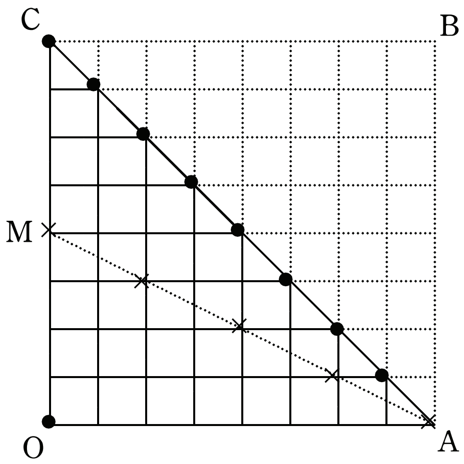
「平成 29 年度高知県高等学校数学コンクール 問題」

**1**　△ABC において，辺 AC 上に点 D をとり，辺 AB 上に点 E をとる。

$$\angle\mathrm{CBD} = 60^\circ,\ \angle\mathrm{EBD} = 20^\circ,\ \angle\mathrm{BCE} = 50^\circ,\ \angle\mathrm{ECD} = 30^\circ$$

であるとき，∠CED の大きさを求めよ。

**2**　(1) 下図のようなマス目からなる正方形 OABC がある。点 M は線分 OC の中点である。点 O からマス目に沿って対角線 AC 上の点に到達する最短経路のうち，線分 AM 上の×の点を通らないものは何通りあるか。

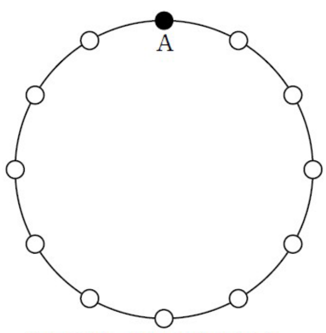



(2) (1) では正方形の 1 辺が 8 であったが，一般に 1 辺を $2n$ とすると何通りになるか。

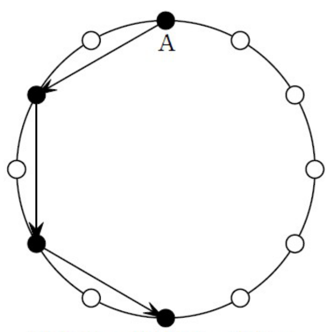
**3**　円周上に $U$ 個のオセロの石を，白色を表面として重ならないように並べ，いずれか 1 個の石を裏返して，スタート地点 A とする。[**図 1** 参照]

点 A から順に，反時計回りに数えて $n$ 個目の石を裏返すということを続ける。[**図 2** 参照]

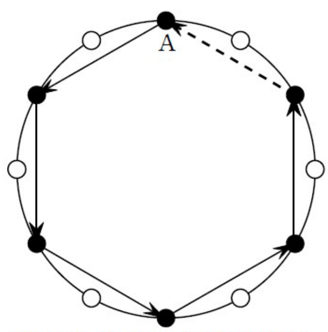
次の石の表面がすでに黒色であればこの操作を終える。このとき，表面が黒色の石の合計を $T_n$ とする。[**図 3** 参照] 次の問いに答えよ。




[図 1] $U$=12 のときの石を並べた状態。




[図 2] $n=2$ のとき，数えて 2 個目の石を順次裏返す。




[図 3] 次の石が黒色のため終了。この場合，$T_2=6$ である。

(1) $U = 12,\ 2 \leqq n \leqq 10$ とする。$T_n = 12$ を満たす最大の自然数 $n$ を求めよ。

(2) $U = 100,\ 2 \leqq n \leqq 98$ とする。$T_n = 100$ を満たす自然数 $n$ は全部で何個あるか。ただし，推測ではなく，その根拠を示した上で答えよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 $N$ を 10 進法で書いたとき，$N$ の各位の数の平方の和を $f(N)$ とする。例えば $N = 2017$ に対して $f(N) = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 7^2 = 54$ である。この操作を有限回繰り返し，ループに入ったら（つまり同じ数が 2 回得られたら）そこで終了する。例えば $N = 2217$ から始めると

$$2217 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$$

となり，58 から 58 へのループが得られる。次の問いに答えよ。

(1) $N = 2017$ からはじめたとき，ループに入ることを確かめよ。

(2) どの自然数から始めても，必ず 1 桁の数を含むループが得られることを示せ。また，ループに現れる 1 桁の数をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 自然数の組 $(l, m, n)$ は，1 つの角が $120^\circ$ であるような 3 角形の 3 辺の長さの組で $l < m < n$ なるものとする。 $k = l + m - n$ とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

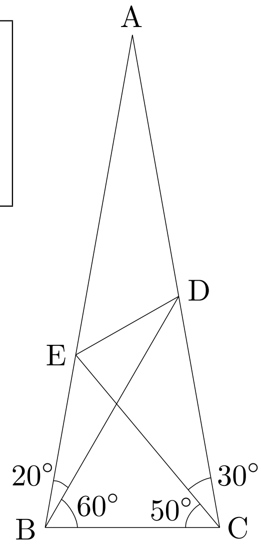
(1) $lm - 2(l + m)k + k^2 = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $k = 7$ のとき, $(l, m, n)$ の組をすべて求めよ。

