変位電流は何のために

北野 正雄

京都大学, 応用科学研究所, 大阪大学 QIQB

QUATUO 研究会 第 10 回@高知工科大学 永国寺キャンパス
2024 年 1 月 6–7 日

(もくじ)

変位電流とは

- 電束密度 (電気変位) D の時間微分: $\dfrac{\partial D}{\partial t}$
- 電磁理論完成のための最終ピース
  — マクスウェルの慧眼 (理論的必然性から存在を予言)
- 「光が電気・磁気の擾乱」であることを確信
  — 伝搬速度の理論値 $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$ が光速の実測値と一致
- ヘルツはコンデンサを用いて変位電流を検出する過程で「電波」を発見
- 現代の電磁気学の教科書は, ゴールであるマクスウェル方程式の直前に軽く触れる程度
  — 熱心な教科書は意味を持たせようと誤りに陥ることに

歴史

- 電流の磁気作用の発見 — エルステッド (1820)
  電流のそばに置かれた磁針が振れることに気づく.
- アンペールの法則 (1820)
  静電気のガウスの法則に相当
- ビオ・サバールの式 (1820)
  クーロンの法則に相当
- 「変位電流」 — マクスウェル (1865)
- 光を電磁波と同定 — マクスウェル (1865)
- 電波の発見 — ヘルツ (1888)

変位電流をめぐる論争

- マクスウェルの電磁方程式が整理され普及する一方で，〈変位電流は磁場をつくらない〉という俗説が流布
  — プランクの教科書がきっかけか
- その根拠は，「変位電流が存在する場合であっても，磁場はビオ・サバールの式で実電流だけから計算できる」から．
- 「変位電流がつくる磁場はゼロ」を示したという，誤った計算が論文や教科書に登場するように．
- 何のための変位電流か？ 電磁波はどうする？
- この逆説的な状況に対して様々な賛否の議論が展開．なかなか決着が付かず，教科書や各国の物理教育の学会誌などでも繰り返し取り上げられる．
- 日本でも「変位電流は磁場をつくらない」に多くのページを割いている教科書がある．

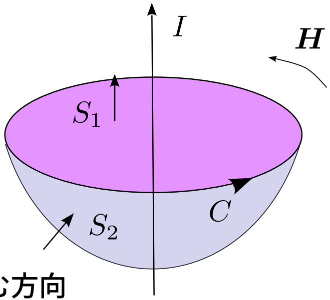
本講演の趣旨

- 磁場を「電流」と「変位電流」に起因するものに分離することは原理的に不可能.
- 「変位電流は磁場をつくるか否か」という設問自体が無意味.
- ビオ・サバールの式には暗黙裡に変位電流の効果が含まれている.
- 参考文献

大学の物理教育 **27**, p. 22 (2021)
大学の物理教育 **27**, p. 104 (2021)
IEICE Trans. Electron. (in press)
`https://arxiv.org/abs/2311.15877v1+`

(もくじ)

アンペールの法則



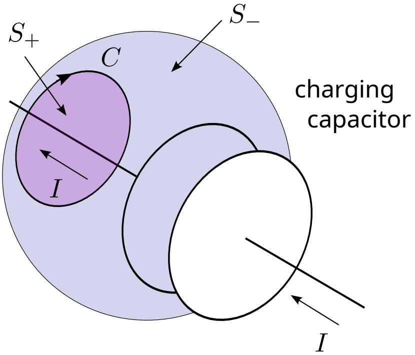
- アンペールの法則
  (curl $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ の積分形)

$$\int_C \boldsymbol{H} \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{S_i} \boldsymbol{J} \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I$$

  閉路 C は曲面 S_i の縁
- 閉路の向きは面の表を左に見ながら進む方向
- 曲面 S_i は閉路 C がその縁でありさえすれば任意. $(\partial S_i = C)$
- 軸対称電流の系では, 磁場が決まる (円筒座標 (ρ, ϕ, z)).

