「2022年度高知県高等学校数学コンクール 問題」 訂正箇所

訂正箇所を赤字で記入しています　ご確認ください

$\boxed{3}$ 1から16の整数を，8個ずつの $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_8\}$, $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_8\}$ 2組に分け，$\boxed{\text{表 1}}$ のような表をつくり，できた 8×8 のマス目に次の ~~★★にしたがって数を入れる。~~
（規則★）にしたがって●または×を入れる。

（規則★）
~~★~~ (i,j) のマス目には，a_i+b_j を 17 で割った余りが A に属すれば●を入れ，
属さなければ×を入れる。~~★~~

このとき，どの~~たて列，よこ列も~~縦の列も横の列も●の個数が等しくなるような2組の分け方をすべて求めよ。
なお，$\boxed{\text{表 2}}$ は，$A=\{1,2,3,4,9,11,13,15\}$, $B=\{5,6,7,8,10,12,14,16\}$ の場合の例である。

$\boxed{4}$ (3) (2) の $\{E(n)\}$ は単調減少でも単調増加でもないことを証明せよ。なお，ここで数列 $\{f(n)\}$ が単調増加であるとは，$n<n'$ を満たす任意の自然数 n,n' に対して $f(n)\leqq f(n')$ が成り立つことをいう。また，数列 $\{f(n)\}$ が単調減少であるとは，$n<n'$ を満たす任意の自然数 n,n' に対して $f(n)\geqq f(n')$ が成り立つことをいう。

(4) (2), (3) によると，$\{E(n)\}$ は（イ）を満たすという点では $\{c\log_2 n\}$ (c は定数) と似ているが，~~単調では~~単調増加でも単調減少でもないから，$\{c\log_2 n\}$ とは 大きく異なるものにみえる。それでは，（イ）を満たす $\{f(n)\}$ のうち，以下の条件 (P) を満たすものは $\{c\log_2 n\}$ のみだろうか。$\{c\log_2 n\}$ のみならそれを証明し，$\{c\log_2 n\}$ とかけないものが存在するなら，その例を一つあげよ。
(P) $n\geqq 10^{100}$ を満たす任意の自然数 n について $f(n)=c\log_2 n$ が成り立つ。

訂正が反映された正しい問題は次のページに掲載しています

「2022 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{1}$ n を 3 以上の整数とし，n 桁の整数 $1\underbrace{000\cdots000}_{n-2\text{ 個}}1$ を $A(n)$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) $A(13)$ を $A(4)$ で割った余りを求めよ。

(2) 2020 以上 2025 以下の 6 個の整数をそれぞれ素因数分解せよ。

(3) $3 \leqq k \leqq 2021$ の整数 k のうち，$A(k)$ が $A(2022)$ の約数であるような k を全て求めよ。

$\boxed{2}$ △ABC の内部に点 P をとり，各頂点 A, B, C と P を結ぶ直線が対辺と交わる点をそれぞれ A′, B′, C′ とする。このとき △ABC と △A′B′C′ の面積をそれぞれ S, S' とすると

$$S' \leqq \frac{1}{4}S$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ 1 から 16 の整数を，8 個ずつの $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_8\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_8\}$ 2 組に分け，$\boxed{\text{表 1}}$のような表をつくり，できた 8×8 のマス目に次の（規則★）にしたがって●または×を入れる。

（規則★）(i, j) のマス目には，$a_i + b_j$ を 17 で割った余りが A に属すれば●を入れ，属さなければ×を入れる。

このとき，どの縦の列も横の列も●の個数が等しくなるような 2 組の分け方をすべて求めよ。
なお，$\boxed{\text{表 2}}$は，$A=\{1,2,3,4,9,11,13,15\}$, $B=\{5,6,7,8,10,12,14,16\}$ の場合の例である。

$\boxed{\text{表 1}}$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
b_1								
b_2								
b_3								
b_4								
b_5								
b_6								
b_7								
b_8								

$\boxed{\text{表 2}}$

	1	2	3	4	9	11	13	15
5	×	×	×	●	×	×	●	●
6	×	×	●	×	●	×	●	●
7	×	●	×	●	×	●	●	×
8	●	×	●	×	×	●	●	×
10	●	×	●	×	●	●	×	×
12	●	×	●	×	●	×	×	×
14	●	×	×	●	×	×	×	×
16	×	●	●	●	×	×	×	×

