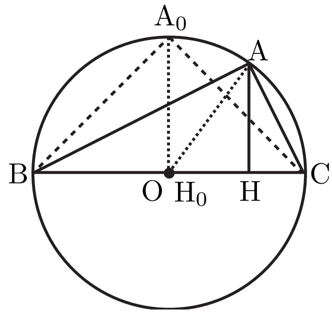
A_0 と A が異なるならば三角形 A_0BC の面積は三角形 ABC の面積よりも大きくなることを示せばよい。いま，点 A から直線 BC に垂線を引き，直線 BC と交わる点を H とする。２つの三角形は辺 BC を共有するので



$$A_0H_0 > AH$$

となることを示せばよい。

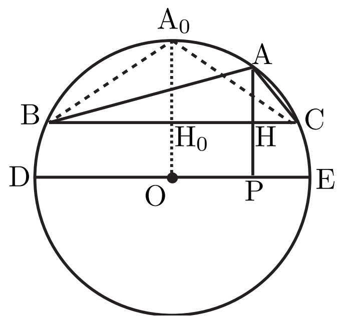
(i) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ の場合
円周角の定理により辺 BC は円 O の直径であることがわかる。このとき，点 H_0 は点 O と一致する。従って，三角形 AH_0H は AH_0 を斜辺とする直角三角形となるので,



$$A_0H_0 = AH_0 > AH$$

が成り立つ。

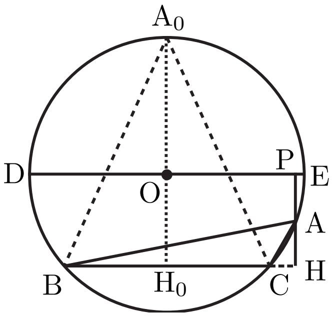
(ii) $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$ の場合
点 H_0 は線分 A_0O 上の点であり， $A_0H_0 + H_0O = A_0O$ となる。
いま, 円 O の直径で, 辺 BC と平行なものを DE とし, 直線 AH と直径 DE との交点を P とすると， $AH + HP = AP$ となる。
このとき，四角形 $OPHH_0$ は長方形だから,
$H_0O = HP$ となる。
また，(i) の結果から $A_0O > AP$ がわかる。従って，この場合も

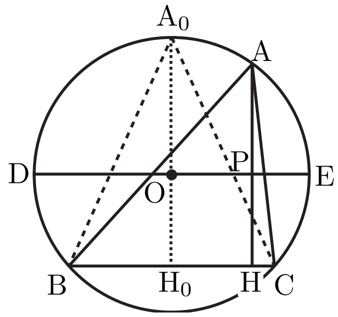


$$A_0H_0 > AH$$

が成り立つ。

(iii) $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の場合
点 O は線分 A_0H_0 上の点であり， $A_0O + OH_0 = A_0H_0$ となる。(ii) と同様に点 D, E, P をとる。





点 A が線分 PH 上 (端点も含む) にある場合は,

$$\mathrm{A_0H_0} > \mathrm{OH_0} = \mathrm{PH} \geqq \mathrm{AH}$$

が成り立つ。

点 P が線分 AH 上にある場合は $\mathrm{AP}+\mathrm{PH}=\mathrm{AH}$ となる。(ii) と同様にして

$$\mathrm{A_0O} > \mathrm{AP}, \quad \mathrm{OH_0} = \mathrm{PH}$$

が成り立つので，この場合も

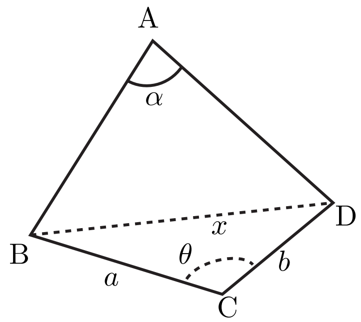
$$\mathrm{A_0H_0} > \mathrm{AH}$$

が成り立つ。

以上により $\mathrm{A_0H_0} > \mathrm{AH}$ が常に成り立つことがわかる。 (証明終わり)

