

机の上で光速を測る
— 現代版 Weber-Kohlrausch の実験 —
(後半)

小林 弘和¹, 北野 正雄²

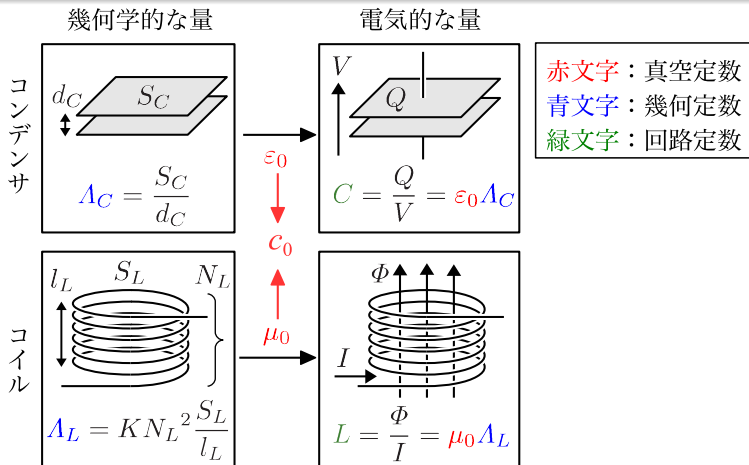
高知工科大学システム工学群¹, 京都大学工学研究科²

第5回 QUATUO 研究会

2016/1/11

LC共振回路による光速測定理論

コイルとコンデンサにおける幾何学的な量と電気的な量

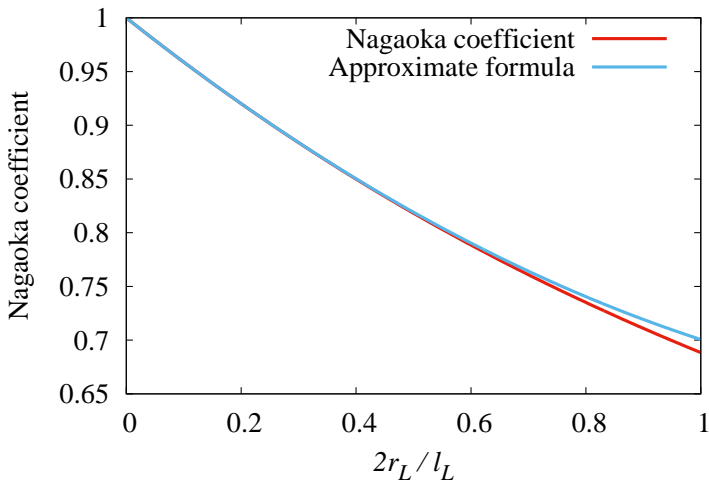


※コイルの半径 $r_L \ll l_L$ のとき長岡係数 K は

$$K \simeq 1 - \frac{8}{3\pi} \left(\frac{r_L}{l_L} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_L}{l_L} \right)^2$$

- H. Nagaoka, J. Coll. Sci., Imp. Univ. Tokyo **27**, 18 (1909).
R. Lundin, Proceedings of the IEEE **73**, 1428 (1985).

$$K \simeq 1 - \frac{8}{3\pi} \left(\frac{r_L}{l_L} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r_L}{l_L} \right)^2$$



光速 c_0 と真空のインピーダンス Z_0

- 光速 $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{\sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}}{\sqrt{LC}}$
- 真空のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}}$

L と C の積と比が測定できれば良い

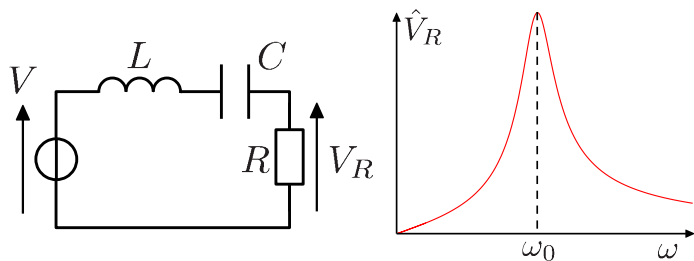
光速 c_0 と真空のインピーダンス Z_0

- 光速 $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{\sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}}{\sqrt{LC}}$
- 真空のインピーダンス $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}}$

L と C の積と比が測定できれば良い

- $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ → LC 共振回路の共振角周波数
- $\sqrt{\frac{L}{C}}$ → ??