$$2\pi\rho H_\rho = I, \quad (H_\phi = H_z = 0)$$

変位電流の必要性

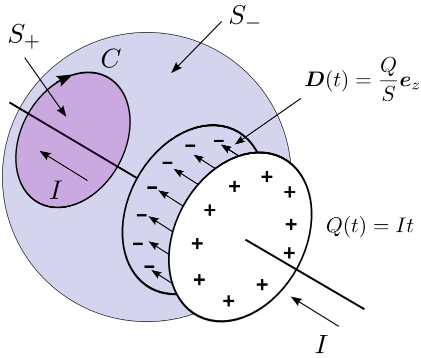


- 一定電流 I で充電中のコンデンサ
- 磁場をアンペールの法則 $\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$ で定めようとすると,

$$I = \int_{S_+} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \neq \int_{S_-} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

- アンペールの法則が成り立たない！

変位電流の必要性 (2)



- 変位電流 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ を考慮すると,

$$\int_{S_-} \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) = I$$

- マクスウェルは磁場と関連で重要なのは, 真電流 (true current) であるとして, 電磁方程式群を完成させた.

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}} := \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Treatise

One of the chief pecurialities of this treatise is the doctrine which it asserts, that the true electric current $\mathfrak{C}$ *(*J_{tot}*), that on which the electromagnetic phenomena depend, is not the same thing as* $\mathfrak{K}$ *(*$\boldsymbol{J}$*), the current of conduction, but that the time variation of* $\mathfrak{D}$ *(*$\boldsymbol{D}$*), the electric displacement, must be taken into account in estimating the total movement of electricity, so that we must write,*

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \dot{\mathfrak{D}}, \qquad \textit{(Equation of True Currents.)}$$

J.C. Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism Vol. 2 (Dover, 1954; Clarendon Press, 1891)

マクスウェル・アンペールの式

- アンペール・マクスウェルの式

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}$$

- 積分型

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- 閉曲線 C に対して, S はそれを境界とする「任意の曲面」でよい. 曲面によらず, 積分が同じ値になるためには, すべての場所で

$$\boxed{\mathrm{div}(\boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}) = 0}$$

非定常電流 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} \neq 0$ の場合, それを打ち消す変位電流が必要.

(もくじ)

「変位電流が磁場をつくるか否か」という問題設定はおかしい

- 磁場が $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{H}_{\partial_t \boldsymbol{D}}$ のように分割可能であることを前提にしている.
- それぞれが満たすべき式は？

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{J}} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{J}, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H}_{\partial_t \boldsymbol{D}} \stackrel{?}{=} \partial_t \boldsymbol{D} \qquad (*)$$

- しかし, 分割した電流の発散は,

$$0 \stackrel{?}{=} \operatorname{div} \boldsymbol{J}, \quad 0 \stackrel{?}{=} \operatorname{div} \partial_t \boldsymbol{D}$$

  であり, 前提条件 (非定常電流) と矛盾する. 何のために, 変位電流を導入したのか分からない.
- 「変位電流がつくる磁場」, 「電流がつくる磁場」といったものは定義できない. — 不可分性

重ね合わせが成り立たない例

- 線形写像 $A: X \to Y$ の値域 (range, image)

$$\mathrm{Im}A = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in X\} \subseteq Y$$

- 線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解 $\boldsymbol{x} \in X$ を持つためには, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}A$ でなければならない.
- たとえ, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in \mathrm{Im}A$ であっても, $\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2 \notin \mathrm{Im}A$ であれば, 重ね合わせは使えない. なぜなら,

$$A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}_1, \quad A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2$$

はいずれも解を持たないから.

- (例)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

正しい分割

- マクスウェル・アンペールの式

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}$$

を重ね合わせで解く場合,

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_1 + \partial_t \boldsymbol{D}_1$$
$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_2 + \partial_t \boldsymbol{D}_2$$

のように, 電流密度だけでなく, 変位電流密度項も分割し,

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{J}_1 + \partial_t \boldsymbol{D}_1) = 0$$
$$\operatorname{div}(\boldsymbol{J}_1 + \partial_t \boldsymbol{D}_1) = 0$$

が成り立つようにする必要がある.