(2) 四角形 ABCD の面積を S とする。

$\theta = \angle\mathrm{BCD}$ とおくと， $0 < \theta < \pi$ となる。 $x = \mathrm{BD}$ とおき三角形 BCD に余弦定理を用いると



$$x = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

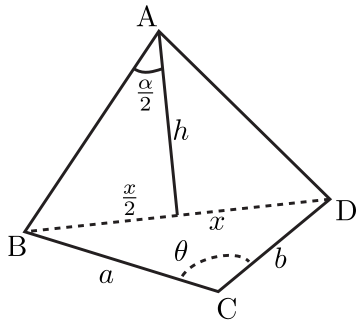
となる。 S は 2 つの三角形 △ABD と △BCD の面積の和である。

いま， θ の値を 1 つ定めると

$$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

の値は確定する。 △ABD はいろいろな値を取り得るが，その値が最大となるのは (1) の結果から $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$ のときである。

このとき，辺 BC を底辺としたときの高さを h とすると



$$h\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{2}$$

が成り立つので $h = \dfrac{x}{2\tan\frac{\alpha}{2}}$ となる。従って

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2}xh = \frac{x^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}}$$

となる。

S が最大になるときの条件は $\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$ のもとで

$$f(\theta) = \frac{x^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{a^2+b^2-2ab\cos\theta}{4\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

が最大となるための条件を考えればよい。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{a^2+b^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}} - \frac{ab\cos\theta}{2\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}ab\sin\theta \\ &= \frac{a^2+b^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}} - \frac{ab}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\cos\theta\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\theta\sin\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{a^2+b^2}{4\tan\frac{\alpha}{2}} - \frac{ab}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\left(\theta+\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

であり，ここで $\dfrac{\alpha}{2} < \theta + \dfrac{\alpha}{2} < \pi + \dfrac{\alpha}{2}, 0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\theta + \frac{\alpha}{2} = \pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \pi - \frac{\alpha}{2}$$

のとき $f(\theta)$ は最大となる。

従って，四角形 ABCD の面積が最大となるための条件は

$\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ かつ $\angle\mathrm{BCD} = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$

となることである。

いま，点 A を中心とし，半径 $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$ の円を考えると，中心角 $\angle\mathrm{BAD} = \alpha$ に対応する円周角は $\dfrac{\alpha}{2}$ となる。 $\angle\mathrm{BCD} = \pi - \dfrac{\alpha}{2}$ に注意すると点 C もこの円上にあることがわかる。

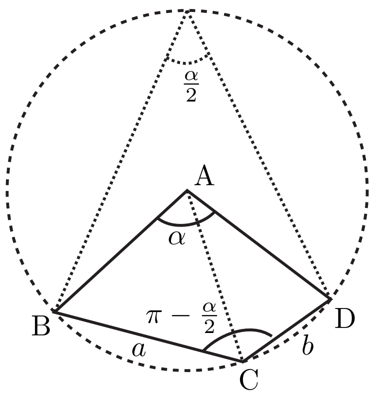
すなわち，四角形 ABCD の面積が最大となるのは

3 点 $\mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ が点 A を中心とする円周上にあるとき

つまり

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{AD}$ が成り立つとき

である。



問題

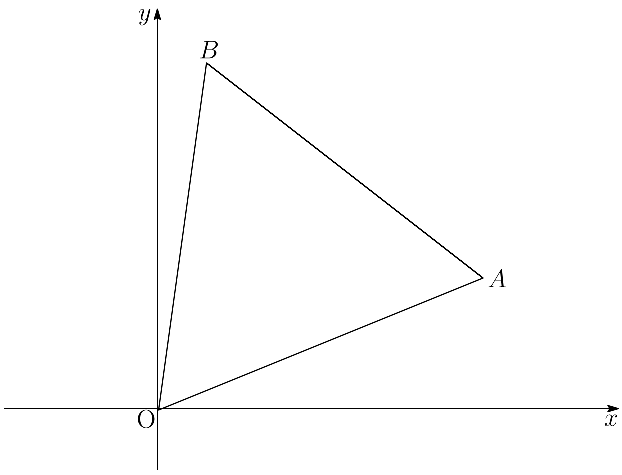
$\boxed{4}$　座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数であるものを格子点という. 自然数 $n \geqq 3$ に対し, 頂点がすべて格子点であるような正 n 角形を格子正 n 角形とよぶことにする.

(1) 格子正三角形は存在しないことを示せ.

(2) 格子正五角形は存在しないことを示せ.

解答

(1) 格子正三角形が存在したとする. 必要なら平行移動することにより, 1 つの頂点は原点であるとしてよい.



