

Gross-Pitaevskii方程式による 超流動乱流のエネルギースペクトル

大阪市立大学理学部物理学科

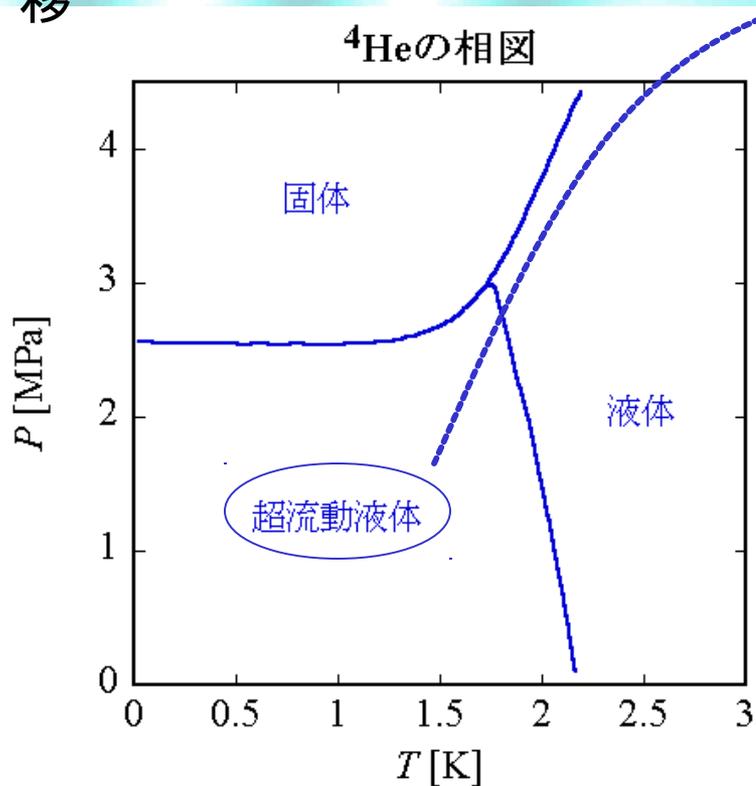
小林未知数・坪田誠

1. イントロダクション
2. 研究目的
3. モデル
4. 計算結果
5. 今後の課題
6. まとめ

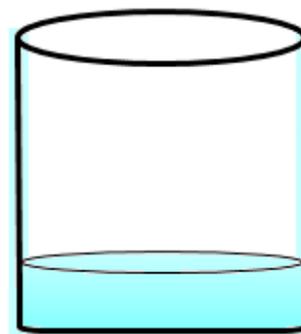
1、イントロダクション

超流動乱流とは？

液体 ^4He : 約2.17Kで超流動転移



^4He がボース・アインシュタイン凝縮を起こして、同時に粘性のない振る舞い(超流動)をする



超流動薄膜

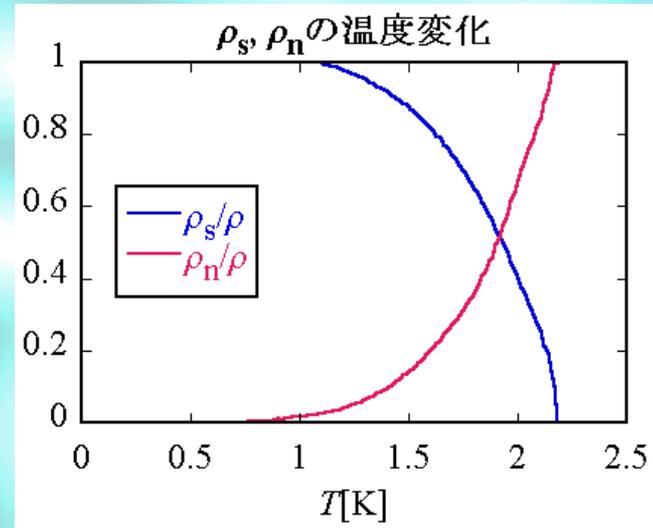
超流動のダイナミクス：二流体モデル

$$\rho = \rho_s + \rho_n$$

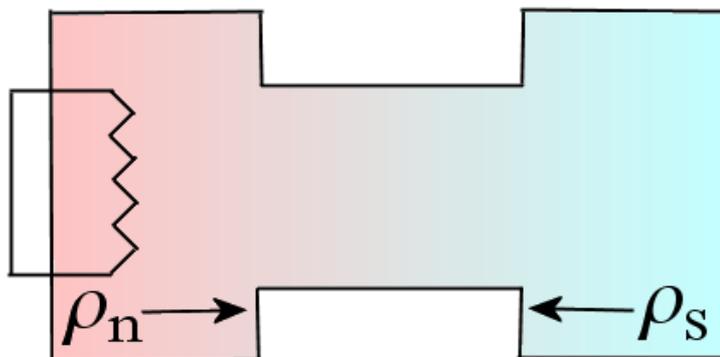
ρ : 全流体

ρ_s : 超流体 (エントロピー、粘性なし)