正しいケーキの切り方

(もくじ)

準備 — クーロン場と双極子場

- クーロン場:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) := \frac{\boldsymbol{r}}{4\pi|\boldsymbol{r}|^3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) := -\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) := 0$$

- 原点の電荷 q に対する電束密度

$$\boldsymbol{D}_q(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$$

- 原点の電気双極子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$ の電束密度

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$$

ビオ・サバールの式 (オリジナル版)

- 原点におかれた電流要素 $I\Delta\boldsymbol{l}$ が点 $\boldsymbol{r}$ につくる磁場

$$\Delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = I\Delta\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$$

- 閉路 L を流れる電流 I による磁場は重ね合わせ (積分)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boxed{\oint_L} \mathrm{d}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \boxed{\oint_L} I\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

  $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ は経路 L 上の位置 $\boldsymbol{r}'$ の線要素.
- 要求される条件は, 「L が閉じている」こと, $\partial L = 0$.
- 経路が分断されていると, 端点において $\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = \pm I \neq 0$ となり, 電荷の蓄積が起きる. — 「定常電流条件」の破れ
- 磁場要素は, 閉路について積分してはじめて意味がある — 安全運転

ビオサバールの式と変位電流

- $\Delta \boldsymbol{H}$ の渦[1]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \Delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{\nabla} \times [(I\Delta \boldsymbol{l}) \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})] \\
&= I\Delta \boldsymbol{l}\,[\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})] - (I\Delta \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \\
&= I\Delta \boldsymbol{l}\,\delta^3(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}_{It\Delta \boldsymbol{l}}(\boldsymbol{r}) =: \Delta \boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}
$$

第 1 項は元々の電流要素 $I\Delta \boldsymbol{l}$.

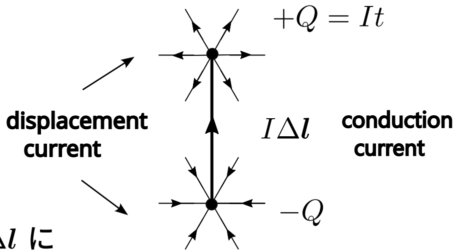
- 第 2 項は原点の電気双極子 $\boldsymbol{p}$ に対する電束密度の時間微分.

$$
\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{p}(t)}(\boldsymbol{r}) = -(\boldsymbol{p}(t) \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{p}(t) = It\Delta \boldsymbol{l}
$$

- 線要素 $\Delta \boldsymbol{l}$ に一定電流 I を流すと, 両端 $\pm\Delta \boldsymbol{l}/2$ に電荷 $\pm Q(t) = \pm It$ が蓄積される. — 電気双極子

[1] 公式 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ を使う.

ビオ・サバールの式 (拡大版)

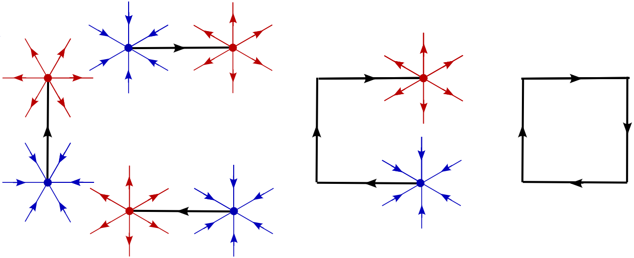


- 全電流 ΔJ_{tot} は定常条件を満たしている.
- 磁場要素 $\Delta \boldsymbol{H}$ は, 電流要素 $I\Delta \boldsymbol{l}$ に変位電流を加えた ΔJ_{tot} が作る磁場である.
- 磁場要素 $\Delta \boldsymbol{H}$ の重ね合わせはマクスウェル・アンペールの式を満たす;