このとき残りの頂点を $A(a,b)$, $B(c,d)$（a,b,c,d は整数）とすると, $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

とかける. また, $\triangle OAB$ の 1 辺の長さを l とすると

$$l^2 = OA^2 = a^2 + b^2$$

は整数であり

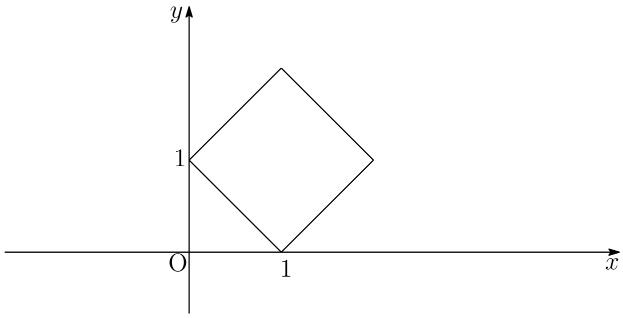
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

である. よって $\frac{1}{2}|ad - bc| = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ であるから

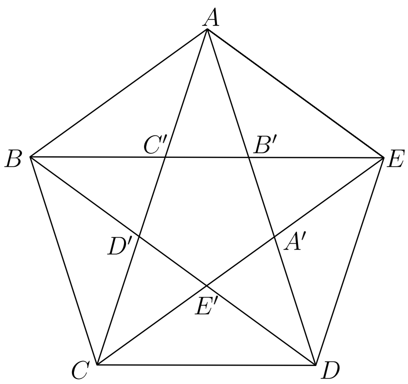
$$\sqrt{3} = \frac{2|ad - bc|}{l^2}$$

となるが, 左辺は無理数, 右辺は有理数だからこれは矛盾である.

注. 平行移動して1つの頂点を原点にもってきても, 他の頂点が格子点であるという性質は変わらない. しかし回転するとそうはいかないので, 考える格子正三角形の辺を座標軸に平行にするわけにはいかない. 例えば下図の格子正方形を回転して, 1辺を座標軸に平行にすると格子正方形ではなくなる.



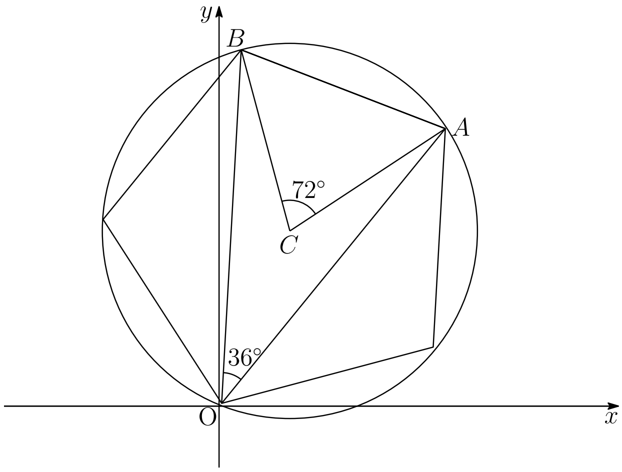
(2) 格子正五角形が存在したとする. 格子正五角形の一辺の長さ l について l^2 は正の整数だから, l^2 が（したがって l が）最小となるような格子正五角形 $ABCDE$ が存在する.



このとき図のように対角線の交点 A', B', C', D', E' をとる. 四角形 $ABCA'$ は平行四辺形であり, A, B, C は格子点だから A' も格子点である. 同様にして B', C', D', E' もすべて格子点である. よって五角形 $A'B'C'D'E'$ は格子正五角形であり, その1辺は元の正五角形 $ABCDE$ の1辺よりも短い. これは仮定に反する.

（別解）以下のように, (1) と同様に示すこともできる.

格子正五角形が存在したとする. 必要なら平行移動することにより, 1つの頂点は原点であるとしてよい.



このとき残りの頂点のうち, 原点と隣り合わない 2 つを $A(a, b)$, $B(c, d)$（a, b, c, d は整数）とすると, $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}|ad - bc|$$

とかける.