$\boxed{4}$ 数列 $\{f_n\}$ を $\{f(n)\}$ とかくことにする。任意の自然数 m, n に対して，

$$f(mn) = f(m) + f(n) \qquad \text{(イ)}$$

を満たす数列 $\{f(n)\}$ としては $\{c\log_a n\}$ (a, c は定数で，$a > 0$, $a \neq 1$) を考えるのは自然である。このとき，$a = 2$ としても一般性を失わない。なぜなら，

$$c\log_a n = c\frac{\log_2 n}{\log_2 a} = \frac{c}{\log_2 a}\log_2 n$$

であり，$\dfrac{c}{\log_2 a}$ が定数だからである。さて，$\{c\log_2 n\}$ (c は定数) が (イ) を満たす数列としては自然なのだが，他にこのような数列は存在しないのだろうか。以下ではそれを考えてみよう。

(1) (イ) を満たす任意の数列 $\{f(n)\}$ に対して，$f(1) = 0$ および $f(m^k) = kf(m)$ が成り立つことを示せ。なお，ここで，m は任意の自然数で，k は任意の 0 以上の整数である。

(2) $n = p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ ($p_1, p_2, \cdots, p_r$ は相異なる素数で，$e_1, e_2, \cdots e_r$ は 0 以上の整数である。また，r は自然数である。) とする。このとき，

$$E(n) = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$$

と定めると，数列 $\{E(n)\}$ は (イ) を満たすこと，すなわち

$$E(mn) = E(m) + E(n) \qquad (m, n \text{ は任意の自然数})$$

を満たすことを示せ。

(3) (2) の $\{E(n)\}$ は単調減少でも単調増加でもないことを証明せよ。なお，ここで数列 $\{f(n)\}$ が単調増加であるとは，$n < n'$ を満たす任意の自然数 n, n' に対して $f(n) \leqq f(n')$ が成り立つことをいう。また，数列 $\{f(n)\}$ が単調減少であるとは，$n < n'$ を満たす任意の自然数 n, n' に対して $f(n) \geqq f(n')$ が成り立つことをいう。

(4) (2), (3) によると，$\{E(n)\}$ は (イ) を満たすという点では $\{c\log_2 n\}$ (c は定数) と似ているが，単調増加でも単調減少でもないから，$\{c\log_2 n\}$ とは 大きく異なるものにみえる。それでは，(イ) を満たす $\{f(n)\}$ のうち，以下の条件 (P) を満たすものは $\{c\log_2 n\}$ のみだろうか。$\{c\log_2 n\}$ のみならそれを証明し，$\{c\log_2 n\}$ とかけないものが存在するなら，その例を一つあげよ。

(P) $n \geqq 10^{100}$ を満たす任意の自然数 n について $f(n) = c\log_2 n$ が成り立つ。

$\boxed{5}$ n を 2 以上の自然数とし，以下の操作を考える。

(i) n が偶数ならば，n を 2 で割る

(ii) n が奇数ならば，n に 1 を加える

与えられた 2 以上の自然数 n に対してこの操作を行い，得られた自然数が 1 でなければ，得られた自然数にこの操作を繰り返し，1 になるまで繰り返す。

たとえば，$n=7$ から始めると

$$7 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

である。

(1) 2 以上の自然数 n に対して，この操作を繰り返すことで，最後は必ず 1 になることを証明せよ。

(2) n から始めて 1 が得られるまでの上記の操作の回数を $f(n)$ と表す。たとえば，$n=7$ のときは，$f(7)=4$ である。

また，$g(n)$ を

$$g(n)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$$

と定める。ただし，$f(1)=0$ と定義する。このとき，$g(6)$ を求めよ。

(3) (2) で定めた $g(n)$ に対して，N を自然数とするとき，$g(4N)$ を，$g(2N)$, $g(N)$, N を用いて表せ。

(4) (2) で定めた $g(N)$ に対して，$g(48)$ を求めよ。