

谷村 省吾 (名古屋大学)

楯微分形式で書かれた電磁場と
電束・磁束の正準交換関係と
アブラハム・ミンコフスキー論争

参考文献

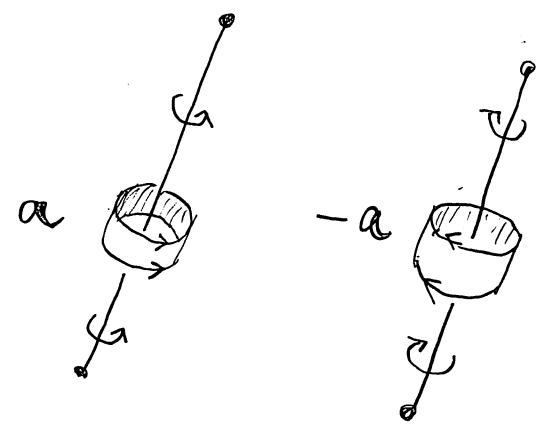
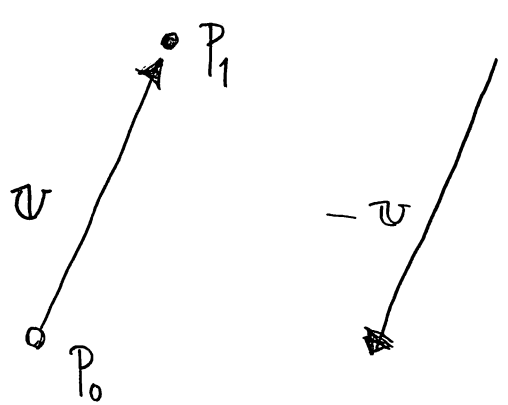
1. 谷村省吾 数理科学SGCライブラリ「幾何学から物理学へ」サイエンス社
2. 谷村省吾 「微分形式と電磁気学」数理科学 2023年8月号
サイエンス社のウェブサイトに補足ノートが公開されている。
3. Tanimura, "Homological commutation relation of electric and magnetic fluxes"
J. Phys. Conference Series, ネットオープンアクセス
「Tanimura electric magnetic flux」で検索すると出て来ます。
4. Peter Bowyer, "The momentum of light in media: the Abraham-Minkowski controversy"
Lecture 2 - 論文、よく書けていると思えますが、残念ながら正規のジャーナルやarXivにはないようです。

電磁場の記法

	通常の 3次元ベクトル解析	3次元 微分幾何学
スカラーポテンシャル(電位)	ϕ スカラー場	0-form
ベクトルポテンシャル	A (極性)ベクトル場	1-form
電場	E (極性)ベクトル場	1-form
電束密度	D (極性)ベクトル場	twisted 2-form
磁束密度 (谷村は“磁場”と呼ぶ)	B (軸性)ベクトル場	2-form
磁場の強さ (“磁渦” ^{じうず} と呼びこくと推察) じか	H (軸性)ベクトル場	twisted 1-form
電荷密度	ρ スカラー場	twisted 3-form
電流密度	j (極性)ベクトル場	twisted 2-form

twisted = 捩 (ねじり型)
 untwisted = 常 (normal)

この 極性 polar と 軸性 axial の違い

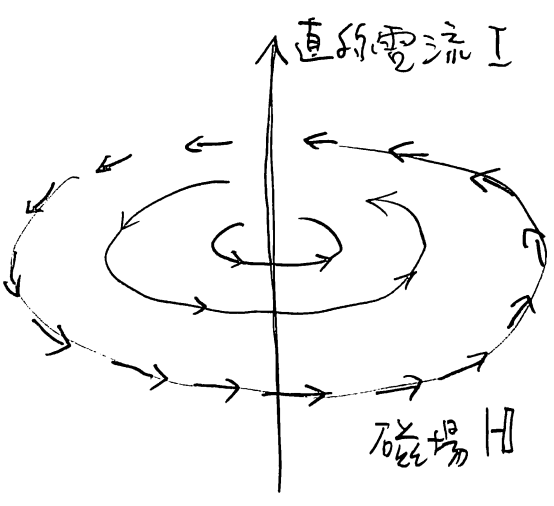


始点と終点の区別がある。
 矢印 \longrightarrow 始点から終点のほうを
 $v = P_0 P_1$ “向いている”