一方, $\triangle OAB$ において

$$OA = OB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

である. また, もとの格子正五角形の外接円の中心を C とすると, $\angle ACB = 72°$ だから $\angle AOB = 36°$ である. よって

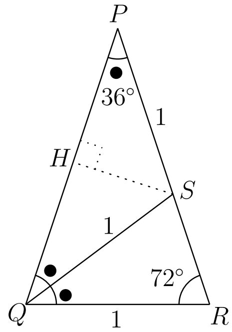
$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \angle AOB = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 36°$$

である. よって $\frac{1}{2}|ad - bc| = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \sin 36°$ であるから

$$\sin 36° = \frac{|ad - bc|}{a^2 + b^2}$$

となる. しかし左辺は無理数, 右辺は有理数だからこれは矛盾である. したがって格子正五角形は存在しない.

（$\sin 36°$ が無理数であることの証明）下図のように, 頂角 $36°$, 底辺の長さ 1 の二等辺三角形 $\triangle PQR$ を考え, 辺 PR 上に $QS = 1$ となる R 以外の点 S をとる.



このとき $\triangle PQR \backsim \triangle QRS$ であるから $PQ : QR = QR : RS$ が成り立つ. $PQ = x$ とおくと $PR = x$ だから $RS = x-1$. よって $x : 1 = 1 : (x-1)$ であるから $x(x-1) = 1$, つまり $x^2 - x - 1 = 0$ である. したがって $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるが, $x > 0$ より $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

S から PQ におろした垂線の足を H とすると

$$PH = \frac{1}{2}PQ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

であるから

$$SH^2 = PS^2 - PH^2 = 1^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

よって $SH = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ であるから

$$\sin 36^\circ = \frac{SH}{PS} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

となる. これが有理数なら $10-2\sqrt{5}$ も有理数, したがって $\sqrt{5}$ も有理数となり不合理. したがって $\sin 36^\circ$ は無理数である.

$\boxed{5}$ まだ分数の割り算を知らない子供に $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3}$ をどのように考えたら良いと思うかを尋ねたら，子供は次のように答えました。

「ええっと $\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ なので，$\dfrac{1}{2} \div \dfrac{1}{3} = 1$　余り$\dfrac{1}{6}$ となるんじゃない？」

その子供に次のように返答しました。

「もしも $10 \div 7$ を考えるのならば，10 の中に 7 は 1 つあって，残りの部分は 3 で，3 の中にもう 7 は取れないので $10 \div 7 = 1$　余り 3 という答え方があるね。それとそっくりな考え方だから，そういう考え方もいいと思うけど，$10 \div 7 = 1.42857142857\ldots$ のように答えに余りを使わない考え方の割り算もあるよね。そのような割り算をできないかな。」

すると子供はこう答えました。「$\dfrac{1}{2}$ の中に $\dfrac{1}{3}$ は 1 つあって, 残りの部分は $\dfrac{1}{6}$ で，この中に $\dfrac{1}{3}$ が何個あるか考えればいいから...

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = 1 + \left(\frac{1}{6} \div \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right) \cdots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\text{」}$$

この式は，通常期待されている答えの $\dfrac{3}{2}$ とは表記が異なりますが，自然数同士の割り算で商が無限小数になる場合と同様に正しい計算とみなすことができます。子供が最後の式をどのような手法で得たのかは定かではありませんが，最後の式を導く手法がいくつか考えられます。このことに関する次の問題に答えてください。

(1) $\dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{10} \times 1 + \dfrac{3}{70}$ に注意すると $\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10} = 1 + \left(\dfrac{3}{70} \div \dfrac{1}{10}\right) = 1 + \dfrac{3}{10}\left(\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}\right)$ とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，子供が考えた割り算のように，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を無限個の和で表記しなさい。

(2) a を実数とするとき, 次の和を求められないか考察しなさい。必要があれば a に適当な条件をつけて構いません。

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots$$

(3)
$$\begin{aligned}\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} &= 1 + \left(\frac{3}{70} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{3}{7} \div \frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{30}{70} \div \frac{7}{70}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{2}{70} \div \frac{7}{70}\right) = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{20}{70} \div \frac{7}{70}\right)\end{aligned}$$

とみて，以下同様の操作を繰り返すことにより，$\dfrac{1}{7} \div \dfrac{1}{10}$ を $a_0 + \dfrac{b_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{b_n}{10^n} + \cdots$ の形で表しなさい。

(4) 実数 x と 0 から $n-1$ までのいくつかの整数 a_0, a_1, a_2, a_k , $b_1, b_2, b_3, \ldots$ が

$$x = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + + \frac{b_3}{n^3} + \cdots$$