(3) $l$ のとり得る値を求めよ。

**1**

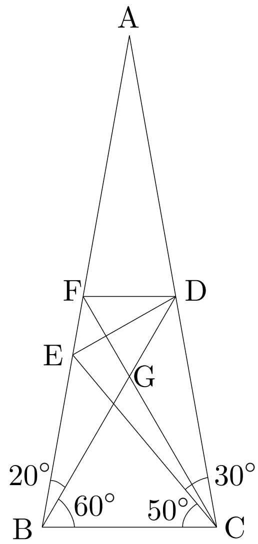
> $\triangle$ABC において，辺 AC 上に点 D をとり，辺 AB 上に点 E をとる。
>
> $$\angle \mathrm{CBD} = 60^\circ, \angle \mathrm{EBD} = 20^\circ, \angle \mathrm{BCE} = 50^\circ, \angle \mathrm{ECD} = 30^\circ$$
>
> であるとき， $\angle$CED の大きさを求めよ。




解説

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB} = 80^\circ$$

だから $\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形である。
辺 AB 上に点 F をとり FD と BC が平行になるようにする。
さらに，線分 FC と DB の交点を G とする。
このとき， $\triangle \mathrm{FBC} \equiv \triangle \mathrm{DCB}$ が成り立つ。




実際，点 F のとり方から $\triangle$AFD は AF = AD の二等辺三角形になるので， FB = AB − AF = AC − AD = DC が成り立つ。
$\triangle$FBC と $\triangle$DCB において

$$\mathrm{FB} = \mathrm{DC}, \mathrm{BC} = \mathrm{CB}, \angle \mathrm{FBC} = \angle \mathrm{DCB} = 80^\circ$$

が成り立つ。
２辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので $\triangle \mathrm{FBC} \equiv \triangle \mathrm{DCB}$ が成り立つ。

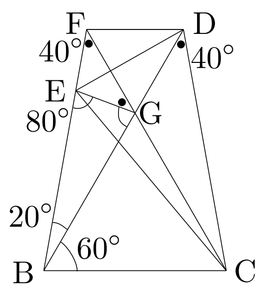
従って， $\angle \mathrm{FCB} = \angle \mathrm{DBC} = 60^\circ$ となる。 $\triangle$GBC に着目すると

$$\angle \mathrm{GBC} = \angle \mathrm{GCB} = 60^\circ$$

から， $\angle \mathrm{BGC} = 60^\circ$ が得られ，$\triangle$GBC が正三角形であることがわかる。
よって，

$$\mathrm{BG} = \mathrm{BC} \cdots ①$$

が成り立つ。




一方， $\triangle$BCE において $\angle \mathrm{BEC} = 180^\circ - (60^\circ + 20^\circ + 50^\circ) = 50^\circ$ から $\triangle$BCE は BC = BE の二等辺三角形である。 ① 式と合わせると

$$\mathrm{BG} = \mathrm{BE}$$

が得られる。 $\triangle$BGE は頂角 $\angle \mathrm{GBE} = 20^\circ$ の二等辺三角形だから

$$\angle \mathrm{BGE} = \angle \mathrm{BEG} = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

となる。

従って，

$$\angle \mathrm{EGF} = 180^\circ - (\angle \mathrm{CGB} + \angle \mathrm{BGE}) = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$$

となることがわかる。$\triangle \mathrm{EGF}$ において

$$\angle \mathrm{EFG} = \angle \mathrm{BEG} - \angle \mathrm{EGF} = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ = \angle \mathrm{EGF}$$

となるので，$\triangle \mathrm{EGF}$ は

$$\mathrm{EG} = \mathrm{EF} \cdots ②$$

の二等辺三角形である。

また，平行線の錯角は等しいので，$\angle \mathrm{GFD} = \angle \mathrm{GCB} = 60^\circ$ となる。同様にして，$\angle \mathrm{GDF} = 60^\circ$ も得られるので，$\triangle \mathrm{GDF}$ も正三角形である。よって，

$$\mathrm{DG} = \mathrm{DF} \cdots ③$$

が成り立つ。

$\triangle \mathrm{GDE}$ と $\triangle \mathrm{FDE}$ において，② 式と ③ 式 および DE が共通であることから 3 辺がそれぞれ等しいことがわかるので，$\triangle \mathrm{GDE} \equiv \triangle \mathrm{FDE}$ が得られる。従って，

$$\angle \mathrm{GDE} = \angle \mathrm{FDE} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{GDF} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

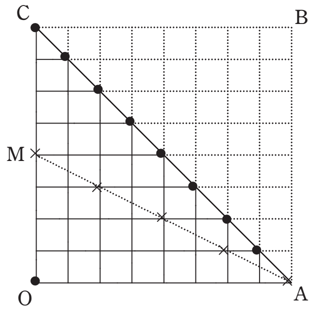
となる。すなわち，$\angle \mathrm{BDE} = 30^\circ$ が成り立つ。

$\angle \mathrm{CDB} = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ + 30^\circ) = 40^\circ$ に注意すると，$\triangle \mathrm{CDE}$ において

$$\angle \mathrm{CED} = 180^\circ - (\angle \mathrm{ECD} + \angle \mathrm{CDB} + \angle \mathrm{BDE}) = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ + 30^\circ) = 80^\circ \cdots (\text{答})$$

が得られる。

2 （1）下図のようなマス目からなる正方形 OABC がある。点 M は線分 OC の中点である。点 O からマス目に沿って対角線 AC 上の点に到達する最短経路のうち、線分 AM 上の×の点を通らないものは何通りあるか。