頭と尾の区別がない。
 軸の周りに“巻き付きの向き”
 が定められている。

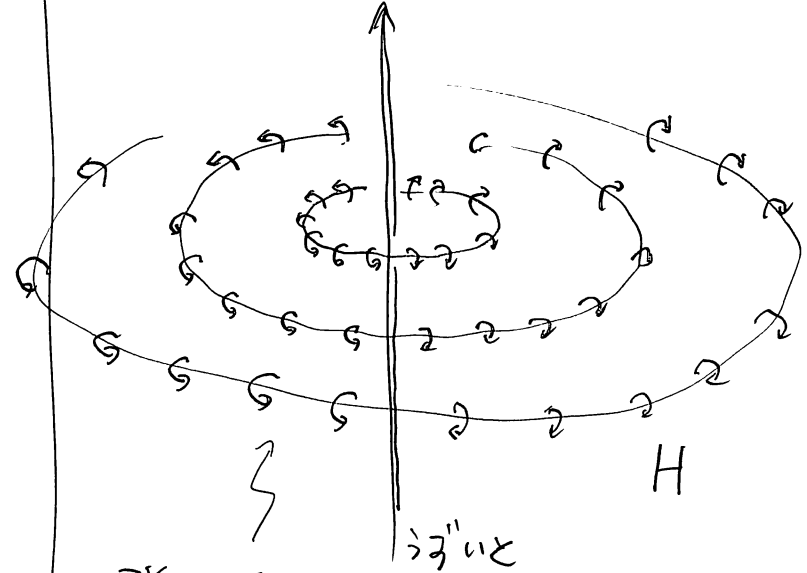
アンペールの法則 直線電流が作る磁場の場合、

通常のベクトル場イメージでは、



こんなふうに磁力線が
できているというイメージで捉えられているが、

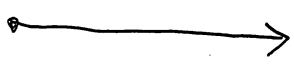
軸性ベクトル場があることを
忠実に表現すると



磁力線 = 渦糸

電流の向きに誘導される向きに
磁渦が渦巻いている。
というイメージで捉えた方がよい。

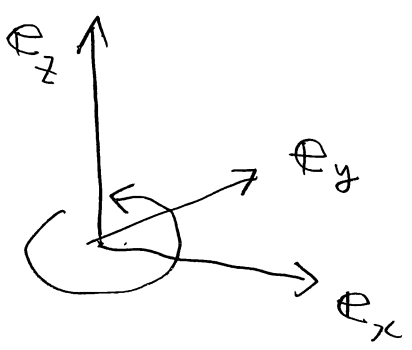
極性ベクトルのイメージ



軸性ベクトルのイメージ



“右手系”を約束すれば



$$e_z = e_x \times e_y$$

e_z という極性を、

「 e_x から e_y 」という軸性に翻訳
ができる。

右手系・左手系という決意的な選取に依存せずに、

はじめから、極性と軸性を intrinsic に規定し、
別々のとして捉えた方がよい。

部分多様体 (鎖, chain) の向き付け = 接的 tangential

(接点の外側向きが ± 1 になる)

= 沿う向き along

= 内在的 intrinsic (内包的)

0-chain

1-chain

2-chain

3-chain

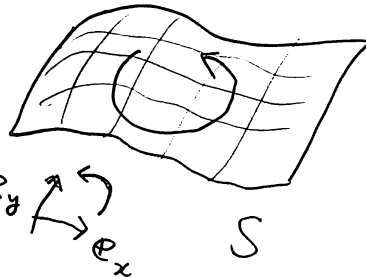
境界作用素

∂

∂S

$+p_1$

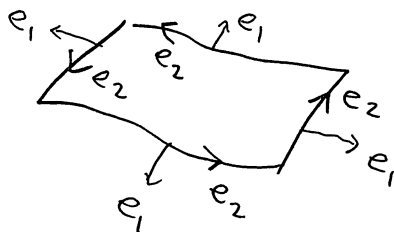
$-p_0$



e_x, e_y

$e_x \wedge e_y$

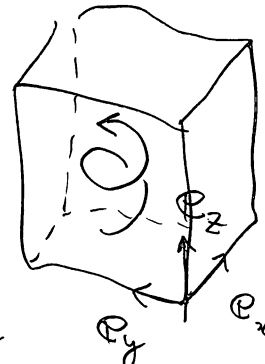
∂S は 1-chain



$e_1 \wedge e_2$

∂S の向き ± 1

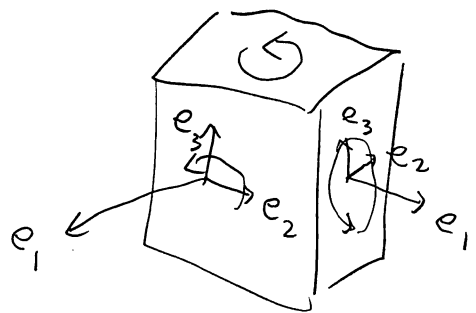
外向きの脱着



e_x, e_y, e_z

$e_x \wedge e_y \wedge e_z$

∂S は 2-chain

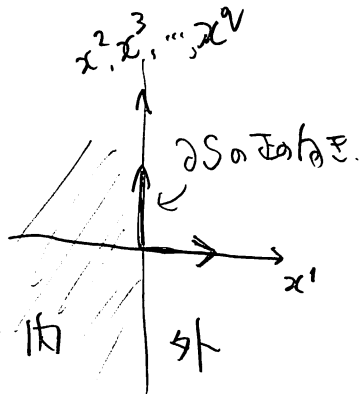
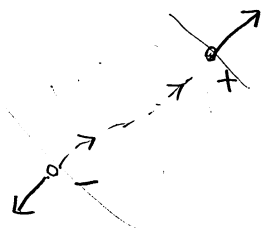


boundary $n \pm 1$

$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

外向きの脱着

向き $e_2 \wedge e_3$ が ∂S の向きを定める



q-chain の場合

振鎖 Twisted chain の向き付け = 横断的 transversal

(5)

(法ベクトルに向きを付ける)

= 横切りの向き across

= 外来的 extrinsic (外延的)

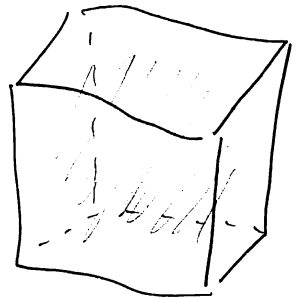
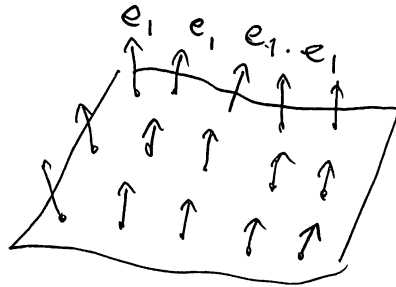
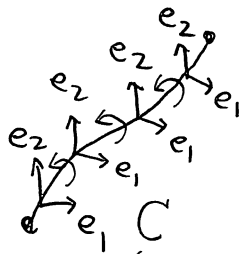
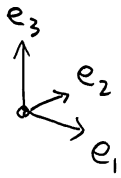
3次元空間中の