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int_L \mathrm{d}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

「L が閉じている」という当初の制約は不要

電流要素の積分



- 始点 (終点) が $\boldsymbol{r}_1$ ($\boldsymbol{r}_2$) の経路 L について積分すると,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r}) = \int_L \mathrm{d}\boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = I\int_L \mathrm{d}\boldsymbol{l}'\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + I\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\Big|_{\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2}$$

- 電流要素同士を接続 (積分) すると, 向かい合う端点からの変位電流は打ち消しあい, 経路の両端のものだけが残る.
- 閉じた経路では, 変位電流はすべて打ち消し合ってゼロになる.

棒磁石をつないでゆくと, 端部からの磁場が消えてゆくのと同じ

ビオ・サバールのトリック

- ビオ・サバールの式は，$\oint \to \int$ とするだけで，当初の想定を超えて，非定常電流に対しても使える．
- 電流分布 $\boldsymbol{J}$ に対する積分ではあるが，変位電流を含む全電流 $\boldsymbol{J}_{\text{tot}} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\text{disp}}$ が自動的に計算され，それに対する磁場を与えている．
- この「隠されたトリック」が変位電流をめぐる混乱の原因．
- マクスウェルの変位電流導入より，45 年も前のビオ・サバールの式に，その効果が内包されていたのは興味深い事実である．
歴史は一本道を辿っているのではない．

(もくじ)

プランクの教科書 (1)

M. プランク: 理論電気磁気学 (第 2 版) (裳華房, 1939) 83 節. 原著初版は 1922 年.

- ベクトルポテンシャル+マクスウェル・アンペールの式

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boxed{\boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}}$$

- 公式 $\operatorname{curl}\operatorname{curl} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \nabla^2$ を用いて磁場を消去する. クーロン・ゲージ $\boxed{\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0}$ を課すと,

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 (\boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}) \quad \text{ベクトル・ポアソン方程式} \qquad (*)$$

- 解は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \int \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') + \partial_t \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}')}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}v' = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{J}} + \boldsymbol{A}_{\partial_t \boldsymbol{D}}$$

- 項の分解は式 (*) を所与のものとすれば可能 $\quad \nabla^2 \sim |\boldsymbol{k}|^2$

プランクの教科書 (2)

- 電流項:

$$A_J(r) = \mu_0 \int \frac{J(r')}{4\pi|r - r'|} \mathrm{d}v'$$

- 変位電流項: $D = \varepsilon_0 \nabla\phi$ とする. (準静的)

$$A_{\partial_t D}(r) = \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\nabla\partial_t\phi(r')}{4\pi|r - r'|} \mathrm{d}v' = -\nabla\chi(r)$$

$$\chi(r) := c_0^{-2} \int \frac{\partial_t\phi(r')}{4\pi|r - r'|} \mathrm{d}v' \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{V\,s}$$ ゲージ・ポテンシャル

- 渦を計算すると

$$\mathrm{curl}\, A = \mathrm{curl}\, A_J + 0 \quad (= \mu_0 H)$$ ビオ・サバールの式!

プランクの教科書 (3)

- プランクいわく
  「ゆえに開いた電流の場合においても, 磁場の強さは変位電流になんら顧慮することなく, やはり伝導電流のベクトル・ポテンシャルから計算して差し支えない. その際にたとい $\operatorname{div} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{J}}$ がゼロとならなくてもなんら顧慮するに及ばない.」
- 間違ってはいないが 「変位電流は磁場をつくらない」という誤解を与えてしまった.
- 式 (*) の導出過程の前提を破っていることに注意すべき.
  1. $\partial_t \boldsymbol{D} = 0$ とおくと出発の式が成り立たない.
  2. $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{J}}$ はクーロン・ゲージを満たさない.

  その後, 多くの人々がビオ・サバールの式を使って磁場を計算し, 「変位電流は磁場を作らないこと」を〈確認したつもり〉になっている.
- プランクは変位電流の磁気エネルギーへの寄与を計算している.