（2）（1）では正方形 OABC の 1 辺が 8 であったが、一般に 1 辺を $2n$ とすると何通りになるか。

■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □

みなさんの解答から

1 辺が $2n$ の正方形での条件をみたす経路の総数を $a_n$ として、以下の 解 1 ～ 解 3 のような解法がみられました。

解 1　階差数列の利用

$$\begin{cases} a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n) \quad (n=1,2,\cdots) \\ a_1=1,\ a_2=5 \end{cases}$$

→ 一般項 $a_n$ を求めてみましょう。

解 2　2 項間漸化式の利用

$$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+1 \quad (n=1,2,\cdots) \\ a_1=1 \end{cases}$$

→ 一般項 $a_n$ を求めてみましょう。

解 3　多項間漸化式の利用

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n+a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+2^3a_{n-3}+\cdots+2^{n-1}a_1+2^n \quad (n=1,2,\cdots) \\ a_1=1 \end{cases}$$

$$\left( \begin{cases} a_{n+1}=2a_n+\sum_{k=0}^{n-1}2^k a_{n-k}+2^n \quad (n=1,2,\cdots) \\ a_1=1 \end{cases} \right)$$

→ $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n+2^2a_{n-1}+2^3a_{n-2}+\cdots+2^n a_1+2^{n+1}$ ⋯①

$a_{n+1}=\qquad 3a_n+2a_{n-1}+2^2a_{n-2}+\cdots+2^{n-1}a_1+2^n$ ⋯②

①−②×2 より $a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_{n+1}-4a_n$ から $a_{n+2}-5a_{n+1}+4a_n=0$ であり $a_2=3a_1+2^1=5,\ a_1=1$ とをあわせて一般項 $a_n$ を求めると⋯

■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □ ■ □

解説

×を通らない経路を考えるより、×を通る経路を考える方がラクです。

実際、1 辺が 8 の正方形で ×を通る(＝条件をみたさない)最短経路の総数 $b_4$ は右図で、例えば点 P を通る最短経路が ${}_5C_3\cdot 2^3$ 通りとわかることから

$b_4={}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4$

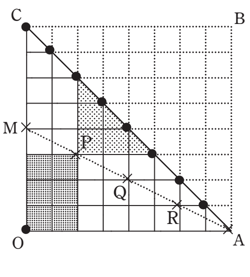
と簡単にわかります。

したがって、条件をみたす経路の総数 $a_4$ は、

$a_4=2^8-({}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4)$

とわかります。

そこで $\{b_n\}$ について考えていくことにしましょう。




意外性 1　偶数のときだけでなく、奇数も含めて考えてみよう。

$\{b_n\}$ を何項か書き出してみると

★ $b_1={}_2C_0\cdot 2^0+{}_1C_1\cdot 2^1$

★ $b_2={}_4C_0\cdot 2^0+{}_3C_1\cdot 2^1+{}_2C_2\cdot 2^2$

★ $b_3={}_6C_0\cdot 2^0+{}_5C_1\cdot 2^1+{}_4C_2\cdot 2^2+{}_3C_3\cdot 2^3$

★ $b_4={}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4$

となりますが、これらに加えて

☆ ${}_1C_0\cdot 2^0$

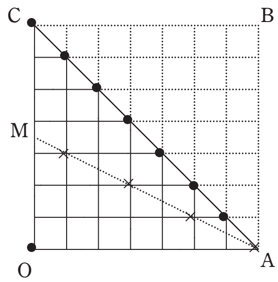
☆ ${}_3C_0\cdot 2^0+{}_2C_1\cdot 2^1$

☆ ${}_5C_0\cdot 2^0+{}_4C_1\cdot 2^1+{}_3C_2\cdot 2^2$

☆ ${}_7C_0\cdot 2^0+{}_6C_1\cdot 2^1+{}_5C_2\cdot 2^2+{}_4C_3\cdot 2^3$

も考えることにします。

1 辺が $2n$ の正方形で × を通る(＝条件をみたさない)最短経路の総数が $b_n$ ですが、$b_n=B_{2n}$ と考え、奇数項目も含めて $\{B_N\}$ $(N=1,2,\cdots)$ を考えることにします(右図は 1 辺が 7 の正方形で $B_7$ は 図の × を通る最短経路の総数を表します)。




実際に $\{B_N\}$ を書き出してみると

☆ $B_1={}_1C_0\cdot 2^0$

★ $B_2={}_2C_0\cdot 2^0+{}_1C_1\cdot 2^1(=b_1)$

☆ $B_3={}_3C_0\cdot 2^0+{}_2C_1\cdot 2^1$

★ $B_4={}_4C_0\cdot 2^0+{}_3C_1\cdot 2^1+{}_2C_2\cdot 2^2(=b_2)$

☆ $B_5={}_5C_0\cdot 2^0+{}_4C_1\cdot 2^1+{}_3C_2\cdot 2^2$

★ $B_6={}_6C_0\cdot 2^0+{}_5C_1\cdot 2^1+{}_4C_2\cdot 2^2+{}_3C_3\cdot 2^3(=b_3)$