twisted 0-chain

twisted 1-chain

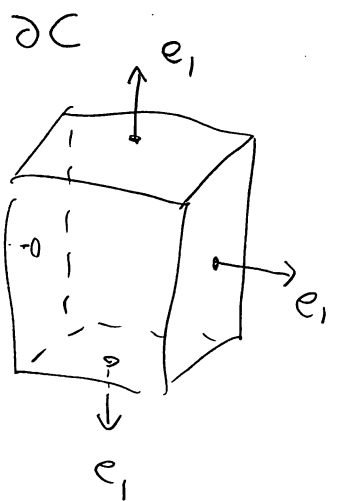
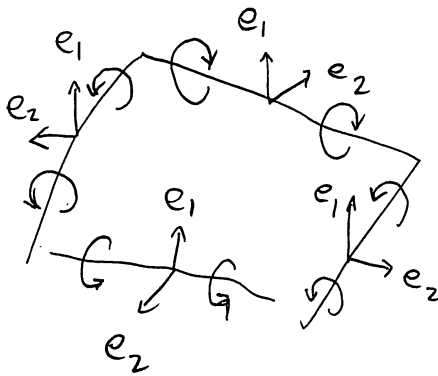
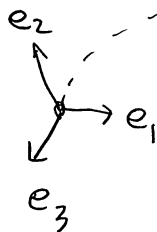
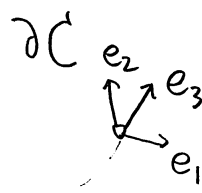
twisted 2-chain

twisted 3-chain



$e_1, e_2 \wedge e_3$ の向き

境界作用素 ∂



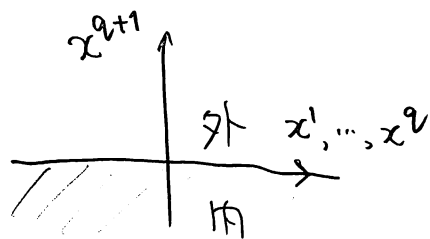
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

新たに法ベクトルを付ける。

$e_1 \wedge e_2$

追加法ベクトル

内から外に出る
法ベクトル e_1, e_2
 ∂C が向き付けられる。



twisted q-chain 場合

算の方.

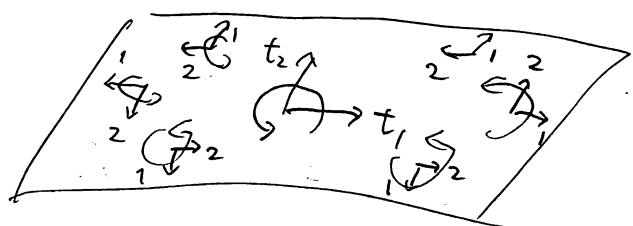
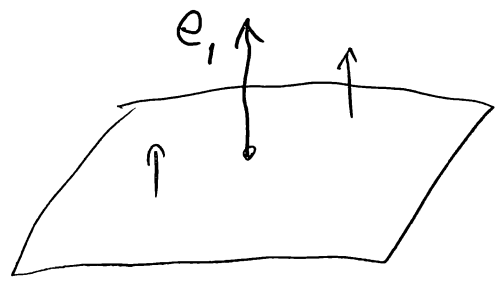
n -次元空間中の

twisted q -chain C

q -chain S

$$\underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p}_{\substack{\text{向きが} \\ \text{付けられる}}} \wedge \underbrace{t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_q}_{\substack{\text{向きが} \\ \text{付けられる}}}$$

$p+q=n$

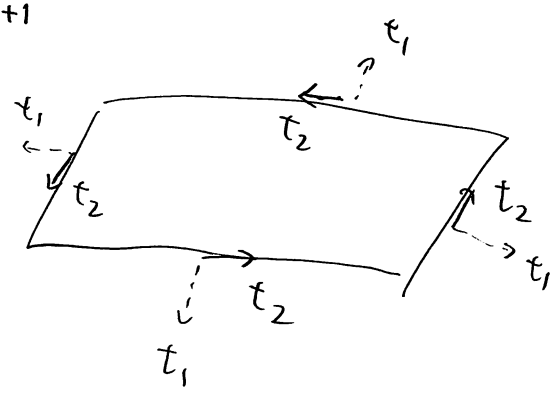
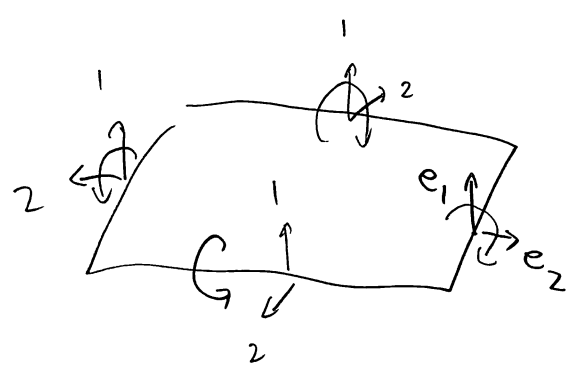


境界のときは

twisted $(q-1)$ -chain ∂C

$(q-1)$ -chain ∂S

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_p \wedge \underbrace{t_1}_{\substack{= \\ e_{p+1}}} \wedge t_2 \wedge t_3 \wedge \dots \wedge t_q$$



∂ (twisted chain)

∂ (chain)の方は

先頭の接ベクトルが脱落する

の方は

末尾に法ベクトルが付け加えられる。

微分形式は 鎖に対する双対ベクトルだ

pairing

$$\langle \omega, S \rangle = \int_S \omega$$

p-form p-chain

振微分形式は 振鎖に対する双対ベクトルだ

$$\langle \underline{\omega}, \underline{S} \rangle = \int_{\underline{S}} \underline{\omega}$$

twisted p-form twisted p-chain

記法とL2は

例として 1-form だ

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

と書かれる

Twisted 1-form は

$$\underline{H} = (H_x dx + H_y dy + H_z dz) \otimes [dx \wedge dy \wedge dz]$$

と書かれる

1-chain は、パラメータ付けされた曲線 $(x(s), y(s), z(s))$ で表される

$$\int_C E = \int_{s_0}^{s_1} \left(E_x \frac{dx}{ds} + E_y \frac{dy}{ds} + E_z \frac{dz}{ds} \right) ds$$