ρ_n : 常流体 (エントロピー、粘性あり)



二流体モデルを特徴付ける現象：熱対向流

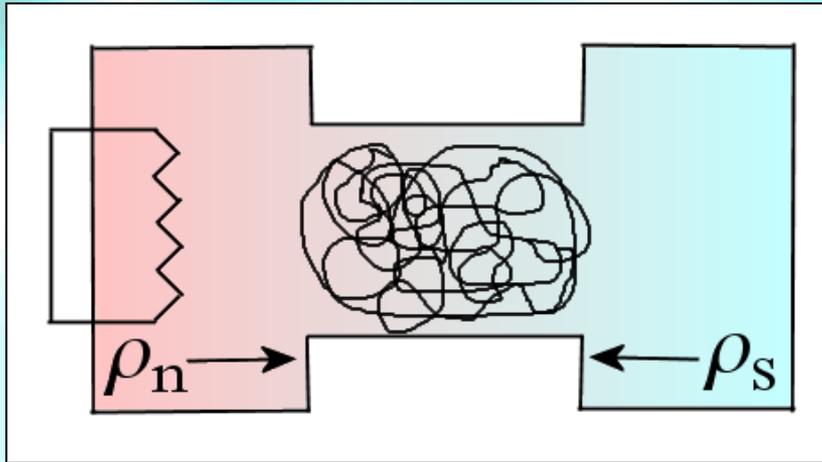


超流体 \Rightarrow 高温側へ

常流体 \Rightarrow 低温側へ

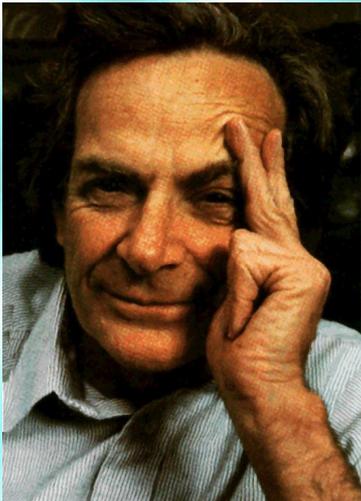
二流体が反対方向に流れる
 \Rightarrow 非常に大きな熱伝導度

相対速度がある値を超えると・・・



二流体の相対速度がある値を超えると、今まで散逸を伴わなかった熱対向流に散逸が生じる

Feynman



この散逸こそ超流体中の循環が量子化された量子渦のタングル状態：超流動乱流状態である！（1955）

Vinen



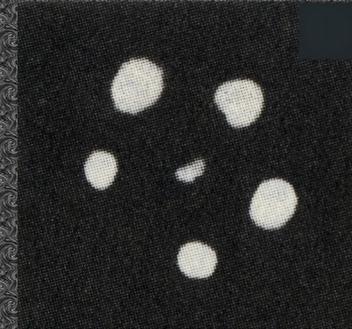
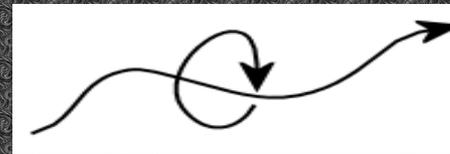
- 超流動 ^4He における量子化された循環 $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = nh/m$ を観測: **量子渦の発見**
- タングル状態の量子渦と常流体との摩擦である**相互摩擦力 (mutual friction)**を観測: **超流動乱流の発見 (1957)**

量子渦の特徴

•全ての量子渦はいたるところで同じ循環 $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = nh/m$ を持つ(実際には $n \neq 2$ の渦は不安定)