☆ $B_7={}_7C_0\cdot 2^0+{}_6C_1\cdot 2^1+{}_5C_2\cdot 2^2+{}_4C_3\cdot 2^3$

★ $B_8={}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4(=b_4)$

です。

一般に

$$B_N={}_NC_0\cdot 2^0+{}_{N-1}C_1\cdot 2^1+\cdots+{}_{N-\left[\frac{N}{2}\right]}C_{\left[\frac{N}{2}\right]}\cdot 2^{\left[\frac{N}{2}\right]} \quad \cdots◆$$

$$=\sum_{k=0}^{\left[\frac{N}{2}\right]}{}_{N-k}C_k\cdot 2^k$$

となります。$B_N$ の一般項を求めていくことにします。

意外性 2　面倒なようで意外と簡単な関係

$\{B_N\}$ を 2 項ずつ書き並べてみると

$B_1=\qquad {}_1C_0\cdot 2^0$

$B_2={}_2C_0\cdot 2^0+{}_1C_1\cdot 2^1$

$B_2=\qquad {}_2C_0\cdot 2^0+{}_1C_1\cdot 2^1$

$B_3={}_3C_0\cdot 2^0+{}_2C_1\cdot 2^1$

$B_3=\qquad {}_3C_0\cdot 2^0+{}_2C_1\cdot 2^1$

$B_4={}_4C_0\cdot 2^0+{}_3C_1\cdot 2^1+{}_2C_2\cdot 2^2$

$B_4=\qquad {}_4C_0\cdot 2^0+{}_3C_1\cdot 2^1+{}_2C_2\cdot 2^2$

$B_5={}_5C_0\cdot 2^0+{}_4C_1\cdot 2^1+{}_3C_2\cdot 2^2$

$B_5=\qquad {}_5C_0\cdot 2^0+{}_4C_1\cdot 2^1+{}_3C_2\cdot 2^2$

$B_6={}_6C_0\cdot 2^0+{}_5C_1\cdot 2^1+{}_4C_2\cdot 2^2+{}_3C_3\cdot 2^3$

です。ここで、一般に ${}_NC_k+{}_NC_{k+1}={}_{N+1}C_{k+1}$ が成り立つことを考えると、$N$ の偶奇に関わらず関係式 $B_{N+2}=B_{N+1}+2B_N$ $(N=1,2,\cdots)$ が成り立つことがわかります。

# 2017. 高知県高等学校数学コンクール　大問 2 $\boxed{\text{解説}}$ その2

$B_1=1,\ B_2=3$ であることと合わせて 3 項間漸化式

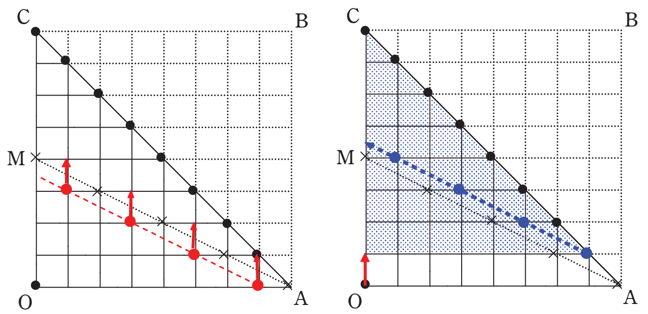
$$\begin{cases} B_{N+2}=B_{N+1}+2B_N & (N=1,2,\cdots) \\ B_1=1,\ B_2=3 \end{cases}$$

を解くことで $B_N=\dfrac{2^{N+1}-(-1)^{N+1}}{3}$ が得られ、$A_N=2^N-A_N=\dfrac{2^N-(-1)^N}{3}$ が得られます。

したがって、$a_n=A_{2n}=\dfrac{4^n-1}{3}$ がわかります。

$\boxed{\text{意外性 3}}$ $A_N$ と $B_N$ の関係

ところで、$A_N$ と $B_N$ をよく見ると結果的に $B_N=A_{N+1}\ (A_N=B_{N-1})$ となっています。
そこで元に戻って、よくよく考えてみると(下図)、この関係式の成立はほぼ自明（？）であることがわかります。




そこで、$A_N+B_N=2^N$ の関係式とあわせると

$$\begin{cases} A_{N+1}=-A_N+2^N & (N=1,2,\cdots) \\ A_1=1 \end{cases}$$

がわかり、この 2 項間漸化式を解いて($A_{N+1}-\dfrac{2^{N+1}}{3}=-\left(A_N-\dfrac{2^N}{3}\right)$ と変形することで簡単に解ける) $A_N=\dfrac{2^N-(-1)^N}{3}$ とわかります。

$\boxed{\text{意外性 4}}$ 【 おまけ 】… $B_N$ のもうひとつの顔

さて、$B_N$ は

$$\begin{aligned} B_N &= \frac{2^{N+1}-(-1)^{N+1}}{3} \\ &= \frac{2^{N+1}-(-1)^{N+1}}{2-(-1)} \\ &= 2^N+(-1)\cdot 2^{N-1}+(-1)^2\cdot 2^{N-2}+(-1)^3\cdot 2^{N-3}+\cdots+(-1)^N\cdot 2^0 \\ &= 2^N-2^{N-1}+2^{N-2}-2^{N-3}+\cdots+(-1)^N\cdot 2^0 \quad \cdots\Diamond \end{aligned}$$