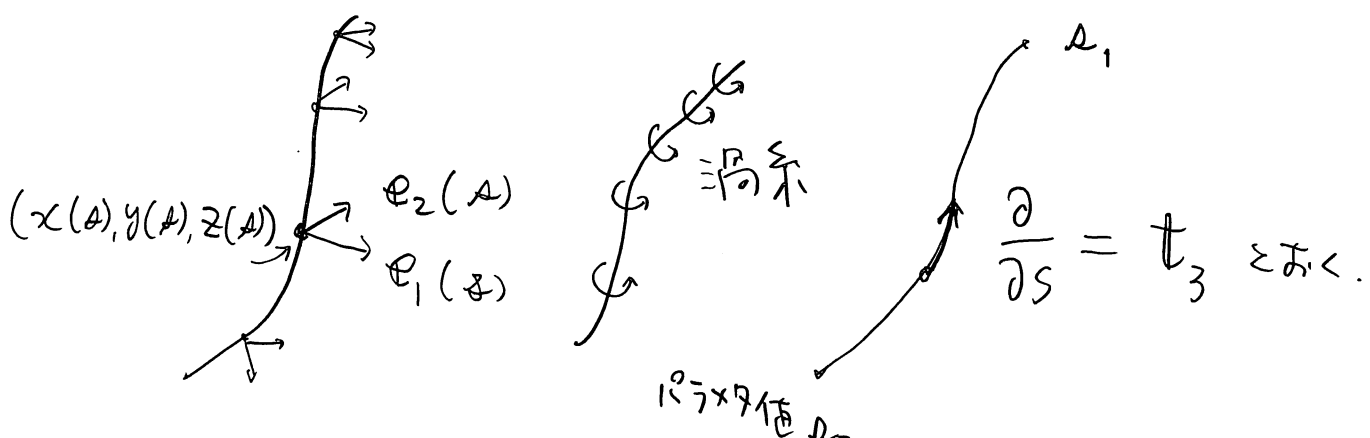
パラメータ 1-form



この線積分 $\langle E, C \rangle = \int_C E$ が定義される

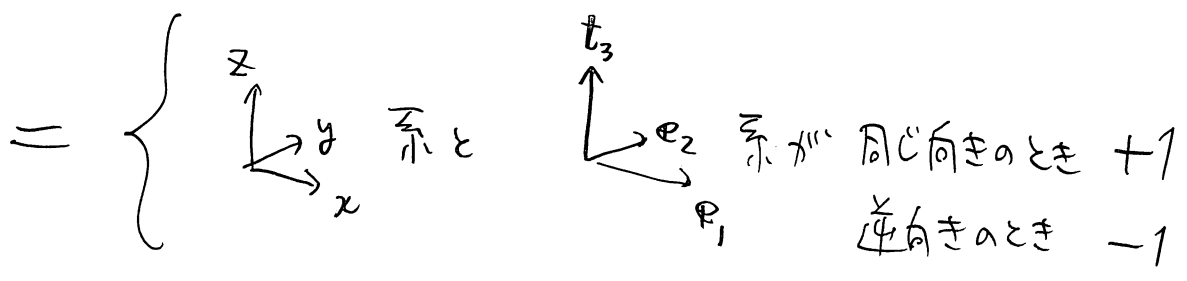
パラメータを貫いた回数 $\langle E, C \rangle$

twisted 1-chain \underline{C} はパラメータ付けられた曲線 $(x(A), y(A), z(A))$ (8) と曲線に沿った法ベクトル族 $(\mathcal{E}_1(A), \mathcal{E}_2(A))$ の組で定められる。



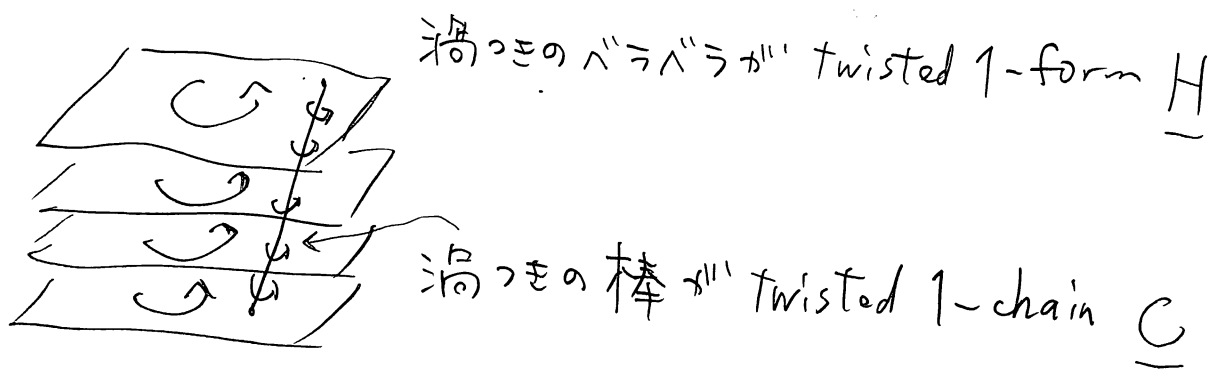
$[\cdot]$ は符号関数 signature であり、

$$[dx \wedge dy \wedge dz](\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, t_3) := \text{Sgn} \langle dx \wedge dy \wedge dz, \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge t_3 \rangle$$



したがって、 \underline{C} に沿った \underline{H} の線積分は

$$\int_{\underline{C}} \underline{H} = \int_{A_0}^{A_1} \left(H_x \frac{dx}{dA} + H_y \frac{dy}{dA} + H_z \frac{dz}{dA} \right) \times \text{Sgn} \langle dx \wedge dy \wedge dz, \mathcal{E}_1 \wedge \mathcal{E}_2 \wedge \frac{\partial}{\partial A} \rangle dA$$