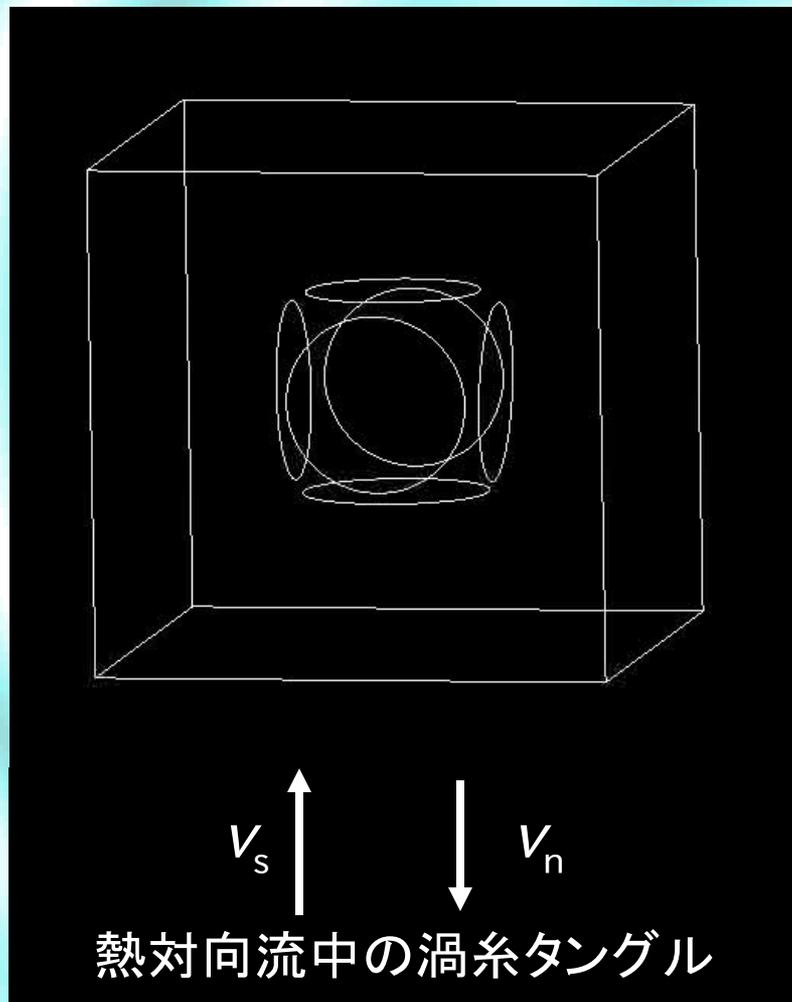
•粘性による渦の拡散がない: 安定に渦が存在する

•渦芯のサイズは数Å: 非常に微視的で理想的な渦糸である



量子渦格子の観測
(Packard 1982)

数値シミュレーションによる熱対向流中の量子渦糸タンゲルの裏付け

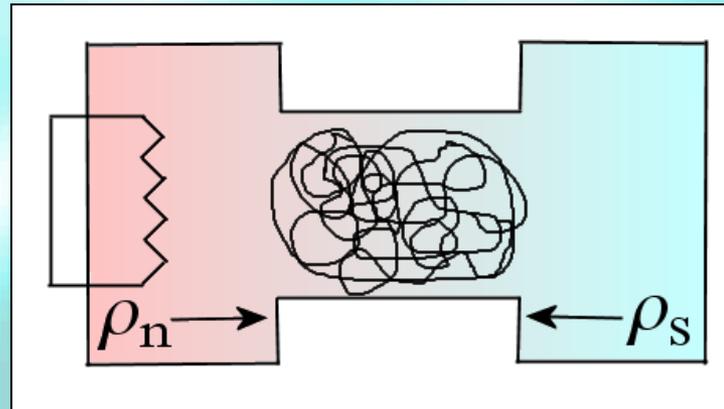


渦糸近似: 古典流体では近似であるが超流動ではrealisticとなる

⇒渦糸近似を用いて量子渦のダイナミクスを計算し、超流動乱流における様々な物理量の実験との定量的な一致を得た(Schwarz 1988)