(もくじ)

ベクトル場のヘルムホルツ分解

一般の 3 次元ベクトル場は，「渦なし場」と「湧出なし場」の和で表される:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{J}_{\mathsf{T}}(\boldsymbol{r})$$

$$\tilde{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{k}) = \tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{k}) + \tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathsf{T}}(\boldsymbol{k}) \quad \text{(フーリエ変換)}$$

渦なし	湧出なし
$\operatorname{curl} \boldsymbol{J}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{r}) = 0$	$\operatorname{div} \boldsymbol{J}_{\mathsf{T}}(\boldsymbol{r}) = 0$
$\boldsymbol{k} \times \tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathsf{L}}(\boldsymbol{k}) = 0$	$\boldsymbol{k} \cdot \tilde{\boldsymbol{J}}_{\mathsf{T}}(\boldsymbol{k}) = 0$
$\boldsymbol{k}$ に平行, 縦場	$\boldsymbol{k}$ に垂直, 横場

ビオ・サバールの磁場が与える電流

- 電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ に対するビオ・サバールの式 (3D)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \int_V \mathrm{d}v' \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

- この磁場の〈渦〉は

$$\mathrm{curl}\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \int_V \mathrm{d}v' (\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

- 第 2 項は電荷の保存則 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \partial_t \varrho(\boldsymbol{r}, t) = 0$ から,

$$\int_V \mathrm{d}v' \partial_t \varrho(\boldsymbol{r}', t) \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \partial_t \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)$$

ビオ・サバールの磁場はマクスウェル・アンペールの式を満たす！

射影演算子

- ベクトル場 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ に新たな (縦) ベクトル場

$$(\hat{L}\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}) := \int \mathrm{d}v'(\boldsymbol{\nabla}'\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}'))\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

  を対応させる線形演算子 $\hat{L}$ を定義する.

- $\hat{L}$ と $\hat{T} := \hat{1} - \hat{L}$ は〈射影演算子〉

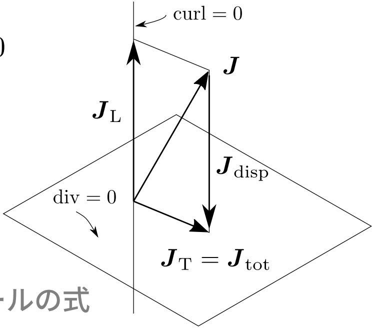
$$\hat{T}^2 = \hat{T}, \quad \hat{L}^2 = \hat{L}, \quad \hat{T}\hat{L} = \hat{L}\hat{T} = 0$$

- ビオ・サバールの磁場の渦は

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \hat{L}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \hat{T}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

- 1 対 1 対応が成り立ち,

$$\boldsymbol{H} = (\mathrm{curl}^{-1} \circ \hat{T})\boldsymbol{J} \quad \text{ビオ・サバールの式}$$



ビオ・サバールの式の機能

- ビオ・サバールの式は電流密度の〈横成分〉

$$\boldsymbol{J}_{\mathsf{T}} = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{J}_{\mathsf{L}}$$

による磁場を与えるものである (2 つの機能).

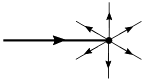
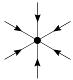
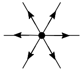
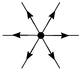
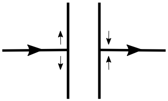
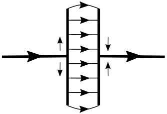
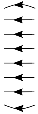
- つまり, 全電流密度

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}} := \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{disp}}$$

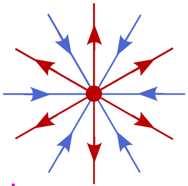
による磁場である.

- 差と和の違いがずいぶん異なった印象を与えている. 電流密度 $\boldsymbol{J}$ に変位電流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{disp}}$ を〈加える〉ことは, 縦成分 $\boldsymbol{J}_{\mathsf{L}}$ の〈打ち消し〉を意味するのである.