をみたす時に, 負でない整数 $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ と小数点と呼ばれる「.」と 負でない整数 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ をこの順番に並べた

$$a_k a_{k-1} \cdots a_2 a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \cdots$$

のことを実数 x の n 進表記といいます。例えば $\dfrac{3}{2}$ の 3 進表記は

$$1.11111\cdots$$

であり，$\dfrac{10}{7}$ の 10 進表記は

$$1.42857142857\cdots$$

となります。$\dfrac{11}{8}$ を 3 進表記しなさい。

$\boxed{5}$ 解答

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7}\div\frac{1}{10} =& 1+\left(\frac{3}{70}\div\frac{1}{10}\right)\\
=& 1+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)\\
=& 1+\frac{3}{10}\left(1+\frac{3}{10}\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)\right)\\
=& 1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)\\
&\vdots\\
=& 1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\left(\frac{3}{10}\right)^n\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)
\end{aligned}$$

よって

$$\left\{1-\left(\frac{3}{10}\right)^n\right\}\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)=1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

ここで $0<\frac{3}{10}<1$ であるので，n を限りなく大きくすると $\left(\frac{3}{10}\right)^n$ は限りなく 0 に近づくので

$$\left(\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\right)=1+\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\cdots$$

と考えられる。

(2) 高校の数学 III の教科書の「無限等比級数」に記述してあることを示すのがもっとも正統な解法といえる. しかし, この問題の意図は身近なものから無限個の和をどのように考えるべきか考察することなので, (1) を一般化することを解答の方針とすることをお許しいただきたい.

S を 0 でない実数とすると,

$$\begin{aligned}
S =& 1+(S-1)\\
=& 1+\frac{S-1}{S}\cdot S\\
=& 1+\frac{S-1}{S}\cdot(1+(S-1))\\
=& 1+\frac{S-1}{S}\cdot\left(1+\frac{S-1}{S}\cdot S\right)\\
=& 1+\frac{S-1}{S}+\left(\frac{S-1}{S}\right)^2\cdot S\\
&\vdots\\
=& 1+\frac{S-1}{S}+\left(\frac{S-1}{S}\right)^2+\cdots+\left(\frac{S-1}{S}\right)^{n-1}+\left(\frac{S-1}{S}\right)^n\cdot S
\end{aligned}$$

よって

$$1+\frac{S-1}{S}+\left(\frac{S-1}{S}\right)^2+\cdots+\left(\frac{S-1}{S}\right)^{n-1}=S-\left(\frac{S-1}{S}\right)^n\cdot S\quad(S\neq 0)$$

ここで $a=\frac{S-1}{S}$ とおくと, $a\neq 1$ のとき $S=\frac{1}{1-a}$ であるので

$$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\frac{1-a^n}{1-a} \quad (a \neq 1) \cdots (*)$$

ここで $|a|<1$ であるならば n を限りなく大きくするとき $|a|^n$ は限りなく 0 に近づき, a^n も限りなく 0 に近づくので

$$1+a+a^2+a^3+\cdots=\frac{1}{1-a} \qquad (|a|<1)$$

となると考えられる。
$a>1$ のとき, n を限りなく大きくするとき, $(*)$ に現れる a^n は限りなく大きくなり 1 つの値には近づかないので $1+a+a^2+a^3+\cdots$ が値を持つとは考えられない。
$a<-1$ のとき n を限りなく大きくするとき, a^n の絶対値は限りなく大きくなり, $(*)$ に現れる a^n は 1 つの値には近づかないので $1+a+a^2+a^3+\cdots$ が値を持つとは考えられない。
$a=-1$ のとき a^n は -1 と 1 を交互にとるので n を限りなく大きくするとき, $(*)$ に現れる a^n は 1 つの値には近づかないので $1+a+a^2+a^3+\cdots$ が値を持つとは考えられない。
$a=1$ のときは $a=\dfrac{S-1}{S}$ をみたす S は存在しないので, S の式変形から導いた $(*)$ を使うことはできないが, $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=n$ であるから, n を限りなく大きくすると $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$ は限りなく大きくなるので $1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots$ が値を持つとは考えられない。
以上のことから $1+a+a^2+a^3+\cdots$ が値を持つのは $|a|<1$ に限り、