と式変形できます。

したがって、◆, ◇ から

$${}_NC_0\cdot 2^0+{}_{N-1}C_1\cdot 2^1+\cdots+{}_{N-\left[\frac{N}{2}\right]}C_{\left[\frac{N}{2}\right]}\cdot 2^{\left[\frac{N}{2}\right]} \quad =2^N-2^{N-1}+2^{N-2}-2^{N-3}+\cdots+(-1)^N\cdot 2^0$$

が成り立ちます。一見、ピンときませんが、例えば $N=8$ のとき

◆ ${}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4=1+14+60+80+16=171$

◇ $2^8-2^7+2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1+2^0=256-128+64-32+16-8+4-2+1=171$

で、確かに

$${}_8C_0\cdot 2^0+{}_7C_1\cdot 2^1+{}_6C_2\cdot 2^2+{}_5C_3\cdot 2^3+{}_4C_4\cdot 2^4=2^8-2^7+2^6-2^5+2^4-2^3+2^2-2^1+2^0$$

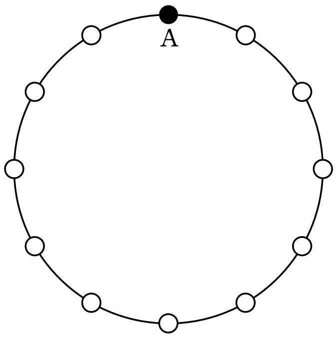
が成り立っています。

$\boxed{3}$

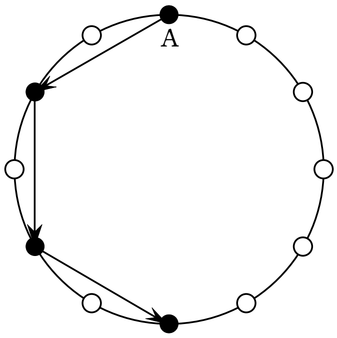
円周上に $U$ 個のオセロの石を，白色を表面として重ならないように並べ，いずれか 1 個の石を裏返して，スタート地点 A とする。[**図 1 参照**]

点 A から順に，反時計回りに数えて $n$ 個目の石を裏返すということを続ける。[**図 2 参照**]

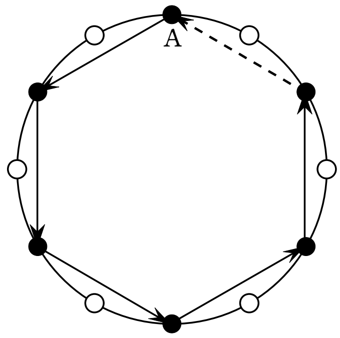
次の石の表面がすでに黒色であればこの操作を終える。このとき，表面が黒色の石の合計個数を $T_n$ とする。[**図 3 参照**]




[図 1 ] $U=12$ のときの石を並べた状態。




[図 2 ] $n=2$ のとき，数えて 2 個目の石を順次裏返す。




[図 3 ] 次の石が黒色のため終了。この場合，$T_2=6$ である。

(1) $U=12$，$2 \leqq n \leqq 10$ とする。$T_n=12$ を満たす最大の自然数 $n$ を求めよ。

(2) $U=100$，$2 \leqq n \leqq 98$ とする。$T_n=100$ を満たす自然数 $n$ は全部で何個あるか。ただし，推測ではなく，その根拠を示したうえで答えよ。

[解答]

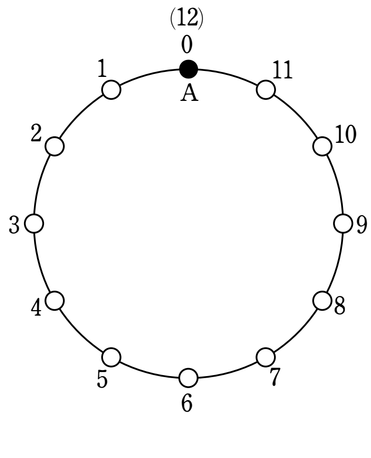
※以下，$k=0$，1，2，3，…… とする。

(1) 右図のように，点 A を 0 として，反時計回りに石に番号をつける。反時計回りに $n$ 進むことと，時計回りに $U-n$ 進むことは等しいため，一般的に等式 $T_n=T_{U-n}$ が成り立つ。

よって，$12 \div 2=6$ より，$n=2,3,4,5,6$ の場合について調べれば十分である。

$n$ が 12 の約数のとき，$T_n<12$ となることは明らかである。よって，それを除くと，$n=5$ しかない。このとき，回転の 1 周目は $5k$，2 周目は $5k+3$，3 周目は $5k+1$，4 周目は $5k+4$，5 周目は $5k+2$ の番号の石が裏返される。

したがって，$T_5=T_7=12$ であり，最大の自然数 $n$ は，$n=7$ である。



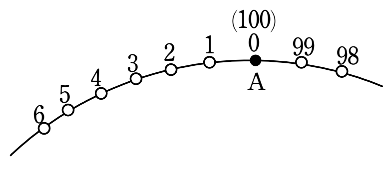

(2) (1) と同様に，石に番号をつける。$100 \div 2=50$ より，$n=2,3,4,\cdots\cdots,50$ の場合について調べれば十分である。