電流分布のヘルムホルツ分解の例

	$\boldsymbol{J}$	$=$	$\boldsymbol{J}_{\mathsf{T}}$	$+$	$\boldsymbol{J}_{\mathsf{L}}$
	$\boldsymbol{J}$	$=$	$\boldsymbol{J}_{\text{tot}}$	$+$	$(-\boldsymbol{J}_{\text{disp}})$
微小電流要素	$\boldsymbol{p}\,\delta^3(\boldsymbol{r})$		$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\nabla})\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$		$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$
半直線電流					
球対称電流			0		
コンデンサ					

球対称の電流分布は磁場をつくらない？



- 変位電流を含まないビオ・サバールの式から磁場が計算できることを根拠に電流要素の端点に見られる放射状の「(球対称) 変位電流は磁場を作らない」という誤った主張が流布.
- しかし, 球対称の電流密度 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = I\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ は $\operatorname{div}\boldsymbol{J} = I\delta^3(\boldsymbol{r}) \neq 0$, つまり原点での発散がゼロではないことに注意.
- 多くの (外向き) 半無限電流 の端点を原点に集め, 等方的に束ねた場合, 原点の電荷は $q(t) = -It + q(0)$ で, それによる変位電流は $\partial_t\boldsymbol{D} = -I\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{J}$ となり, 実電流を打ち消している.
- 「球対称電流は, それを打ち消す変位電流を伴っており, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{tot}} = 0$ である結果, 磁場はゼロになる」

  cf. The Feyman Lectures on Physics II, sec. 18-2.

(もくじ)

電磁波と変位電流

一般の場合 ($\partial_t \boldsymbol{D} \neq 0$, $\partial_t \boldsymbol{B} \neq 0$) を考える.

- 磁場は横成分のみ: $\operatorname{div} \boldsymbol{B} \equiv 0 \Rightarrow \boldsymbol{B}_{\mathsf{L}} = 0$
- 電場は縦・横成分を持つ. 縦成分は $\operatorname{div} \boldsymbol{D}_{\mathsf{L}} = \varrho$.
- マクスウェルの残りの式において場の縦成分, 横成分の分別を行う.

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E}_{\mathsf{T}} = -\partial_t \boldsymbol{B}_{\mathsf{T}}$$
$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H}_{\mathsf{T}} = \boldsymbol{J}_{\mathsf{T}} + \partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{T}} + \cancel{\boldsymbol{J}_{\mathsf{L}} + \partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{L}}}$$

電荷保存則 $\operatorname{div}(\boldsymbol{J} + \partial_t \boldsymbol{D}) = 0$ から $\boldsymbol{J}_{\mathsf{L}} + \partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{L}} = 0$.

- $\boldsymbol{J}_{\mathsf{T}}$, $\partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{T}}$ は, いずれも湧き出しがないので, それぞれが磁場を作るといっても構わない (正しい分割).

  変位電流の横成分 $\partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{T}}$ は磁場をつくる.

電磁波

- まとめると,

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_{\mathsf{T}} = -\partial_t \boldsymbol{B}_{\mathsf{T}}$$
$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_{\mathsf{T}} = \partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{T}} + \boldsymbol{J}_{\mathsf{T}}$$

- 横変位電流 $\boldsymbol{D}_{\mathsf{T}}$ による式間の結合によって, 電場と磁場の横成分の絡み合いが生じ, 電磁波モードが可能となる.
- 特に, $\boldsymbol{J}_{\mathsf{T}} = 0$ とすると, 自由解が得られる. 横変位電流 $\partial_t \boldsymbol{D}_{\mathsf{T}}$ は, 実電流に束縛されるものではないため, 電磁波は源から遠く離れたところまで伝搬可能となる. (変位電流の縦成分の源からの距離依存性が高々 $1/R^2$ であるのに対して, 電磁波, つまり横成分のそれは $1/R$ である.)