LC共振回路による光速測定



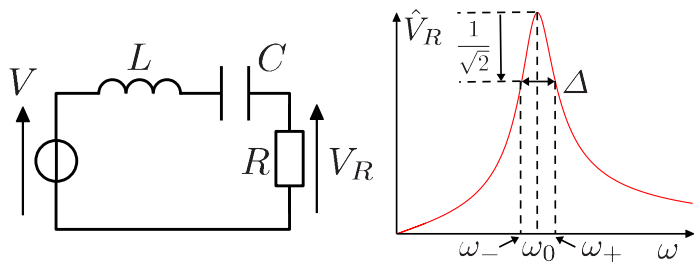
- 複素電圧 $\dot{V}_R = \frac{R\dot{V}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$

- 電圧振幅 $\hat{V}_R = \frac{R\hat{V}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \leq \hat{V}$

等号成立は共鳴角周波数 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ のとき

$$\text{光速 } c_0 = \frac{\sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}$$

LC共振回路による真空のインピーダンス測定



- \hat{V}_R が共鳴時の $1/\sqrt{2}$ となる角周波数 ω_{\pm}
- 規格化共鳴幅 $\Delta := \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR$
- Δ の変化量 $y := \frac{d\Delta}{dR} = \sqrt{\frac{C}{L}}$

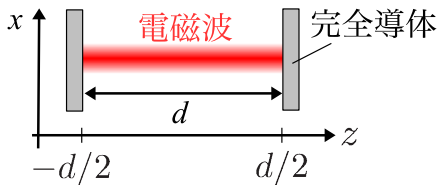
$$\text{真空のインピーダンス } Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{\Lambda_L}{\Lambda_C}}$$

正確さを必要とする要素

- 光速 $c_0 = \omega_0 \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}$
 - 電源の周波数
 - 幾何学的長さを測る物差し

→ 電気回路を使っているが定量的には時間と長さの測定
- 真空のインピーダンス $Z_0 = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{\Lambda_L}{\Lambda_C}}$
 - 電源の周波数
 - 幾何学的長さを測る物差し
 - 抵抗値
- 真空の誘電率 $\epsilon_0 = \frac{C}{\Lambda_C} = \frac{y}{\omega_0 \Lambda_C}$
- 真空の透磁率 $\mu_0 = \frac{L}{\Lambda_L} = \frac{1}{y \omega_0 \Lambda_L}$

LC 共振回路による光速測定と Fabry-Perot 共振器



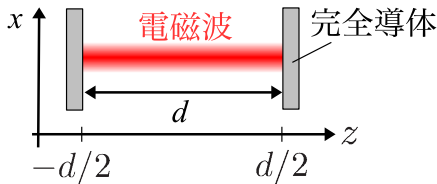
- z 方向に伝搬する x 偏波平面波の Maxwell 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E_x) = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 H_y) = -\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

- $z = \pm d/2$ に完全導体を設置して Fabry-Perot 共振器を構成
→ 電場の境界条件 $E_x(\pm d/2, t) = 0$
→ 最低次のモードは

$$E_x(z, t) = E(t) \cos\left(\frac{\pi}{d}z\right), \quad H_y(z, t) = H(t) \sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)$$

LC 共振回路による光速測定と Fabry-Perot 共振器



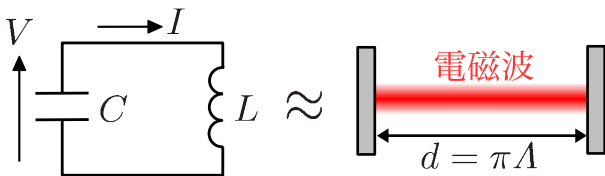
- $E(t)$, $H(t)$ が満たすべき方程式

$$\epsilon_0 \frac{dE}{dt} = -\frac{\pi}{d} H, \quad \mu_0 \frac{dH}{dt} = \frac{\pi}{d} E \rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 E}{dt^2} = -\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 E$$

- 単振動の角周波数 $\omega_0 = \frac{\pi}{d\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ より