したがって、回数 $\langle \underline{H}, \underline{C} \rangle = \int_{\underline{C}} \underline{H}$

電場 1-form $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

変位ベクトル $v = (v^x, v^y, v^z)$ が与えられたときの
(単位電荷当りの) 仕事 (電位差)

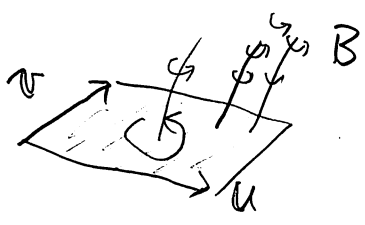
$$\Delta\phi = \langle E, v \rangle = E_x v^x + E_y v^y + E_z v^z$$

を与えるという意味で、 E は長さ (1-chain) に対する関数。

磁場 2-form $B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$

2本の 変位ベクトル $u = (u^x, u^y, u^z), v = (v^x, v^y, v^z)$
が与えられたときの 磁束

$$\Delta\Phi_m = \langle B, u \wedge v \rangle = B_x (u^y v^z - u^z v^y) + B_y (u^z v^x - u^x v^z) + B_z (u^x v^y - u^y v^x)$$

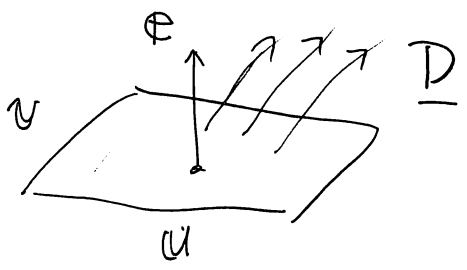


を与える。

電束密度 twisted 2-form $\underline{D} = (D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy) \otimes$

2本の 変位ベクトル $u = (u^x, u^y, u^z), v = (v^x, v^y, v^z) \llbracket dx \wedge dy \wedge dz \rrbracket$
と 1本の 法線ベクトル $e = (e^x, e^y, e^z)$ が与えられたときの

の電束
$$\Delta\Phi_e = \langle \underline{D}, (u \wedge v) \otimes [e \wedge u \wedge v] \rangle$$



Maxwell 方程式

- \underline{E} : 1-form
- \underline{B} : 2-form
- \underline{D} : twisted 2-form
- \underline{H} : twisted 1-form
- \underline{j} : twisted 2-form
- $\underline{\rho}$: twisted 3-form

電氣分極場

\underline{P} : twisted 2-form

磁化

\underline{M} : twisted 1-form

$$\left\{ \begin{array}{l} d\underline{B} = 0 \\ d\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ d\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \\ d\underline{D} = \underline{\rho} \end{array} \right.$$

構成方程式

Hodge star

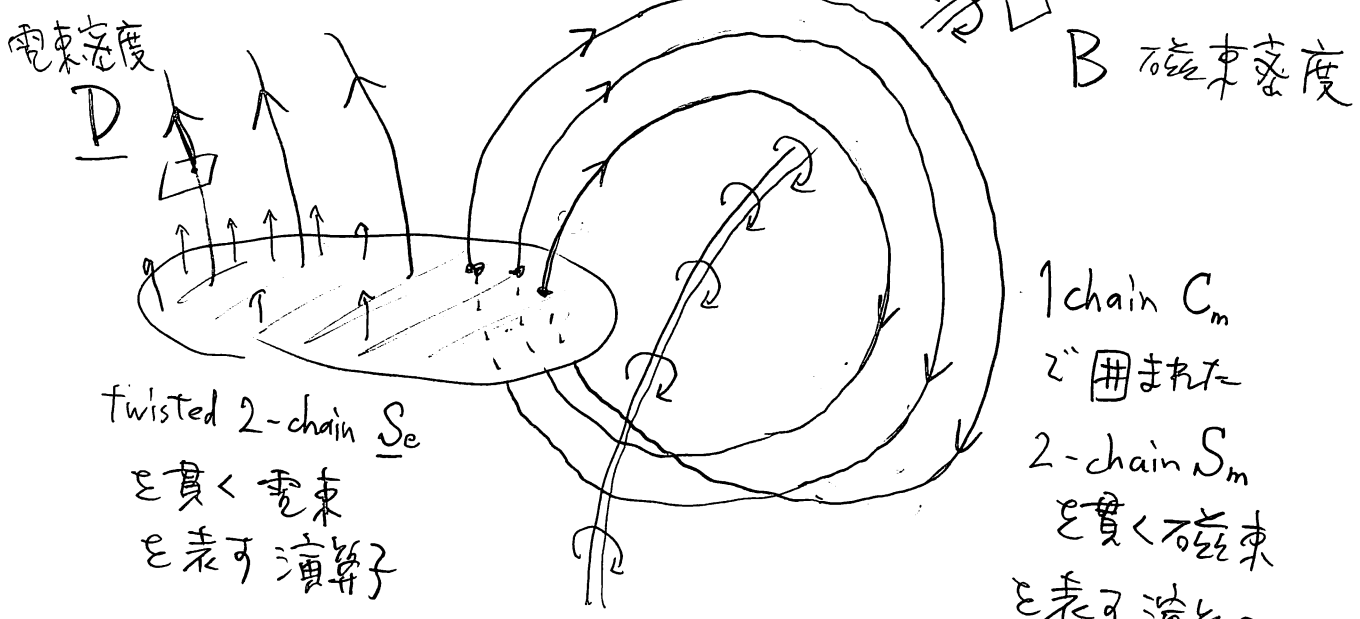
- 1-form \leftrightarrow twisted 2-form
- 2-form \leftrightarrow twisted 1-form

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{D} = \epsilon_0 * \underline{E} + \underline{P} \\ \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} * \underline{B} - \underline{M} \end{array} \right.$$

電束・磁束の正準交換関係の詩に逢おう。

111

結論 と 217,



twisted 2-chain S_e
 を貫く電束
 を表す演算子

1chain C_m
 2-chain S_m
 を貫く磁束
 を表す演算子

$$\hat{\Phi}_e = \int_{S_e} \hat{D}$$

$$\hat{\Phi}_m = \int_{S_m} B$$

交叉関係

$$[\hat{\Phi}_e, \hat{\Phi}_m] = i\hbar \hat{I} \times N(S_e, S_m)$$

交叉数. crossing number
 (boundary に注目 環状 linking number)

を満す可.

