「2019 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{1}$ A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とする。数学の苦手な人は

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \qquad (※)$$

のような式変形をすることがある。もちろん，一般にはこれは正しくない。

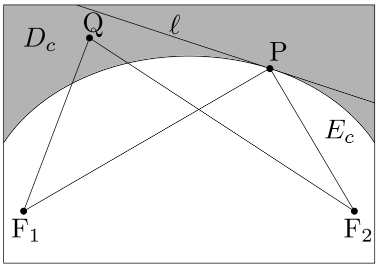
例えば，$A=B=1$ とすれば，$\dfrac{1}{A+B} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{B} = 2$ である。

しかしながら，このような式変形は常に誤りなのだろうか。言い換えるなら， A, B をともに 0 でなく，$A+B \neq 0$ を満たす数とするとき， (※) を満たすような数 A, B はまったく存在しないのだろうか。以下では，これについて考えてみよう。

(1) (※) を満たす実数 A, B は存在しないことを証明せよ。

(2) (※) を満たす複素数 A, B は存在するだろうか。存在するなら，それらをすべて求めよ。また，存在しないなら，それを証明せよ。

$\boxed{2}$ 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{F_1}, \mathrm{F_2}$ をとる。この 2 点間の距離 $\mathrm{F_1F_2}$ より大きい定数 c に対し， $\mathrm{F_1P} + \mathrm{F_2P} = c$ を満たす点 P の軌跡を E_c で表す。また，$\mathrm{F_1Q} + \mathrm{F_2Q} > c$ を満たす点 Q 全体が作る領域を D_c で表す。



E_c 上の任意の点 P に対し，点 P を通る直線で，点 P 以外の部分は 領域 D_c に含まれる直線がただ 1 つ存在する。この直線を点 P における E_c の接線という。また， 直線 ℓ が E_c 上のある点における接線となるとき E_c は ℓ を接線にもつという。

このとき，次の各問に答えよ。

(1) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。 ℓ と直線 $\mathrm{F_1P}$ のなす角を θ_1 とし， ℓ と直線 $\mathrm{F_2P}$ のなす角を θ_2 とすると， $\theta_1 = \theta_2$ が成り立つことを証明せよ。ただし， 2 直線のなす角は $0°$ 以上 $90°$ 以下で考えるものとする。

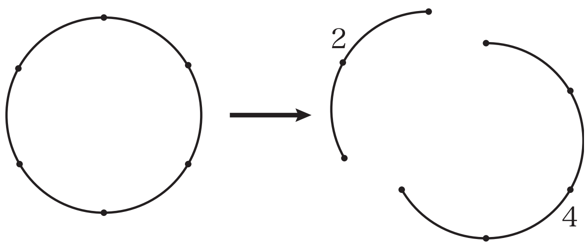
(2) E_c 上の点 P における接線を ℓ とする。いま，点 P を通り ℓ とのなす角が等しい 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 を考える。 ℓ_1, ℓ_2 がどちらも線分 $\mathrm{F_1F_2}$ と共有点をもたないならば，

　　ある定数 c' をとって，$E_{c'}$ は ℓ_1, ℓ_2 を共に接線にもつようにできる

ことを証明せよ。

$\boxed{3}$ ある1つの円を n 等分する点をとり，その等分点で円を r 個の弧に切り分けたとき，弧の長さの組数を $f(n,r)$ と表すことにする。

例えば， $n=6, r=2$ ，すなわち，円を 6 等分する点をとり，その等分点で円を2つの弧に切り分けたときは，円周の長さを仮に 6 と考えて，切り分けたときの弧の長さだけに着目すると，弧の長さの組は $(1,5),(2,4),(3,3)$ の3組できる。従って，このとき $f(6,2)=3$ である。



次に， $r=3$ のときについて考えよう。

<u>例えば， $n=12$ として $f(12,3)$ を考えるとき，円周の長さを仮に 12 として，長さ 1 の弧を含むかどうかで場合分けしてみる。長さ 1 の弧を含む場合は， 3つの弧のうちの1つの弧の長さを 1 に固定して，残り 11 の長さを2つの弧に分配すると考えることができる。長さ 1 の弧を含まない場合は，すべての弧の長さから 1 ずつ引き，残り 9 の長さを3つの弧に分配すると考えることができる。 $f(12,3)$ がこのように場合分けされることを考えれば，ある関係が成り立つことに気づくはずだ。</u>

下線部のことを参考にしながら，次の各問に答えよ。必要ならば次のことを用いても良い：

> a, d, n を自然数とする。 a から始めて，d を次々に加えて n 個の自然数を作るとき，これら n 個の自然数の和は， n 番目に作られる数を ℓ とすると $\dfrac{n(a+\ell)}{2}$ である。
> (例) $a=1, d=3, n=5$ の場合， $1,4,7,10,13$ の和は次のようになる：
> $$1+4+7+10+13=\frac{5(1+13)}{2}=35$$

(1) $f(12,3)$ を求めよ。

(2) $f(219,3)$ を求めよ。

(3) 必要ならば n について場合分けを行って， $f(n,3)$ を n の式で表せ。また，可能ならば場合分けせずに $f(n,3)$ を n の1つの式で表せ。

$\boxed{4}$ 2023 桁の自然数 $N_k\ (k=0,1,2,\cdots,9)$ は 10 進数表記で次のように表される：

$$N_k=20\underbrace{kk\cdots k}_{2019\text{ 個}}19$$

N_k のうち， 19 の倍数であるものを求めよ。

$\boxed{5}$ 記号 ◯， × を一列に n 個並べて記号の列を作る。このとき，以下の条件を満たす n は存在するか。存在する場合は最小の n を求め，存在しない場合はそれを証明せよ。

条件：どのように記号列を作っても等間隔に並ぶ3つの同じ記号が存在する

(例えば $n=5$ の場合は「◯◯◯××」や「×◯×◯×」では等間隔に並ぶ3つの同じ記号が存在するが，「◯◯×◯×」では等間隔に並ぶ3つの同じ記号は存在しない。従って $n=5$ は上の条件を満たしていない。)