「平成 28 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

1. 次の各問に答えよ。

(1) 数字 $1,2,3,4,5,6$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 6 桁の数は平方数ではないことを示せ。

(2) 数字 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ のそれぞれをちょうど 1 回使ってできる 9 桁の数のうち，99 の倍数となるもので最小のものを求めよ。

2. 平面上で 1 辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形 T と半径 1 の円板 D を共通部分 $T \cap D$ の面積が最大となるように置く。このとき共通部分 $T \cap D$ の面積を求めよ。

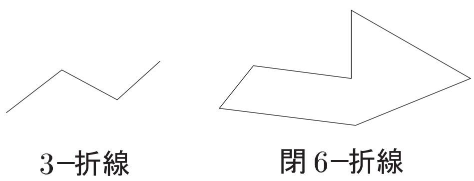
3. 次の各問に答えよ。

(1) 7 桁の数 $N_7 = 1111111$（百十一万千百十一）を 7 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 32 桁の数 $N_{32} = \underbrace{111\cdots1}_{32}$ を 32 で割ったときの余りを求めよ。

(3) 2016 桁の数 $N_{2016} = \underbrace{111\cdots1}_{2016}$ を 2016 で割ったときの余りを求めよ。

4. 平面上で n 本の線分を繋いでできる折線を <u>n–折線</u> といい，n–折線の端と端が繋がっているとき <u>閉 n–折線</u> という。
また，n–折線を作っている n 本の線分を <u>成分</u> とよぶとき，次の各問に答えよ。



(1) 平面上に同一直線上にない 3 点 A, B, C がある。このとき，平面上の閉 3–折線で，3 つの成分の中点が 3 点 A, B, C となるものが存在することを示せ。

(2) どの 3 点も同一直線上にない 4 点 A, B, C, D で，どのように閉 4–折線をとってもその 4 つの成分の中点が 4 点 A, B, C, D となり得ないものが存在することを証明せよ。

(3) (1),(2) や 5 点の場合などを考察して一般化した命題を作り，その主張が正しいことを証明せよ。

5. n は 2 以上の自然数とする。全員が同じ組に入る場合は除くとして，n 人を 2 つの組に分ける場合の数は，2^n-2（通り）と表すことができる。一方，この場合の数は ${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}$（通り）とも表すことができる。すなわち，以下の等式①が成り立つ。

$$2^n-2={}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

次の各問に答えよ。

(1) 上記の下線部のように場合の数を表すことができる理由を説明せよ。

(2) r は自然数で，$1 \leqq r \leqq n$ とする。
2 数 ${}_n\mathrm{C}_{r-1}$，${}_n\mathrm{C}_r$ のそれぞれを 2 で割ったときの
余りが等しいとき，${}_{n+1}\mathrm{C}_r$ は偶数
余りが異なるとき，${}_{n+1}\mathrm{C}_r$ は奇数
であることを証明せよ。ただし，証明のために必要な等式・不等式があれば，それもあわせて証明すること。

(3) ①の右辺の各項 ${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，${}_n\mathrm{C}_3$，$\cdots$，${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ の値について調べる。
$n=8$ のとき，これらの値はすべて偶数である。
$n=7$ のとき，これらの値はすべて奇数である。
$n=6$ のとき，これらの値は偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返す。
このように，${}_n\mathrm{C}_1$，${}_n\mathrm{C}_2$，${}_n\mathrm{C}_3$，$\cdots$，${}_n\mathrm{C}_{n-1}$ の値が偶数，奇数，偶数，奇数，$\cdots$ と交互に繰り返すための必要十分条件は，$n=2^k-2$（k は 2 以上の自然数）であることを証明せよ。