⇒超流動乱流⇔渦糸タンゲルという描像の裏付け

熱対向流を用いて膨大な超流動乱流の研究が理論的、実験的に行われた



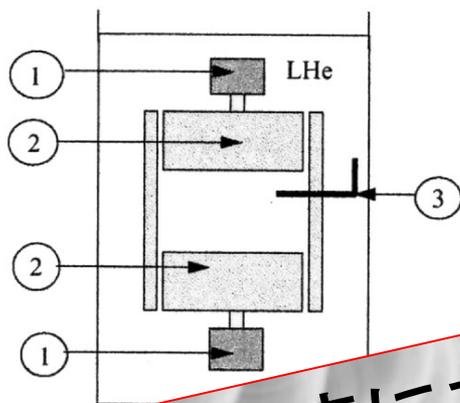
しかし

熱対向流中の超流動乱流は超流動に固有の現象であり、古典乱流との対応が全くない

⇒古典乱流と超流動乱流の関係は全く謎のままであった！

近年、状況は一転する

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. 43 (1), 29



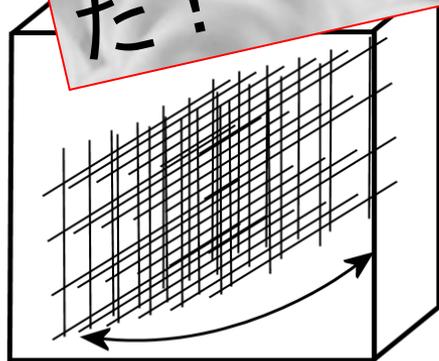
回転円盤中の超流動乱流

$T < 1K$

古典乱流においてよく用いられる実験
⇒古典乱流との対応が可能になっ
た！

S. R. Stalp
(1999)

Phys. Rev. Lett. 82, 4831



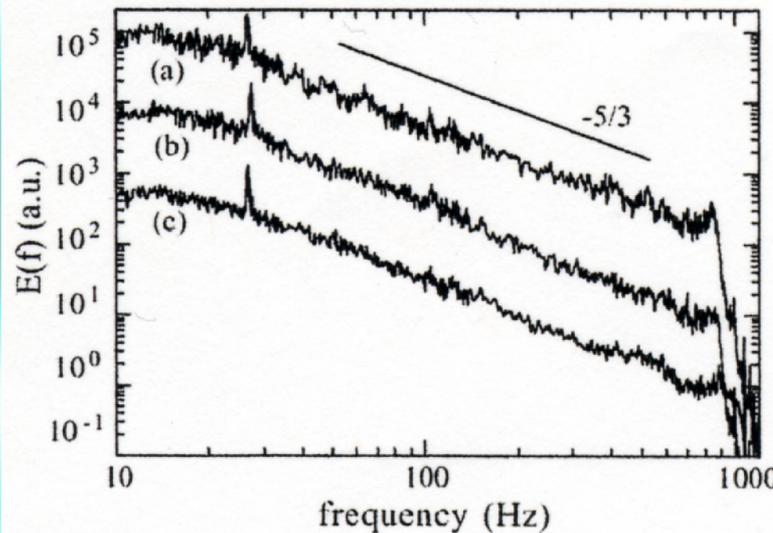
振動格子中の超流動乱流

$T > 1K$

超流動乱流と古典乱流の関係 は？

J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)

S. R. Stalp, L. Skrbek, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. Lett. **82**, 4831 (1999)



エネルギー
スペクトル

(a) 2.3 K

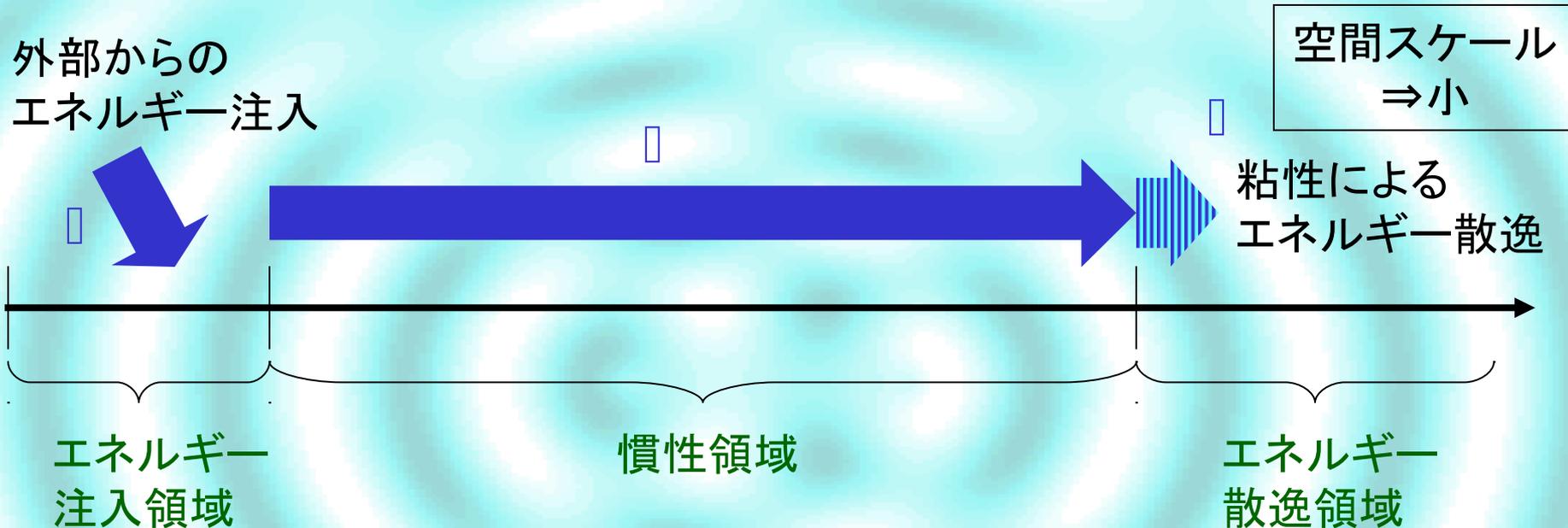
(b) 2.08 K

(c) 1.4 K

$T > 1$ Kでの超流動乱流において古典乱流の統計則であるKolmogorov則が観測された

⇒超流動乱流と古典乱流の類似性が観測された

Kolmogorov則: 発達した一様等方定常な非圧縮性古典流体の乱流における統計則

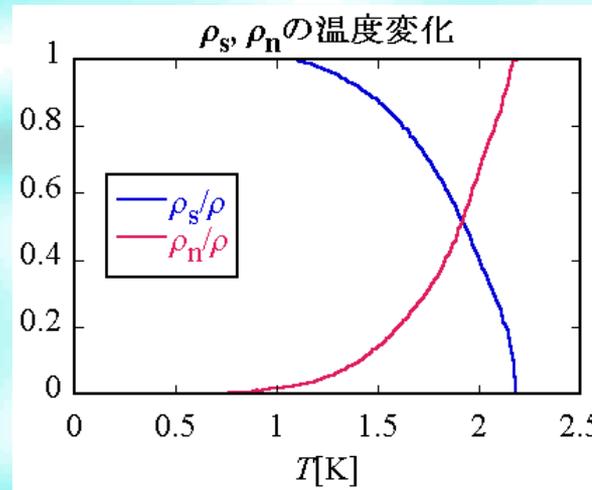
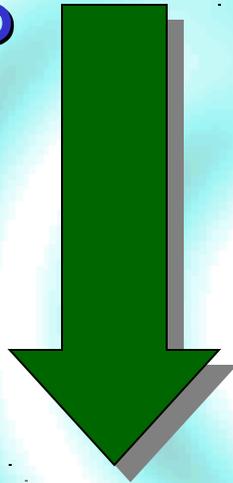