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{\omega_0 d}{\pi} = \frac{2d}{T}$$

LC 共振回路による光速測定と Fabry-Perot 共振器



- 回路の方程式 $I = -C \frac{dV}{dt}$, $V = L \frac{dI}{dt}$
- $L = \mu_0 \Lambda_L$, $C = \varepsilon_0 \Lambda_C$ より

$$\varepsilon_0 \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\Lambda} I' , \quad \mu_0 \frac{dI}{dt} = \frac{1}{\Lambda} I' \rightarrow \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 V}{dt^2} = -\frac{1}{\Lambda^2} V$$

$$\text{ただし } I' := \sqrt{\frac{\Lambda_L}{\Lambda_C}} I , \quad \Lambda := \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}$$

$$c_0 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \omega_0 \Lambda = \frac{2\pi \Lambda}{T} \quad (d = \pi \Lambda \text{ の共振器と等価})$$

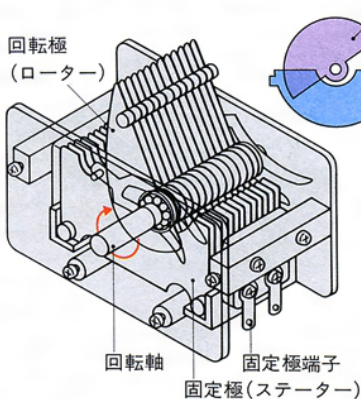
LC共振回路による光速測定実験

空気コンデンサ

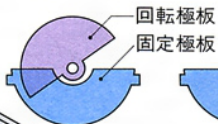
空気の比誘電率は $\epsilon_r = 1.00059$ なので ϵ_0 とほぼ同じ

- 空気バリコン
- 太いスペーサ+多層コンデンサ
- 細い精密なスペーサ+単層コンデンサ

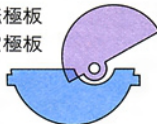
構造例



容量直線形



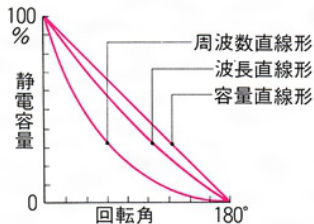
波長直線形



周波数直線形



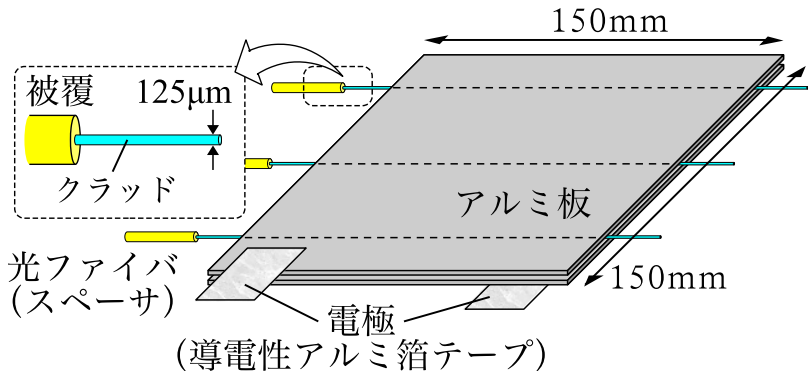
種類と特性



空気コンデンサ

空気の比誘電率は $\epsilon_r = 1.00059$ なので ϵ_0 とほぼ同じ

- 空気バリコン
- 太いスペーサ+多層コンデンサ
- 細い精密なスペーサ+単層コンデンサ

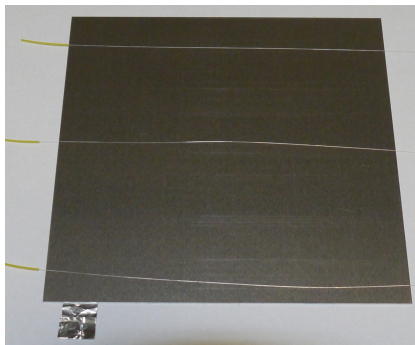
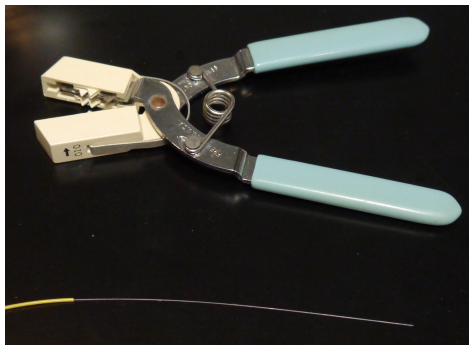