例えば，$n=7$ のとき，回転の

1 周目は $7k$，2 周目は $7k+5$，3 周目は $7k+3$，

4 周目は $7k+1$，5 周目は $7k+6$，6 周目は $7k+4$，

7 周目は $7k+2$



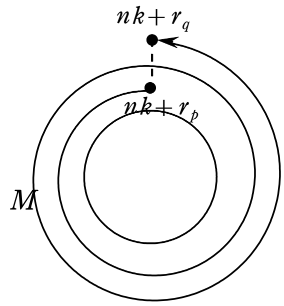
の番号の石が裏返される。すなわち，7 周で番号 $7k, 7k+1, 7k+2, \cdots\cdots, 7k+6$ の石が裏返されるため，$T_7=100$ である。

上の例を元に推測を立て，
『$n$ が素因数 2 と 5 を含まない自然数（すなわち，$n$ が 100 と互いに素）であるときに限り，$n$ 周で $nk, nk+1, nk+2, \cdots\cdots, nk+(n-1)$ の番号の石が裏返され，$T_n=100$ である』……(*)
が成り立つことを証明する。

$p$ 周目，$q$ 周目に裏返される石の番号をそれぞれ $nk+r_p$，$nk+r_q$（ただし，$p<q$，$0\leqq r_p<n$，$0\leqq r_q<n$）とする。初めて $r_p=r_q$ が成り立ったとき，裏返す操作が終わる。
操作が終わったとき，番号 $nk+r_p$ から $nk+r_q$ への移動量を $M$ とすると，$M=100(q-p)$ であり，$M$ は $n$ の倍数でもある。すなわち，自然数 $a$ を用いて

$$M=na=100(q-p) \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。ここで，$n$ と 100 が互いに素であれば，$a$ は 100 の倍数であるから，自然数 $b$ を用いて，$a=100b$ と表され，$M=100nb$ となる。




この最小値は $b=1$ のとき，$M=100n$ であり，移動量が $n$ 周であることを表す。したがって，$n$ と 100 が互いに素であれば，$n$ 周するまでに操作は終わらないため，$nk, nk+1, nk+2, \cdots\cdots, nk+(n-1)$ の番号の石はすべて裏返され，必ず $T_n=100$ となる。

また，$n$ と 100 が互いに素でなければ，その最大公約数を $g$ として，$n=gn'$，$100=gU'$（ただし，$n'$ と $U'$ は互いに素）とおくことができ，①より

$$M=gn'a=gU'(q-p)$$
$$n'a=U'(q-p)$$

このとき，$a$ は 100 よりも小さい 100の約数 $U'$ の倍数となり，上と同様の考え方から，最小値は

$$M=U'n<100n$$

である。よって，移動量は $n$ 周未満となり，$n$ 周するまでに操作が終わるため，石がすべて裏返されることはない。

したがって，(*)が成り立つ。

素因数 2 と 5 を含まない 50 以下の自然数を書き出すと

3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49

の 19 個ある。
ゆえに，$T_n=100$ を満たす自然数 $n$ は全部で 38 個ある。

## 問題

$\boxed{4}$　自然数 $N$ を 10 進法でかいたとき, $N$ の各位の数の平方の和を $f(N)$ とする. 例えば $N = 2017$ に対して $f(N) = 2^2 + 0^2 + 1^2 + 7^2 = 54$ である. この操作を有限回繰り返し, ループに入ったら（つまり同じ数が 2 回得られたら）そこで終了する. 例えば $N = 2217$ から始めると

$$2217 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58$$

となり, 58 から 58 へのループが得られる. 次の問いに答えよ.

(1) $N = 2017$ からはじめたとき, ループに入ることを確かめよ.

(2) どの自然数から始めても, 必ず 1 桁の数を含むループが得られることを示せ. また, ループに現れる 1 桁の数をすべて求めよ.

## 解答

(1) 2017 からはじめると

$$\begin{aligned} 2017 &\to 54 \to 41 \to 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \\ &\to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \end{aligned}$$

となり, 89 を含むループが得られる.

(2) 10 進法で 0〜9 の数字 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(a_1 \neq 0)$ を順に並べてできる $m$ 桁の数

$$N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \cdots + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$$

を $\overline{a_1 a_2 \cdots a_m}$ とかくことにする. このとき

$$N \geqq 10^{m-1} \quad \cdots ①$$

である. 一方 $a_i^2 \leqq 9^2 < 100$ $(1 \leqq i \leqq m)$ だから

$$f(N) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 < 100m \quad \cdots ②$$

である.

まず

$$N \geqq 100 \quad \Longrightarrow \quad f(N) < N \tag{$\star$}$$

が成り立つことを示す.

(i) $m \geqq 4$ のとき

①, ② より

$$\frac{f(N)}{N} < \frac{100m}{10^{m-1}} = \frac{m}{10^{m-3}}$$

である. $A_m = \dfrac{m}{10^{m-3}}$ とおくと

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{m+1}{10^{m-2}} \cdot \frac{10^{m-3}}{m} = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leqq \frac{1}{10} \cdot 2 = \frac{1}{5} < 1$$

であるから $A_{m+1} < A_m$. よって $A_m$ は $m$ について単調減少であるから

$$A_m \leqq A_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} < 1$$

となる. したがって $\dfrac{f(N)}{N} < 1$ なので $f(N) < N$.

(ii) $m = 3$ のとき

$N = \overline{abc}$ $(a \geqq 1)$ とかける.

