「2023年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

$\boxed{1}$ 例えば，x^4+x^2+1 は，係数が整数という条件の下で，$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ と 2 つの多項式に因数分解される。x^4+x^2+n が，係数が整数という条件の下で，2 つの多項式に因数分解されるための自然数 n の条件を求めよ。

$\boxed{2}$ 2 つのサイコロ（立方体）A，B で，次の条件を満たすものを見出せ：
A,B の各面には正の整数（目）が 1 つ書いてある。同じ目が 2 つ以上あってもよい。A,B は普通のサイコロ（1〜6 の目が各 1 個ある）とは異なるが，A と B を投げたときの目の和の出方は普通のサイコロ 2 つを投げたときとまったく同じである。例えば目の和が 2 になるのは 1 通り，3 になるのは 2 通り，. . . ということ。
（注）A と B の目の付き方は同じとは限らない。

$\boxed{3}$ a, b, c, d を $a+b+c+d=0$ を満たす実数とし，放物線 $y=px^2 \quad (p \neq 0)$ 上に 4 点 A, B, C, D を x 座標がそれぞれ a, b, c, d となるようにとる。2 直線 AB, CD が交わるとき，その交点 E について，

$$\mathrm{AE} \times \mathrm{BE} = \mathrm{CE} \times \mathrm{DE}$$

が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{4}$ 0 以上の整数 n に対し

$$F_n = 2^{2^n}+1$$

とします。このような数はフェルマー数と呼ばれ, 現在も盛んに研究されています。5 つのフェルマー数

$$\begin{aligned}
F_0 &= 2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 3 \\
F_1 &= 2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5 \\
F_2 &= 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17 \\
F_3 &= 2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257 \\
F_4 &= 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 = 65537
\end{aligned}$$

は素数であることが知られていますが, F_5 は素数になりません。実際

$$F_5 = 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

となります。実は， フェルマー数で素数になるものは F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 しか見つかってなく, 他のフェルマー数で素数になるものが有るかは， 数学の最先端の研究においても未解決です。以上をふまえて， 次の問を考えてください。
【問】 素数 73 は， 全ての n に対し， F_n の約数にならないことを証明してください。

$\boxed{5}$ 実数 x に対して，x をこえない最大の整数を $[x]$ で表す。$[x]$ は x の整数部分とよばれることがある。例えば，$[2.4]=2, [-3.14]=-4$ である。また，$\langle x \rangle = x-[x]$ とおく。$\langle x \rangle$ は x の小数部分とよばれることがある。例えば，$\langle 2.4 \rangle = 0.4, \langle -3.14 \rangle = 0.86$ である。このとき，次の各問に答えよ。
(1) $[x^2]=[x]^2$ かつ $\langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2$ となる実数 x をすべて求めよ。
(2) 数列 $\{a_n\}$ で以下の条件 (ア) と (イ) の両方を満たすものの具体例を一つ挙げよ。また，自分が挙げた具体例が，確かに (ア) と (イ) の両方を満たすことの証明もつけること。なお，(イ) において ${a_n}^2$ とは $a_n \times a_n$ のことを表す。
(ア) すべての自然数 n に対して $n < a_n < n+1$ が成り立つ。
(イ) すべての自然数 n に対して $[{a_n}^2] = [a_n]^2$ が成り立つ。