光ファイバーの誘電率はほぼ無視できる

空気コンデンサ

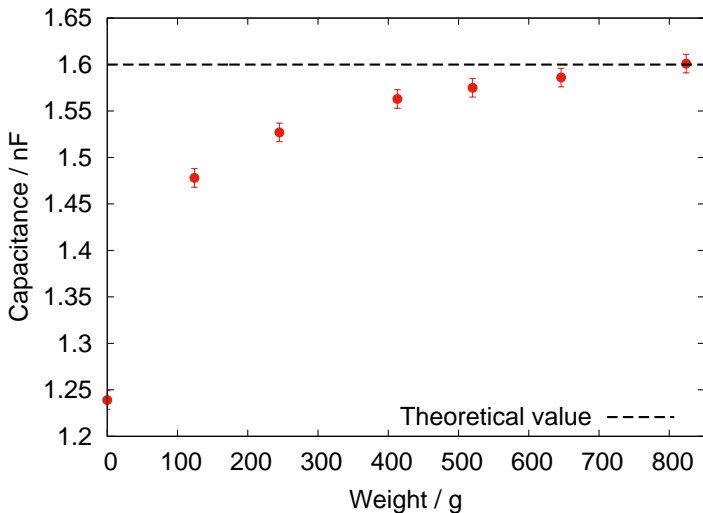
空気の比誘電率は $\epsilon_r = 1.00059$ なので ϵ_0 とほぼ同じ

- 空気バリコン
- 太いスペーサ+多層コンデンサ
- 細い精密なスペーサ+単層コンデンサ



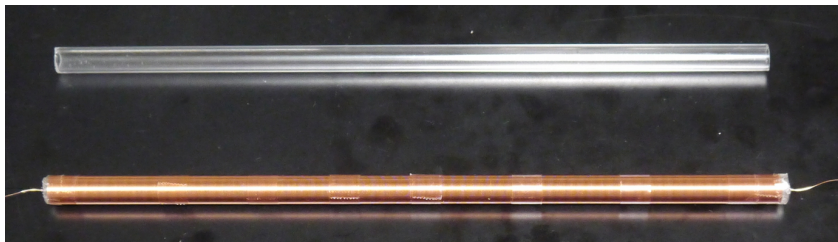
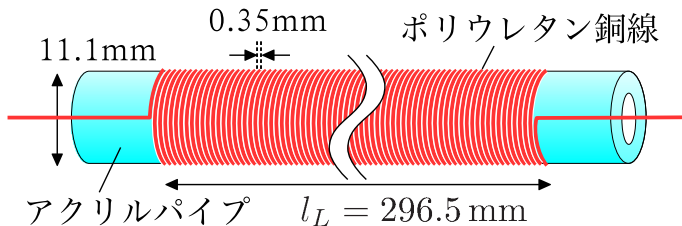
空気コンデンサのキャパシタンスと重しの質量

- 文庫本を重しとして使用
- LCRメータ (LCR700, 三和電気計器) で容量を測定



空芯コイル

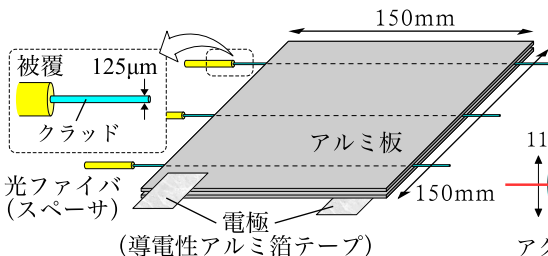
- 直径 11.1 mm のアクリルパイプにポリウレタン銅線を密巻き
- アクリルの比透磁率はほぼ 1
- 巻き数 $N_L = 850$ ($2w_L \simeq l_L/N_L$ ただし $2w_L$ は銅線の直径)