② より $f(N) < 300$ だから, $a \geqq 3$ のとき $f(N) < N$. 次に $a = 2$ のとき

$$f(N) \leqq 2^2 + 9^2 + 9^2 = 166 < 200 \leqq N$$

である. 最後に $a = 1$ のとき, $N = \overline{1bc} = 100 + 10b + c$ より

$$N - f(N) = (100 + 10b + c) - (1^2 + b^2 + c^2) = 99 + b(10 - b) + c - c^2.$$

$0 \leqq b, c \leqq 9$ より $b(10 - b) \geqq 0$, $c^2 \leqq 81$ だから

$$N - f(N) \geqq 99 - 81 = 18 > 0.$$

よって $f(N) < N$.

以上より $(\star)$ が成り立つことがわかる [1]. したがって, 任意の自然数 $N$ に対して, 有限回操作 $f$ を施すことにより 2 桁以下の数が得られる. よって 2 桁以下の数についてのみ調べればよい.

自然数 $M$ から操作 $f$ の有限回の繰り返しによって 1 桁の数を含むループが得られると既にわかっているとき, $M \rightsquigarrow$ (ループ) とかく. また, $N = 10a + b$ $(0 \leqq a, b \leqq 9)$ に対して, 1 の位と 10 の位を入れかえた数を $N' = 10b + a$ とするとき $N \leftrightarrow N'$ とかくことにする. $f(N) = f(N')$ だから, $N' \rightsquigarrow$ (ループ) なら $N \rightsquigarrow$ (ループ) である. したがって, $a \leqq b$ の場合だけ考えればよい.

[1] $m \geqq 4$ については, 数学的帰納法によって $100m < 10^{m-1}$ $(m \geqq 4)$ を示してもよい.

まず 1 桁の数に対しては

$$
\begin{aligned}
&1 \to 1, \quad 2 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4, \\
&3 \to 9 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&5 \to 25 \to 29 \to 85 \leftrightarrow 58 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&6 \to 36 \to 45 \to 41 \to 17 \to 50 \to 25 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1 \to 1, \\
&8 \to 64 \to 52 \to 29 \rightsquigarrow \text{（ループ）},
\end{aligned}
$$

となり, 1 か 4 を含むループが得られる（9 は 3 から始まる列にある）. 次に 30 以下の数のうち, 残っているものに対しては

$$
\begin{aligned}
&11 \to 2 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 12 \to 5 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 13 \to 10 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&15 \to 26 \to 40 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 19 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&22 \to 8 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 23 \to 13 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 26 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&27 \to 53 \to 34 \to 25 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 28 \leftrightarrow 82 \rightsquigarrow \text{（ループ）}
\end{aligned}
$$

となり, 1 か 4 を含むループが得られる. 以上の列からループに至るとわかった 2 桁の数は次の表の斜線で消した数である:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~11~~ | ~~12~~ | ~~13~~ | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | ~~17~~ | ~~18~~ | ~~19~~ |
| | ~~22~~ | ~~23~~ | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | ~~29~~ |
| | | **33** | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | ~~37~~ | **38** | **39** |
| | | | **44** | ~~45~~ | ~~46~~ | **47** | **48** | ~~49~~ |
| | | | | **55** | ~~56~~ | **57** | ~~58~~ | **59** |
| | | | | | **66** | **67** | ~~68~~ | **69** |
| | | | | | | **77** | **78** | ~~79~~ |
| | | | | | | | **88** | ~~89~~ |
| | | | | | | | | **99** |

残った数については以下のとおり:

$$
\begin{aligned}
&33 \to 18 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 38 \to 73 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 39 \to 90 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&44 \to 32 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 47 \to 65 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 48 \to 80 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&55 \to 50 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 57 \to 74 \leftrightarrow 47 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 59 \to 106 \to 37 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&66 \to 72 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 67 \to 85 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 69 \to 117 \to 51 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&77 \to 98 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 78 \to 113 \to 11 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \quad 88 \to 128 \to 69 \rightsquigarrow \text{（ループ）}, \\
&99 \to 162 \to 41 \rightsquigarrow \text{（ループ）}.
\end{aligned}
$$

以上より, どんな自然数から始めても, 必ず 1 か 4 を含むループが得られる.

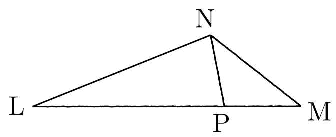
$\boxed{5}$ 自然数の組 $(l, m, n)$ は, 1 つの角が $120°$ であるような 3 角形の 3 辺の長さの組で $l < m < n$ なるものとする. $k = l + m - n$ とおく. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $lm - 2(l + m)k + k^2 = 0$ が成り立つことを示せ.
(2) $k = 7$ のとき, $(l, m, n)$ の組をすべて求めよ.
(3) $l$ のとり得る値を求めよ.

## 解答

(1) 長さ $l, m, n$ の辺に向かい合う頂点をそれぞれ L, M, N とする.