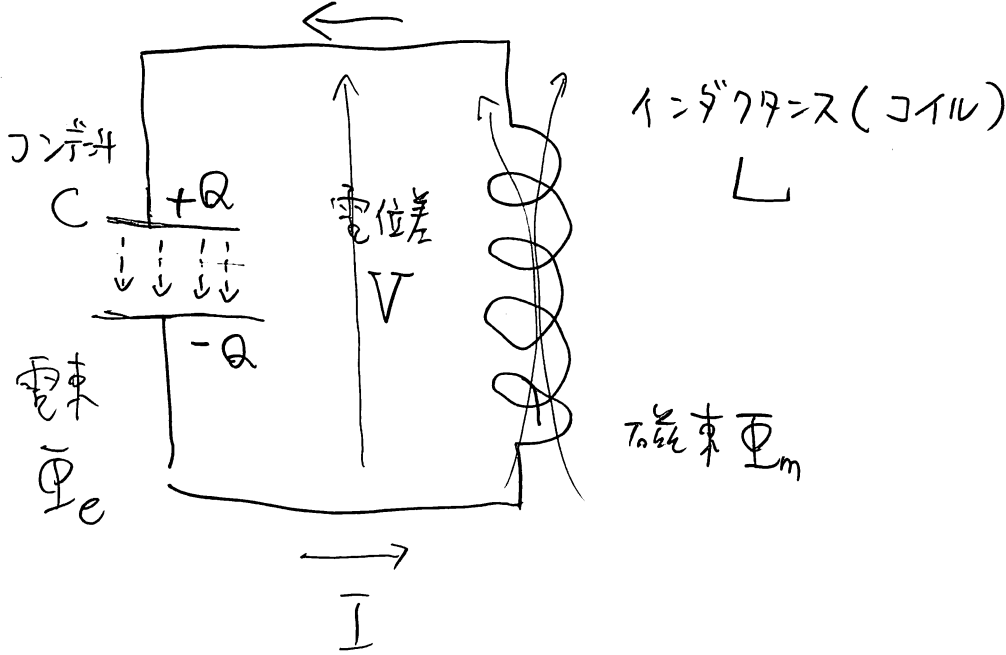
と云うことは QED の立場から示した。

なぜこんなことが「気」になるのかと言うと...

LC回路

電流 I

電氣的調和振動子



インダクタンス (コイル)

L

磁束 Φ_m

作用積分 ← ラグランジアン の 速度依存ポテンシャル

$$S = \int e A \cdot v dt = e \int_{C \rightarrow \partial S_{t_1, t_2}} A \cdot dr = e \int_S B \cdot nd\sigma = e \Phi_m$$

なので、次元解析的に、
 (電荷) × (磁束) = (作用積分の次元)
 " " " "
 (電束) (Planck constant の次元)

とあることはわかる。

量子化の扱ひ、ハミルトニアン $\hat{H} = \frac{1}{2L} \hat{\Phi}_m^2 + \frac{1}{2C} \hat{Q}^2$ ($\hat{Q} = \hat{\Phi}_e$)

正準交換関係 $[\hat{Q}, \hat{\Phi}_m] = i\hbar$ (仮定すると、)

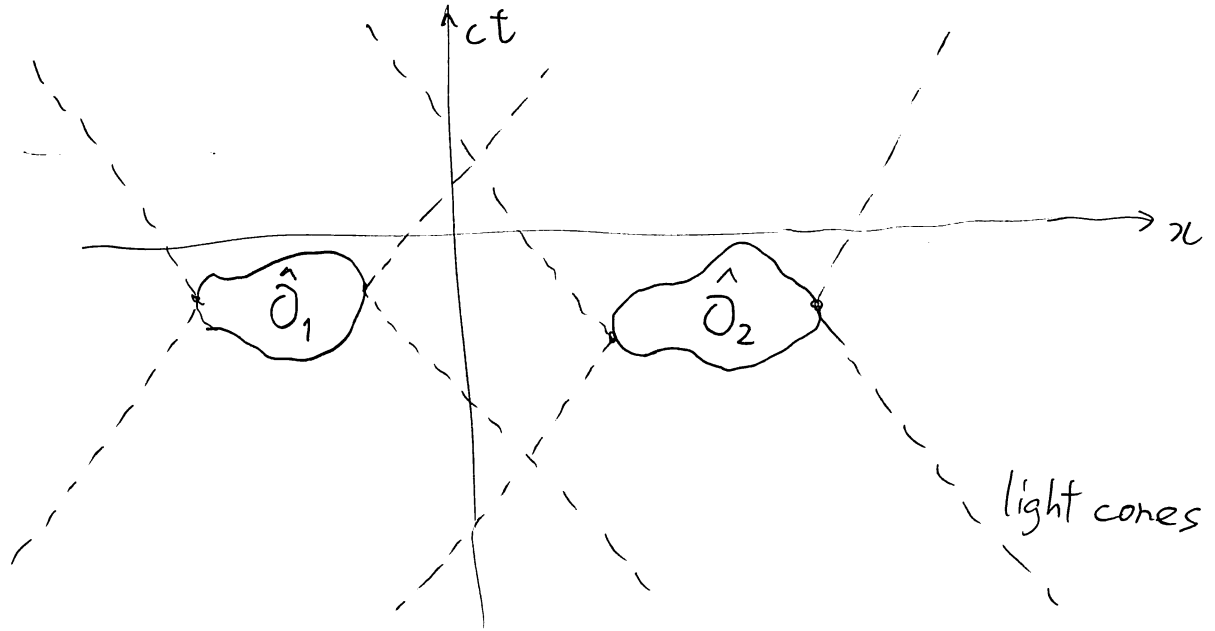
ガウスの法則。

ハイゼンベルグ方程式は LC回路の方程式を再現する:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\hat{Q}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{Q}, \hat{H}] = \frac{1}{L} \hat{\Phi}_m = \hat{I} \\ \frac{d\hat{\Phi}_m}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{\Phi}_m, \hat{H}] = -\frac{1}{C} \hat{Q} = -\hat{V} \end{aligned} \right.$$