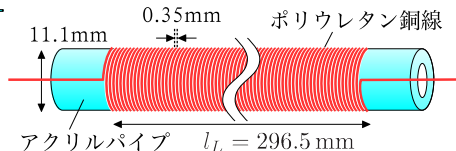
空気コンデンサの容量と空芯コイルのインダクタンス

- ノギスによる長さ測定から幾何学的因子を計算
- LCRメータ (LCR700, 三和電気計器) で容量とインダクタンスを測定

	幾何学的因子 (Λ_C, Λ_L)	電氣的な量 (C, L)	
		計算値	実測値
コンデンサ	180.1(7) m	1.595(6) nF	1.610(12) nF
コイル	245(2) m	308(3) μ H	305(3) μ H



ファイバ径が誤差の主要因



コイル径が誤差の主要因

LCRメータを用いた c_0 と Z_0 の測定

- ノギスによる長さ測定から幾何学的因子を計算
- LCRメータ (LCR700, 三和電気計器) で容量とインダクタンスを測定

	幾何学的因子 (Λ_C, Λ_L)	電氣的な量 (C, L)	
		計算値	実測値
コンデンサ	180.1(7) m	1.595(6) nF	1.610(12) nF
コイル	245(2) m	308(3) μ H	305(3) μ H

- 実測値から求めた c_0 と Z_0

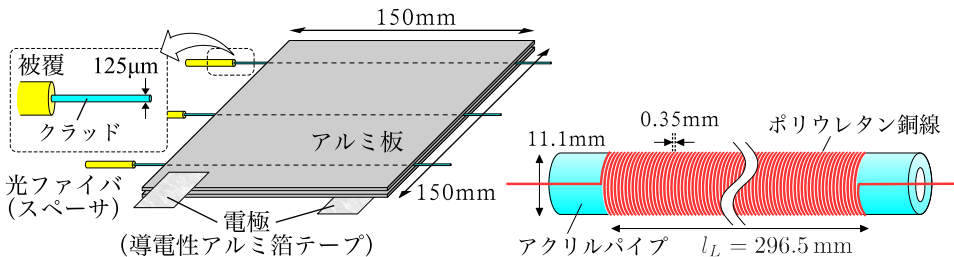
$$c_0 = \frac{\sqrt{\Lambda_L \Lambda_C}}{\sqrt{LC}} = 3.00(4) \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} = 373(4) \Omega$$

相対誤差 1.2% は幾何学的因子と LCRメータの測定誤差を含む

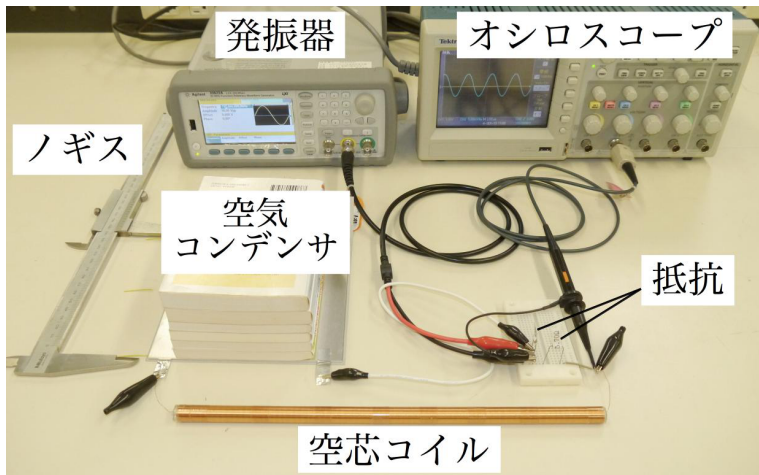
集中定数回路条件

- 素子のサイズや配線の長さ波長 $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ より十分小さいという条件
- 周波数 $f \sim 100 \text{ kHz} \rightarrow \lambda \sim 300 \text{ m}$
- コンデンサのサイズ: $d_C, \sqrt{S_C} \ll \Lambda_C = 180 \text{ m}$
- コイルのサイズ : $l_L, \sqrt{S_L} \ll \Lambda_L = 245 \text{ m}$