慣性領域ではエネルギーが散逸されることなく、系の詳細に依存しないスケール普遍性を持ち、エネルギースペクトルがKolmogorov則で与えられる

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (C \sim 1)$$

k : 波数 ϵ : エネルギー散逸率
 C : Kolmogorov定数

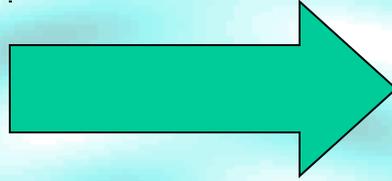
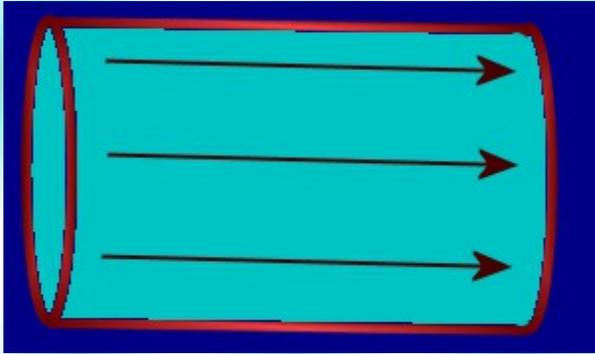
高温での超流動乱流の古典乱流との類似⇒古典乱流のように振舞う常流体と量子渦との間に相互摩擦力(mutual friction)が働くことによって起こる