しかし、相対論的場の量子論の観点から見ると、...

space-like に離れた領域で定義される 2つの observables \hat{O}_1, \hat{O}_2

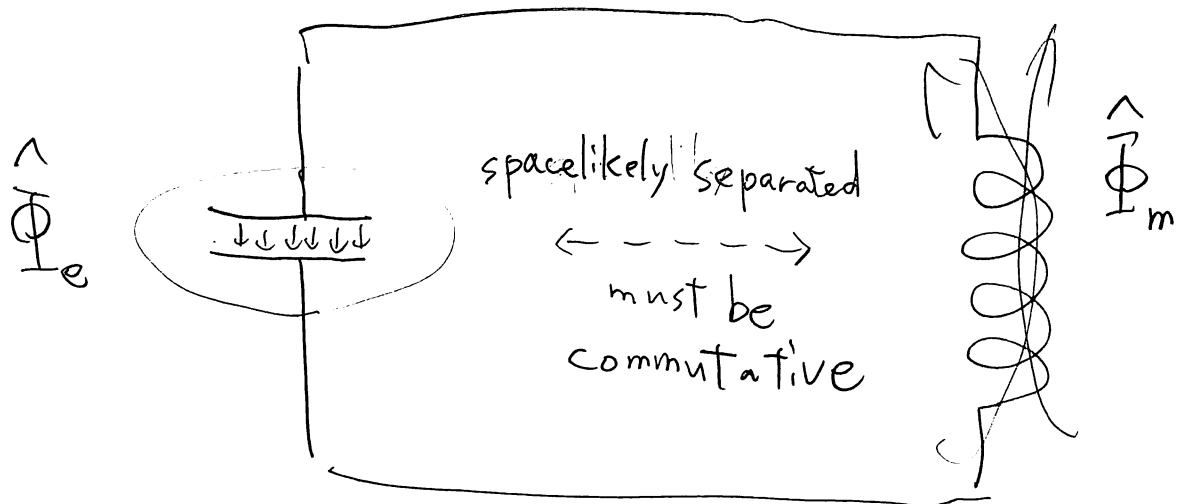


は可換にならなくてはならない: $[\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$

さらに LC回路の電束 $\hat{\Phi}_e$ (電荷 \hat{Q}) と磁束 $\hat{\Phi}_m$ は、
space-likely separated されているように見ると、

CCR $[\hat{\Phi}_e, \hat{\Phi}_m] = i\hbar$ を課せられるとは、いかん?

相対論的場の量子論の立場で、このCCRも正当化できるか?
というのが問題



最終的には...: 拘束系の量子論として QED を取り扱えば、

$$[\hat{\phi}_e, \hat{\phi}_m] = i\hbar N \hat{1} \text{ が導びが完る。}$$

導出の道筋:

横 縦

電場も横波成分と縦波成分に分ける $E = E_{\perp} + E_{\parallel}$

$$4\text{-次元ゲージ場 } A = A_{\mu} dx^{\mu} \quad A_0 = \frac{1}{c} \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } E_{\perp} = 0 \quad (k \cdot E_{\perp} = 0) \\ \text{rot } E_{\parallel} = 0 \quad (k \times E_{\parallel} = 0) \end{array} \right.$$

field strength $F = dA$

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$

$$\text{ラグランジアン } \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{metric} = (+, -, -, -)$$

$$\text{拘束条件 } \pi_0 := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_0)} = F^{00} \equiv 0$$

$$7\text{-DNG-ゲージ固定 } \text{div } A = 0, \quad \varphi = -\Delta^{-1} \rho$$

A_0 を従属変数に
して扱う。
 A_{\parallel} は恒等的にゼロ
にして扱う

独立変数は A_{\perp} と $\pi_{\perp} = E_{\perp}$ だけ。

$\pi_{\parallel} = E_{\parallel}$ も
 $\text{div } E_{\parallel} = \rho$
を従属変数に
して扱う。

正準運動量 $j = 1, 2, 3 = x, y, z$

$$\pi^j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_j)} = -F^{0j} = F_{0j}$$

$$\pi_{\perp} = -E_{\perp}$$

$$\text{CCR } [\hat{A}_j(x, t), \hat{\pi}^k(y, t)] = i\hbar \left(\delta_j^k - \frac{\partial_j \partial^k}{\Delta} \right) \delta^3(x-y)$$

$$[-\hat{A}^j(x, t), \hat{E}^k(y, t)] = i\hbar \left(\delta_{jk} - \frac{\partial_j \partial_k}{\Delta} \right) \delta^3(x-y)$$

$$[\hat{E}^k(y, t), \hat{A}^j(x, t)]$$

E^k の方に面積積分
を施す.

$$\hat{\Phi}_e = \int_{S_e} \hat{E}^k n^k d\sigma$$

(15)

A^j の方に線積分を施す

$$\hat{\Phi}_m = \int_{C_m = \partial S_m} \hat{A}^j dr^j = \int_{S_m} \text{rot } \hat{A} d\sigma = \int_{S_m} \hat{B} d\sigma$$