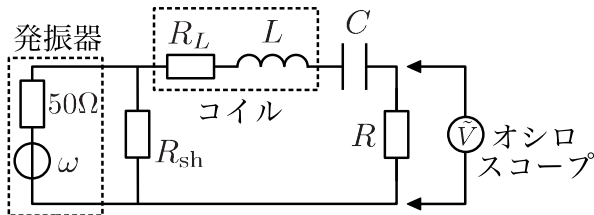


共振周波数測定の実験系

- 60 cm 四方の空間に実験系を構築



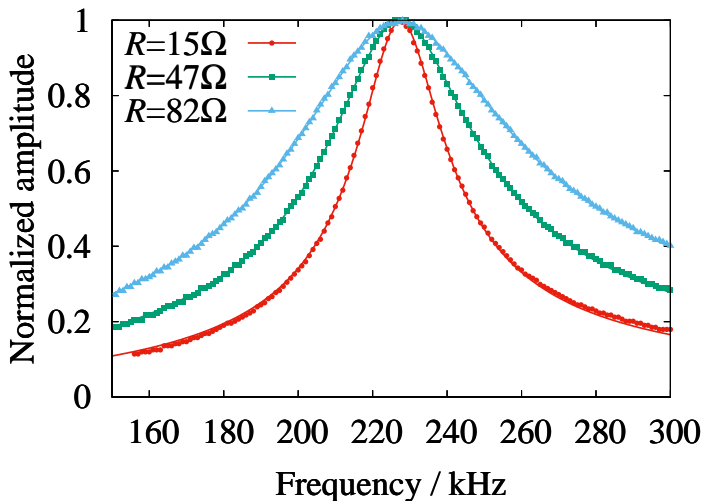
共振周波数測定系の等価回路



- 発振器の内部抵抗 50Ω により共鳴幅が広がる
→ ショント抵抗 $R_{sh} = 5.76(5)\Omega$ を挿入して出力インピーダンスを下げる
- コイルに使用した銅線の抵抗値 $R_L = 7.99(5)\Omega$
- 発振器 (任意波形発生器 33522A, Agilent, 周波数確度 2ppm)
- 電源電圧 5V で固定

共振周波数の測定結果

- 150 kHz～300 kHz を 1 kHz 刻みで電圧測定
- 複数の抵抗値 R について共振周波数を測定



共振周波数の測定結果

- 150 kHz～300 kHz を 1 kHz 刻みで電圧測定
- 複数の抵抗値 R について共振周波数を測定
- LCR メータによる測定よりも 1桁小さい相対誤差

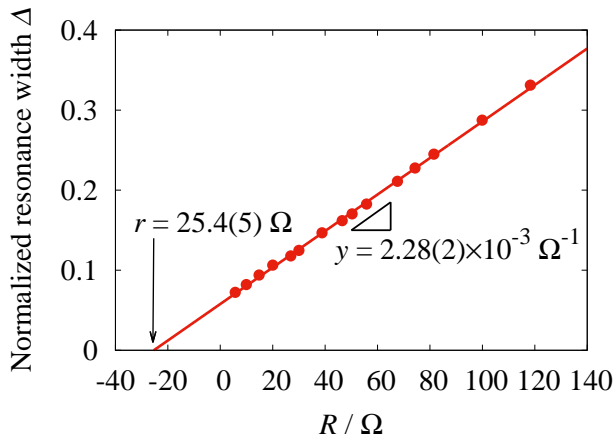
	LCR メータ	LC 共振回路
共振周波数 f_0/kHz	227(2)	227.53(13)
相対誤差	0.9%	0.06%

光速 $c_0 = \omega_0 \sqrt{\Lambda_L \Lambda_C} = 3.003(14) \times 10^8 \text{ m/s}$
(相対誤差 0.45% の主要因は Λ_L と Λ_C の測定誤差)