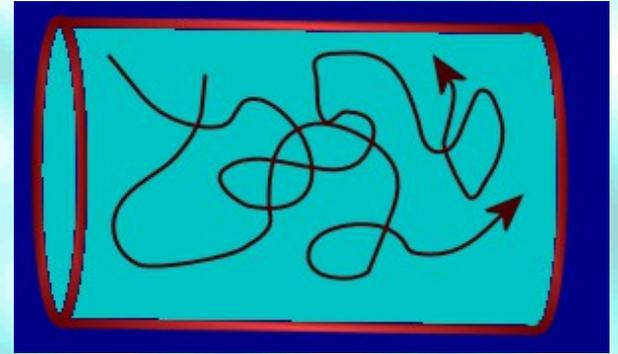
常流体のない絶対零度近傍でも古典流体との類似性はあるのか？

W. F. Vinen, Phys. Rev. B **61**, 1410 (2000)

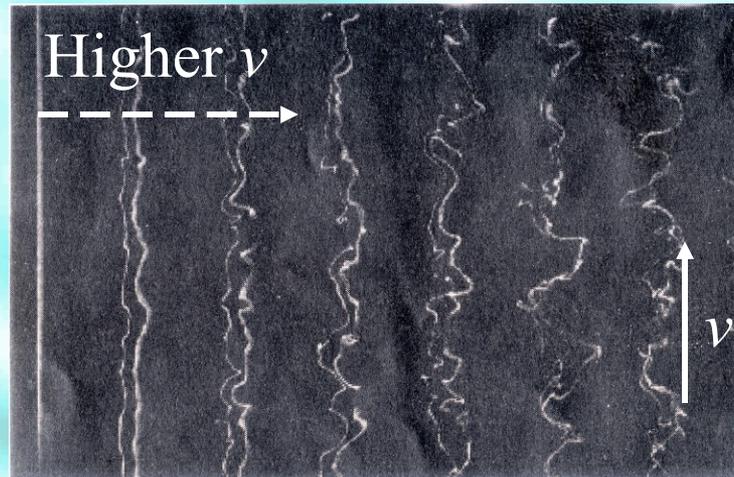
乱流



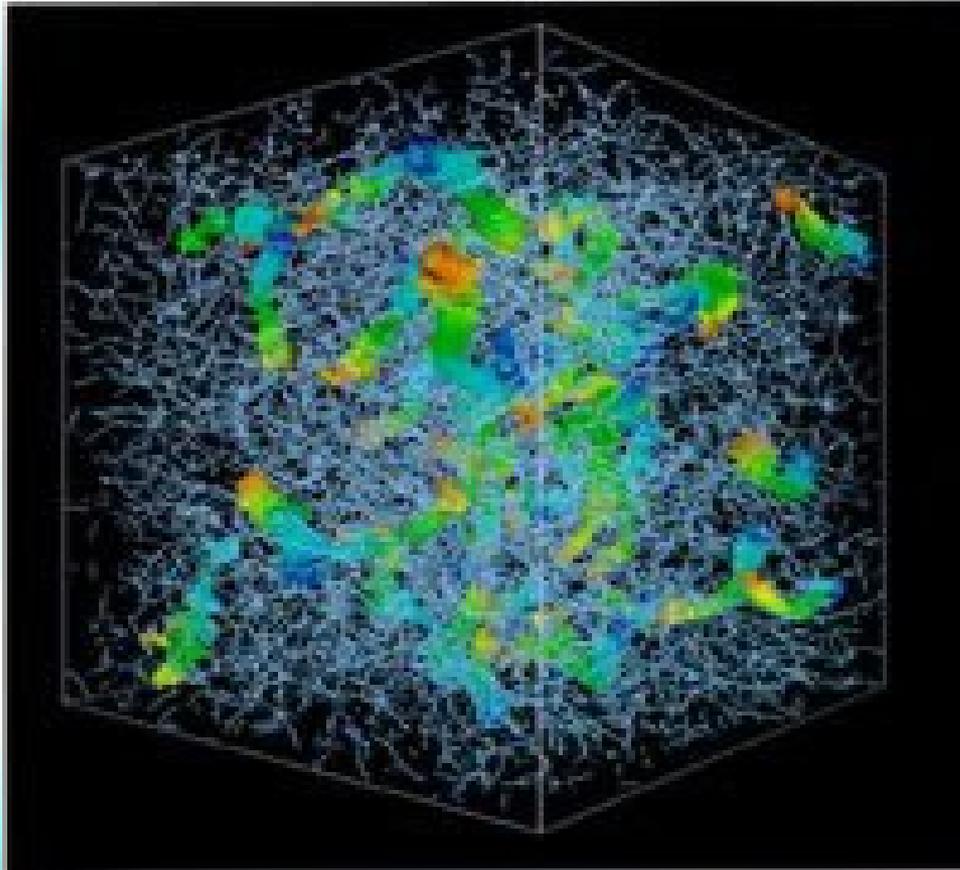
流速を上げると



層流から乱流への転移



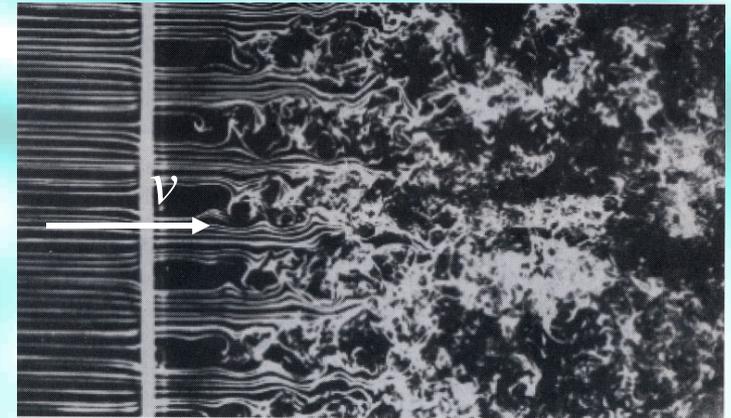
古典乱流と渦



Navier-Stokes方程式の数値解析 (核融合研 木田重雄氏)