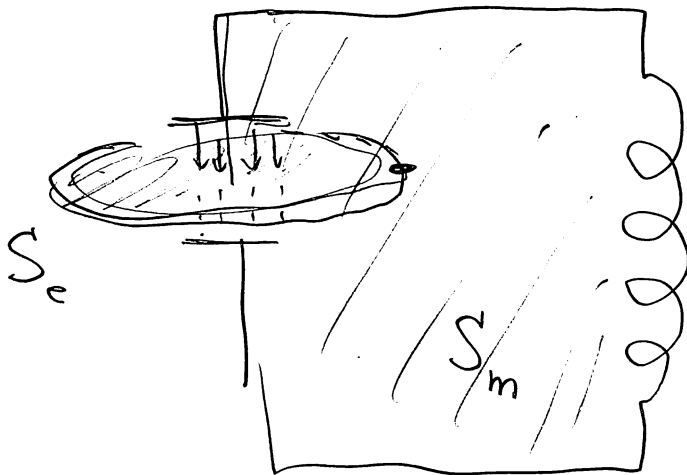
により

$$[E, A] = (\text{transversal delta function}) \times i\hbar$$

から

$$[\hat{\Phi}_e, \hat{\Phi}_m] = i\hbar N \hat{1}$$

EとAのLC回路は?

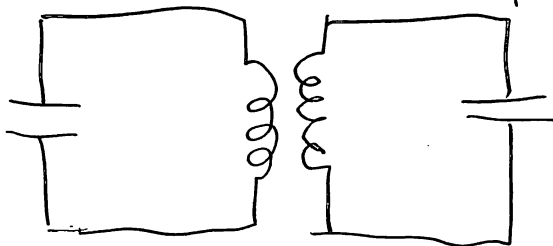


S_e と S_m は
crossing number = 1
2" 交叉 2113

これは EPR pair 状態を作ることになる

(1) loop

(2) loop



$$\hat{q}_1 = \hat{\Phi}_e^{(1)}$$

$$\hat{q}_2 = \hat{\Phi}_e^{(2)}$$

$$\hat{p}_1 = \hat{\Phi}_m^{(1)}$$

$$\hat{p}_2 = \hat{\Phi}_m^{(2)}$$

アブラハム・ミンコフスキー論争 (Abraham-Minkowski controversy) (16)

物質中の電磁場の単位体積あたりの運動量の定義に関する
(運動量密度) 異論

1908年 ミンコフスキー $S^M := \mathbb{D} \times \mathbb{B}$

1909年 アブラハム $S^A := \epsilon_0 \mu_0 \mathbb{E} \times \mathbb{H}$

$$\mathbb{D} = \epsilon_0 \mathbb{E} + \mathbb{P}, \quad \mathbb{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbb{B} - \mathbb{M}$$

真空中では $S^M = S^A$ だが、物質中では両者は真に等しくない!
ど、のが正しい式か? という論争。

微分形式で書くと、

単位ベクトル e 方向の運動量成分を $P_e = e \cdot \mathbb{P}$ と書くと、

運動量成分密度は twisted 3-form S_e で表わされ、

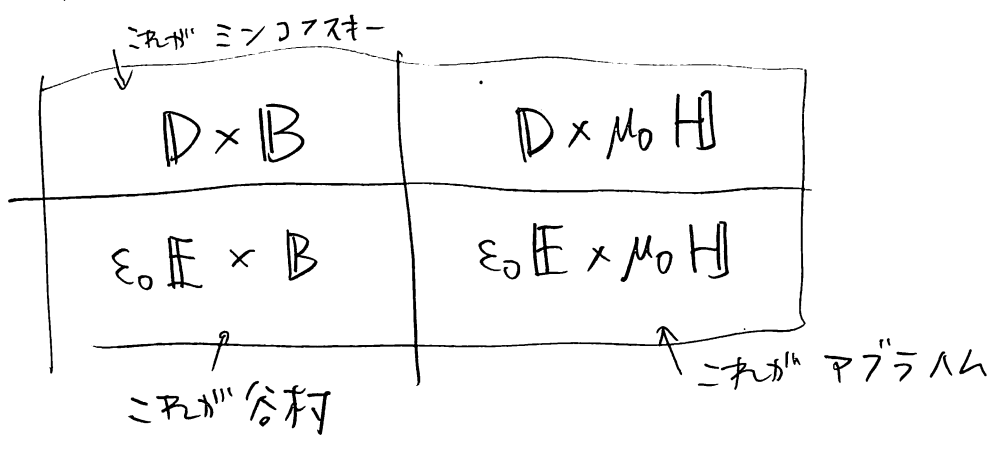
• ミンコフスキー $S_e^M = \underbrace{(i_e B)}_{1\text{-form}} \wedge \underbrace{D_m}_{2\text{-form}}$ twisted 2-form
↑ 物質中の自由電荷が生成する電束密度

• アブラハム $S_e^A = \epsilon_0 \mu_0 \underbrace{(i_e * H_m)}_{2\text{-form}} \wedge \underbrace{*E}_{1\text{-form}}$ twisted 2-form
↑ twisted 1-form

• 谷村 $S_e^T = \epsilon_0 (i_e B) \wedge *E$

(要するに、物質中でも真空中と同じ定義式で書かれる \mathbb{E}, \mathbb{B} を用いて、
電磁場が荷な運動量を定めるべし)

もちろ、たんに formal な δA の組み合わせは 4 とは 11



構成方程式に先んじて定まる場を使うべし。

証明は、Maxwell 方程式 + 電荷に作用する Lorentz 力
を前提とし、

(電荷の荷電物質が単位時間にもらう運動量)

自由電荷 + 束縛電荷

(電磁場がもらう運動量)

$$= \left(\frac{\partial S_e}{\partial t} + dT_e \right)$$

と満ちる twisted 3-form S_e (運動量の体積密度)

twisted 2-form T_e (運動量の流束の面積密度)

と見つければよい。

応力テンソル

詳しくは

数理学科 2023年8月号 記事

と Web 補足ノート

を見てほしい。

講演予稿ノート, 以上です。