	LCR メータ	LC 共振回路
$c_0/(10^8 \text{ m/s})$	3.00(4)	3.003(14)
相対誤差	1.2%	0.45%

抵抗値 R に対する規格化共鳴幅の変化

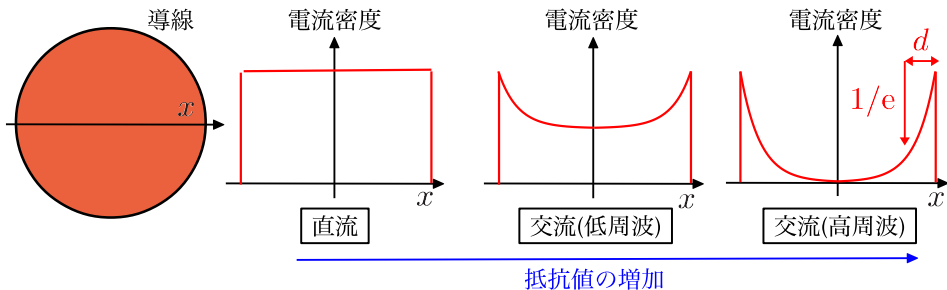
- 理論曲線フィッティングで共鳴幅を推定



$$Z_0 = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} = 376(4) \Omega$$

(相対誤差 1% の主要因はフィッティング誤差)

表皮効果

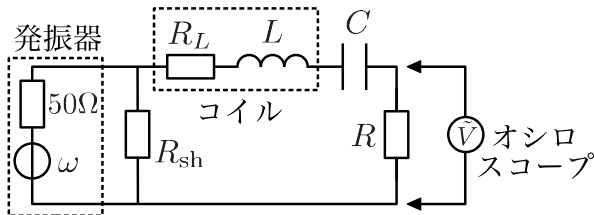


- 電流で生じる交流磁場が渦電流を形成して電流を打ち消す
→ 表皮厚さ $d \simeq \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$ に電流が集中
- 銅の場合は導電率 $\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, $\mu \simeq \mu_0$

周波数 f / kHz	100	200	↔ 銅線の直径 0.35 mm
表皮厚さ d / mm	0.2	0.1	

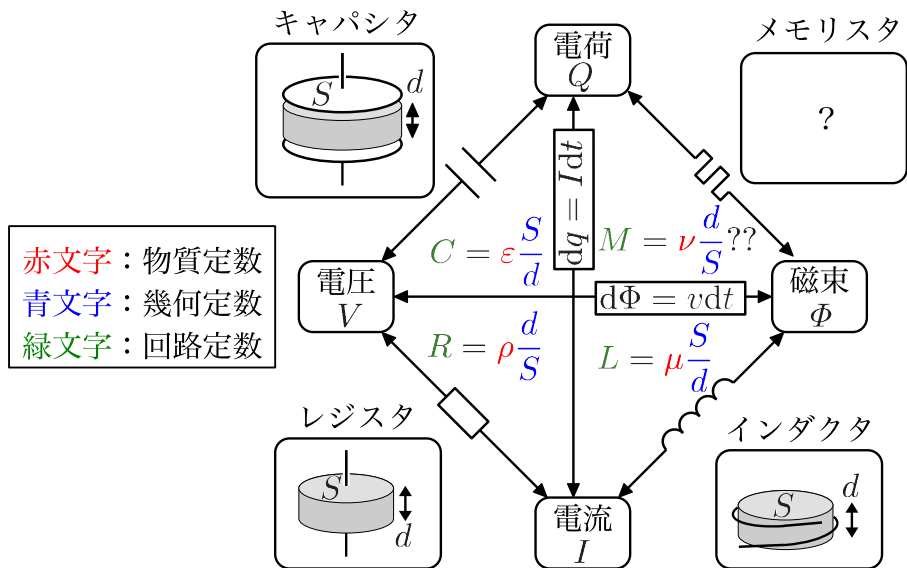
まとめ

- 北野正雄, 大学の物理教育 **21**, 126 (2015)
小林弘和, 北野正雄, 大学の物理教育 **21**, 130 (2015)
- LC 共振回路を用いた光速 c_0 と真空のインピーダンス Z_0 の測定手法を提案
- 数 10cm 四方というわずかな空間において幾何学的な長さとは電気的な応答から 1% 以下の相対誤差で c_0 と Z_0 を測定可能



	概略値	LCR メータ	LC 共振測定
$c_0/(10^8 \text{ m/s})$	2.998	3.00(4)	3.003(14)
Z_0/Ω	376.7	373(4)	376(4)

回路素子と構造



- JIS 規格の器差の許容値

測定長	許容値
50 mm 以下	± 0.05 mm
50 ~ 100 mm	± 0.06 mm
100 ~ 200 mm	± 0.07 mm
200 ~ 300 mm	± 0.08 mm