**主張 1** $\angle\mathrm{N} = 120°$




**証明 1** $n > m$ であるから, 長さ $n$ の辺 LM 上に線分 LP の長さが $m$ になるように点 P をとることができる.
すると $\angle\mathrm{NPL} = \angle\mathrm{M} + \angle\mathrm{PNM}$ より, $\angle\mathrm{NPL} > \angle\mathrm{M}$ であることがわかる.
また $\angle\mathrm{N} = \angle\mathrm{LNP} + \angle\mathrm{PNM}$ と $\angle\mathrm{LNP} = \angle\mathrm{LPN}$ より $\angle\mathrm{N} > \angle\mathrm{LPN}$ であることがわかる.
よって $\angle\mathrm{N} > \angle\mathrm{M}$ がわかる. 同様に $\angle\mathrm{N} > \angle\mathrm{L}$ であることもわかるので, 三角形 LMN の内角で最大のものは $\angle\mathrm{N}$ であることがわかる. 三角形 LMN の 1 つの内角が $120°$ で残る 2 つの角はいずれも $60°(= 180° - 120°)$ よりも小さいので, $\angle\mathrm{L} = 120°$ であることが示せた.□

余弦定理により

$$n^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos 120°$$

ここで $k = l + m - n$ より $n = l + m - k$ であり, これを用いて $n$ を消去すれば

$$\begin{aligned}\{(l+m)-k\}^2 &= l^2 + m^2 + lm\\ (l+m)^2 - 2(l+m)k + k^2 &= (l+m)^2 - lm\\ lm - 2(l+m)k + k^2 &= 0\end{aligned}$$

(2) **主張 2** $(l - 2k)(m - 2k) = 3k^2$

**証明 2** (1) より

$$\begin{aligned}lm - 2(l+m)k + k^2 &= 0\\ lm - 2(l+m)k + 4k^2 &= 3k^2\\ (l-2k)(m-2k) &= 3k^2 \square\end{aligned}$$

$3k^2 > 0$ であるから $l - 2k$ と $m - 2k$ は同符号である.

**主張 3** $l - 2k$ と $m - 2k$ はともに正である.

**証明 3** 背理法で示す. $2k - l = u$ , $2k - m = v$ とおき,$u > 0, v > 0$ と仮定する. $l < m$ より $u > v(> 0)$ なので, $u^2 > 3k^2$ よって $u > \sqrt{3}k$. また

$$\begin{aligned}u + v &= 4k - l - m\\ u + v &= 3k - n\\ n &= 3k - u - v\\ m &< 3k - u - v\\ 2k - v &< 3k - u - v\\ u &< k\end{aligned}$$

すると $k > u > \sqrt{3}k > 0$ となり矛盾する. よって $l - 2k > 0$, $m - 2k > 0$.□

$k=7$ とすると

$$(l-14)(m-14)=3\times 7^2$$

$l<m$ なので $(l-14,m-14)=(1,3\times 7^2),(3,7^2),(7,3\times 7)$
よって $(l,m,n)=(15,161,169),(17,63,73),(21,35,49)$

(3) 主張 4　$l$ は $1,2$ をとりえない.

証明 4　主張 3 より $l-2k\geqq 1$ なので $l\geqq 2k+1$ となり $k$ は自然数なので $l\geqq 3$ となる. □

主張 5　3 以上の奇数の倍数は $l$ のとりうる値の集合に含まれる.

証明 5　$(l-2k,m-2k)=(1,3k^2)$ とすると, $l=2k+1$ $(k=1,2,3,\ldots)$ となり, $l$ は 3 以上の奇数をとりうることがわかる. また, 自然数の組 $(l_0,m_0,n_0)$ が, $120°$ の角を持つような 3 角形の 3 辺の長さの組となるとき, $r$ を自然数として $(rl_0,rm_0,rn_0)$ も $120°$ の角を持つような 3 角形の 3 辺の長さの組となるので, 3 以上の奇数の倍数も $l$ のとりうる値の集合に含まれることがわかる.□

あとは 3 以上の自然数で素因数は 2 しか持たないものすなわち $2^j$ $(j=2,3,4,\ldots)$ の形の自然数について調べればよい.

主張 6　$\dfrac{l}{4}<k<\dfrac{l}{2}$

証明 6　主張 3 より $l-2k>0$ なので $l>2k$ よって $k<\dfrac{l}{2}$.
また主張 2 で $l-2k<m-2k$ に注意すると

$$\begin{aligned}(l-2k)(m-2k)=&3k^2\\(l-2k)^2<&3k^2\\l-2k<&\sqrt{3}k<2k\\l<&4k\\\frac{l}{4}<&k\end{aligned}$$

よって主張は示された.□

主張 7　$l$ は $4,8$ をとりえない.

証明 7　$l=4,8$ とすると, $l-2k$ は偶数であり, $3k^2$ は 2 を因数として持つため $k$ は偶数となる. $k=2q$ とおくと主張 6 より $\dfrac{l}{8}<q<\dfrac{l}{4}$ となる. $l=4,8$ のときこのような自然数 $q$ は存在しない. □

主張 8　16 の倍数は $l$ のとりうる値の集合に含まれる.

証明 8　$l=16$ のとき, 主張 6 より $k=6$ となり, $(l,m,n)=(16,39,49)$ となるので $l$ は 16 をとりうる. よって 16 の倍数も $l$ のとりうる値の集合に含まれる.□

結論 9　$l$ のとりうる値は $1,2,4,8$ 以外の全ての自然数である.

証明 9　主張 4 より $l$ は $1,2$ をとりえず, 主張 5 より 3 以上の奇数の倍数すなわち 3 以上の自然数で 2 のべき $2^j$ $(j=2,3,4,\ldots)$ 以外のものは全て $l$ のとりうる値の集合に含まれることがわかる. さらに主張 6 で $l$ は $4,8$ をとりえず, 主張 8 で 16 の倍数はとりうることから, $l$ のとりうる値は $1,2,4,8$ 以外の全ての自然数であることがわかる.□