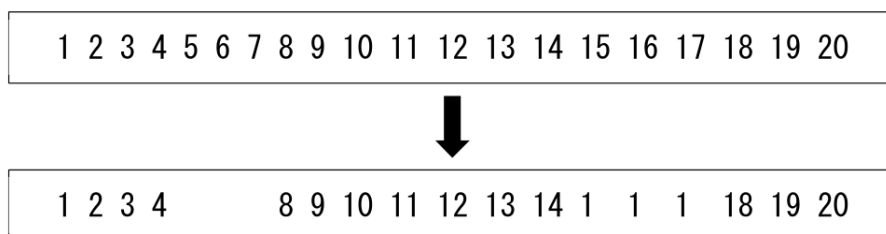


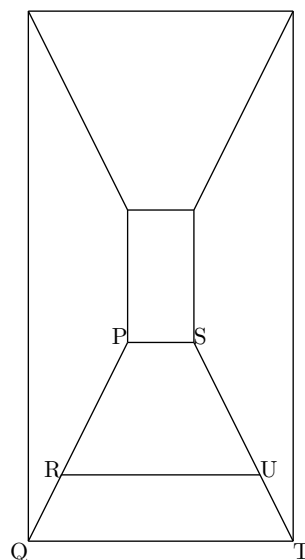
「2021 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

- 1 N を自然数とする。紙に左から $1, 2, 3, \dots, N$ と自然数を書いた後, $5, 6, 7$ の 3 種類の数字を消すという操作を行う。このとき, 残った数字の個数 (文字数) を $S(N)$ で表す。例えば, $N = 20$ の場合は下の図のようになる。



また, $S(20) = 25$ である。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) $S(99)$ を求めよ。
- (2) n を自然数とする。このとき, $S(10^n - 1)$ を n の式で表せ。
- 2 下の左の写真は平らなところにある一定の幅で真っ直ぐな廊下を撮影したものである。また, 下の右の図は左の写真と同様に撮影された写真を図にしたものである。



図における点 P, Q, R, S, T, U に対応する実際の廊下の点を $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}, \hat{S}, \hat{T}, \hat{U}$ であらわす。ここで $\hat{P}\hat{Q} // \hat{S}\hat{T}$, $\hat{P}\hat{Q} \perp \hat{Q}\hat{T}$, $\hat{P}\hat{S} // \hat{R}\hat{U} // \hat{Q}\hat{T}$ であり, $PS // RU // QT$ であるものとする。また, 図における 3 つの線分 PS, RU, QT の長さをそれぞれ a, b, c とする。実際の床は平面であると仮定し, 実際の線分は写真においても線分として撮影されるものとして次の問に答えよ。

- (1) 2 点 $\hat{P}, \hat{Q}$ の中点を $\hat{M}$ とし, この点 $\hat{M}$ に対応する図の点を M とする。また 2 点 $\hat{S}, \hat{T}$ の中点を $\hat{N}$ とし, この点 $\hat{N}$ に対応する図の点を N とする。2 点 M, N の距離を a, c であらわせ。
- (2) $a = 1\text{cm}, b = 16\text{cm}, c = 21\text{cm}, \hat{R}\hat{Q} = 1\text{m}$ とするとき, 2 点 $\hat{P}, \hat{Q}$ の距離を求めよ。

- 3 $\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 P を、辺 BC 上に点 Q を、辺 CA 上に点 R をとる。ただし、 P, Q, R は頂点とは異なる点とする。さらに、 $\triangle APR, \triangle BQP, \triangle CRQ$ の外心をそれぞれ A', B', C' とする。このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は、3 点 P, Q, R のとり方によらず必ず相似となることを示せ。

- 4 次の問に答えよ。

- (1) p を素数、 r を $1 \leq r \leq p-1$ である自然数とする。このとき、 ${}_pC_r$ は p の倍数であることを証明せよ。
- (2) $(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1) = x^{p-1} + a_1x^{p-2} + a_2x^{p-3} + \cdots + a_{p-2}x + a_{p-1}$ とする。 p が 3 以上の素数であるとき、 $a_1, a_2, \dots, a_{p-2}$ はそれぞれ p で割り切れることを証明せよ。
- (3) m は正の整数とする。2 つの整数 a, b について $a-b$ が m の倍数であることを

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。このとき、「素数 p に対して、 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ である」を証明せよ。

- 5 A, B の二人で以下のルール (I), (II), (III) によるゲームを行う：

- (I) 色が 50 色と正 $2n$ 角形がある。 A は色を一つ指定してその色を B に伝え、 B は正 $2n$ 角形のまだ色のついていない頂点を一つ選んでその色に塗り、その位置を A に伝える。この手続きを最大 $2n$ 回繰り返す。 A は同じ色を何回指定してもよい。
- (II) 同じ色の 3 つの頂点で、二等辺三角形の 3 頂点となるものができた段階で B の勝ちとし、手続きは終了とする。
- (III) 手続きを $2n$ 回終了した段階で B の勝ちでなければ A の勝ちとする。

このとき、以下の問に答えよ。

- (1) A に必勝戦略があるような n の値を決定せよ。
- (2) 勝敗に関する (II) のルールを

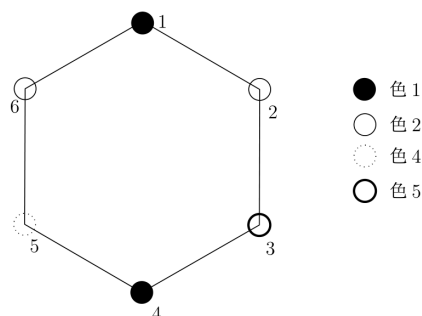
- (II)' 同じ色の 2 つの頂点で、最も長い対角線の両端となるものができた段階で B の勝ちとし、手続きは終了とする。

としてゲームを行うことにする。このとき、 A に必勝戦略があるような最大の n の値を求めよ。つまり、 $n = k$ のときは A が必勝、 $n \geq k+1$ のときは B が必勝となるような k の値を求めよ。

(注) 「 A に必勝戦略がある」とは、 B がどのような戦略を取っても、 A がそれに適切に対応すれば勝てるということである。

以下は $n = 3$ におけるゲームの手続きの一例である（正六角形の頂点に、時計回りに 1 から 6 の番号をつけている）。

- 1 回: A は色 1 を指定し、 B は頂点 1 を塗る。
- 2 回: A は色 2 を指定し、 B は頂点 6 を塗る。
- 3 回: A は色 4 を指定し、 B は頂点 5 を塗る。
- 4 回: A は色 2 を指定し、 B は頂点 2 を塗る。
- 5 回: A は色 5 を指定し、 B は頂点 3 を塗る。
- 6 回: A は色 1 を指定し、 B は頂点 4 を塗る。



(II) のルールの下では 6 回の手続きが終了した段階で A の勝ち、(II)' のルールの下では 6 回の手続きが終了した段階で B の勝ちである。