一様等方乱流中の低圧力旋回渦の中心軸と芯領域の可視化

格子乱流

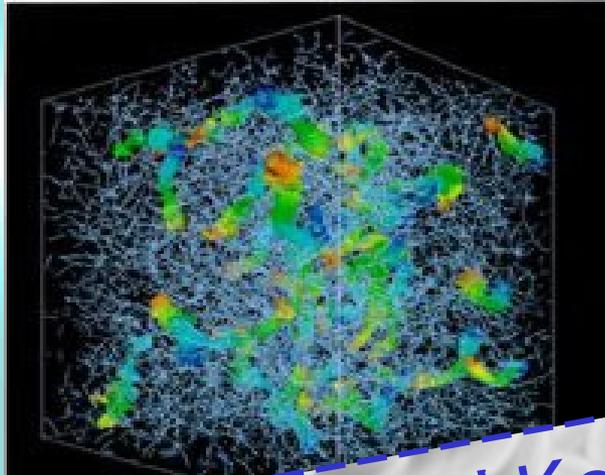


カルマン渦



古典乱流においても渦は重要な役割を果たす

古典乱流における渦

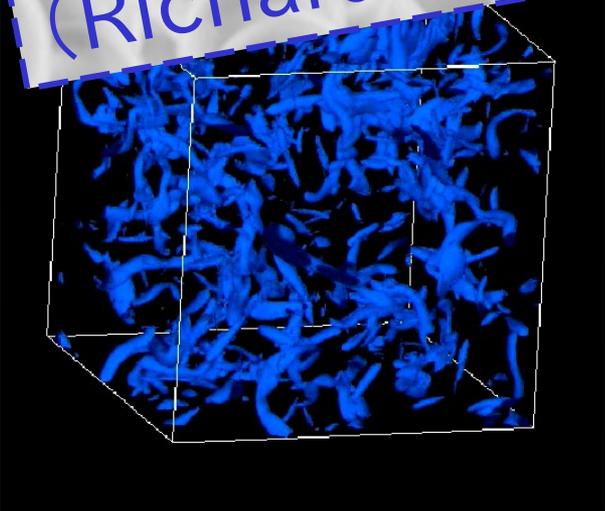


- 渦度 $\omega = \text{rot } v$ は連続的な値をとる
- 循環は任意の値をとる

古典乱流ではKolmogorov則と渦との関係 (Richardsonカスケード) が自明でない！

渦の長さスケールはKolmogorov長 $\sim (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}$ 程度

渦の同定そのものが困難！
(渦が安定ではない)



再び超流動における渦

高温

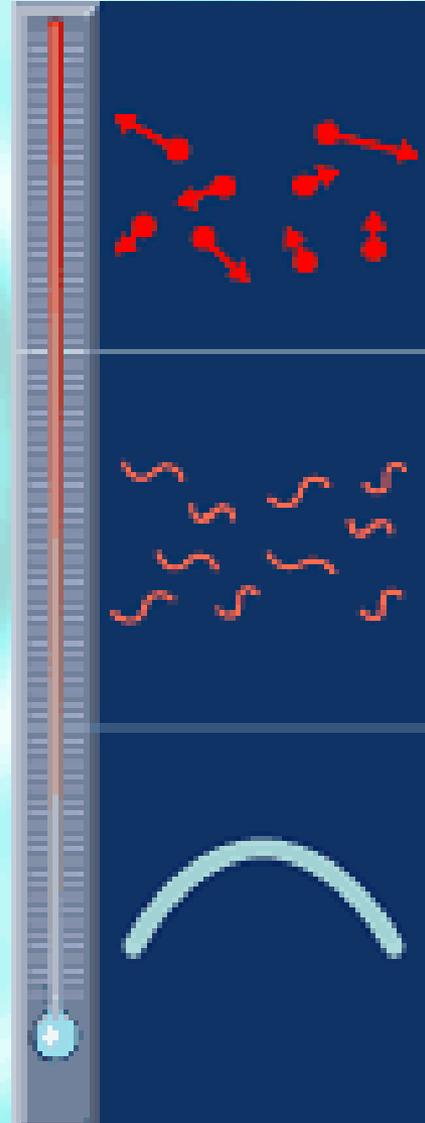
粒子性が顕著

古典流体から
量子流体へ

波動性が現れる
(物質波)

個々の波が全て重なって巨視的波動関数を作る
(ボース・アインシュタイン凝縮)

低温



巨視的波動関数の時間発展：Gross-Pitaevskii方程式

Gross-Pitaevskii(GP)方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

Φ : 巨視的波動関数

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間斥力相互作用の結合定数

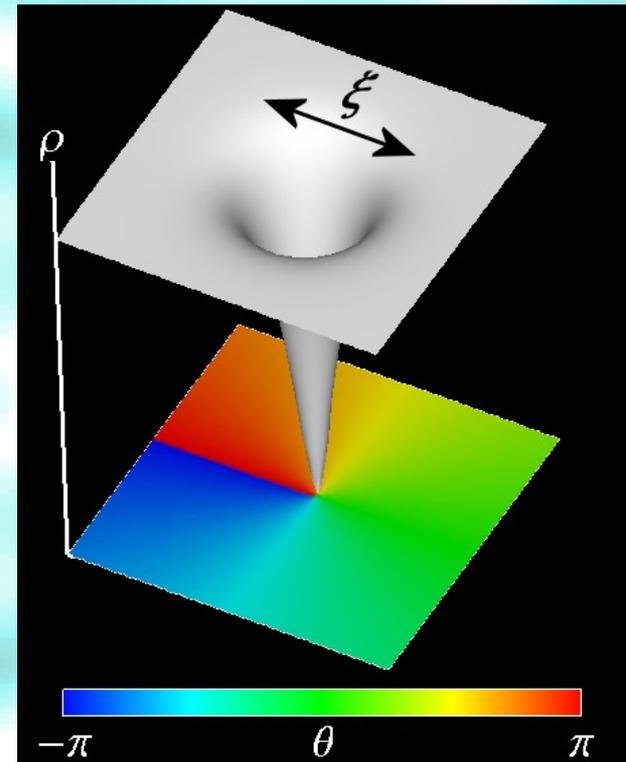
巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

渦芯のサイズ (回復長) $\xi = 1/\sqrt{2mg\rho}$

波動関数の位相欠陥



位相欠陥のみで速度場
は回転する

•循環の量子化

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{2\pi\hbar}{m}$$

•渦は安定

•渦は端を持たない(渦輪で存在)