$$1+a+a^2+a^3+\cdots=\frac{1}{1-a} \qquad (|a|<1)$$

と考えるのが妥当である。

(3)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{7}\div\frac{1}{10}\\
=&1+\left(\frac{3}{70}\div\frac{1}{10}\right)=1+\frac{1}{10}\left(\frac{30}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{1}{10}\left(4+\frac{2}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}\left(\frac{20}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}\left(2+\frac{6}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1}{10^3}\left(\frac{60}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1}{10^3}\left(8+\frac{4}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{1}{10^4}\left(\frac{40}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{1}{10^4}\left(5+\frac{5}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{1}{10^5}\left(\frac{50}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{1}{10^5}\left(7+\frac{1}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}\left(\frac{10}{70}\div\frac{7}{70}\right)=1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}\left(1+\frac{3}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n-1}}\left(\frac{c_{n-1}}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n}}\left(\frac{10c_{n-1}}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{1}{10^{n}}\left(b_n+\frac{c_n}{70}\div\frac{7}{70}\right)\\
=&1+\frac{4}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{7}{10^5}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{b_n}{10^n}+\frac{1}{10^{n}}\left(\frac{c_n}{70}\div\frac{7}{70}\right)
\end{aligned}$$

ここで c_n $(n=0,1,2,\ldots)$, b_n $(n=1,2,3,\ldots)$ はこのような操作により上の式にあらわれる適切な数として定義される。すなわち, $c_0=3$, n を自然数とするとき，$10c_{n-1}$ を 7 で割ったときの商を b_n 余りを c_n と定める。c_n はある自然数を 7 で割った余りであるから $0 \leqq c_n \leqq 6$ である。n を限りなく大きくするとき $\dfrac{1}{10^n}\left(\dfrac{c_n}{70}\div\dfrac{7}{70}\right)$ は限りな

く 0 に近づくことがわかる。b_n は $10c_{n-1}$ を 7 で割った時の商で, $0 \leqq 10c_{n-1} \leqq 60$ 　であるから $0 \leqq b_n < 9$ である。また上の計算により b_k は循環することもわかるので,

$$\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} = a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \cdots$$

の形で表すには

$$a_0 = 1$$

$$b_k = \begin{cases} 4 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 1 \text{ のとき}) \\ 2 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 2 \text{ のとき}) \\ 8 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 4 \text{ のとき}) \\ 7 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 5 \text{ のとき}) \\ 1 & (k \text{ を } 6 \text{ で割ったときの余りが } 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすればよく,

$$\frac{1}{7} \div \frac{1}{10} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{7}{10^5} + \frac{1}{10^6} + \cdots$$

注意：　これは $\frac{10}{7}$ の小数表示が $\frac{10}{7} = 1.428571\cdots$ と表されることに対応している。

(4)

$$\begin{aligned} \frac{11}{8} =& 1 + \frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{8} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\left(0 + \frac{3}{8}\right) \\ & \vdots \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \left(\frac{c_{n-1}}{8}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{3c_{n-1}}{8}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \cdot \left(b_n + \frac{c_n}{8}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \cdot \left(b_n + \frac{c_n}{8}\right) \\ =& 1 + \frac{1}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{b_n}{3^n} + \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{c_n}{8}\right) \end{aligned}$$

ここで c_n は上記で繰り返される操作によってあらわれる適切な数である。すなわち, $c_0 = 3$, n を自然数とするとき, $3c_{n-1}$ を 8 で割ったときの商を b_n , 余りを c_n と定める。c_n はある自然数を 8 で割った余りであるから $0 \leqq c_n \leqq 7$ である。すると n を限りなく大きくするとき $\frac{1}{3^n} \cdot \frac{c_n}{8}$ は限りなく 0 に近づくことがわかる。$0 \leqq 3c_{n-1} \leqq 21$ であるから $0 \leqq b_n < 2$ である。上記を良く見れば n が奇数のときは $b_n = 1$, $c_n = 1$ で, n が偶数のときは $b_n = 0$, $c_n = 3$ であることもわかる。

以上のことから

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ は正の奇数}) \\ 0 & (n \text{ は正の偶数 } 0) \end{cases}$$

とすれば

$$\frac{11}{8} = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + + \frac{b_3}{n^3} + \cdots$$

となるので $\frac{11}{8}$ の 3 進表記は $1.101010\cdots$ となる。