•渦芯は回復長 ξ 程度であり、絶対零度近傍は ξ より小さいスケールでの渦が存在する(液ヘリウムなど)。

$$\xi = \hbar / \sqrt{2mg\rho}$$

超流動乱流の構成要素は安定で循環のそろった量子渦

古典流体の渦のよけいな自由度を取り除いた渦のskeleton

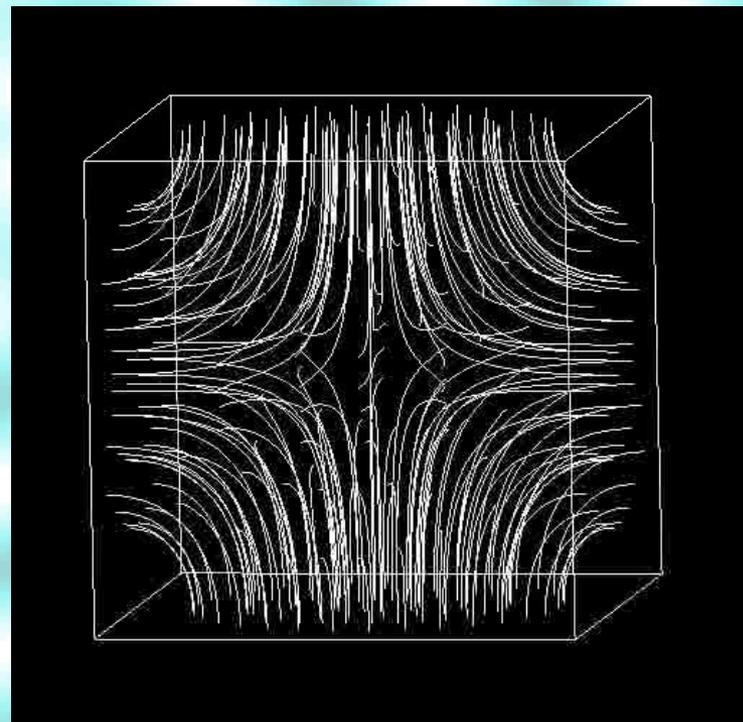
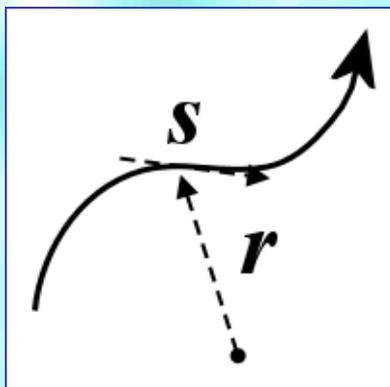
絶対零度近傍の超流動乱流は慣性領域におけるKolmogorov則とRichardsonカスケードの関係を明らかにする理想系になるかもしれない

極低温の超流動乱流：過去の計算1

T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301
(2002)

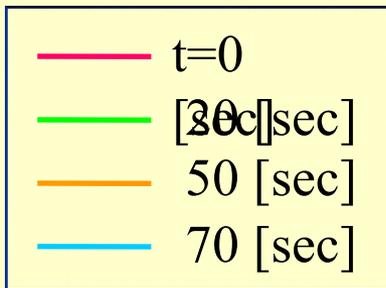
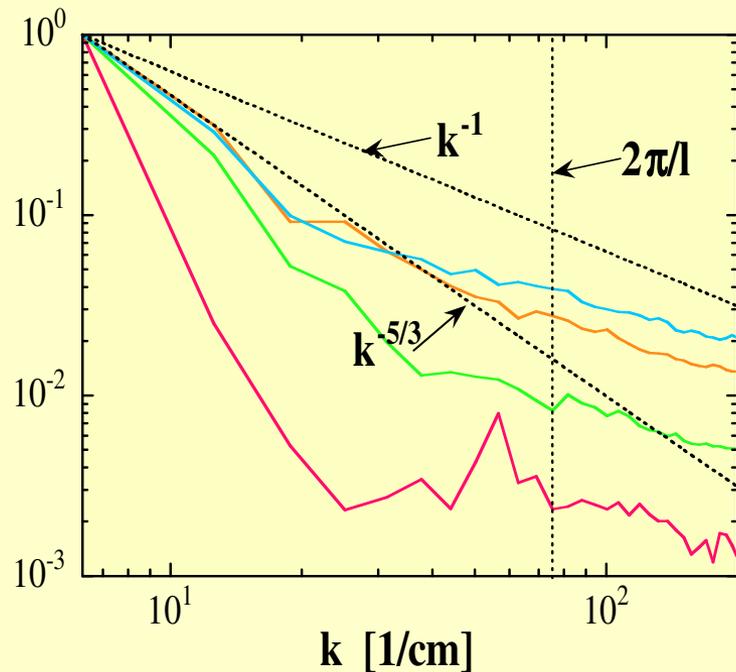
渦糸が作る速度場をビオ・サバールの定理を用いて求め、そこから渦糸のダイナミクスを計算する(初期状態: Taylor-Green-flow)。

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3}$$
$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{s})$$

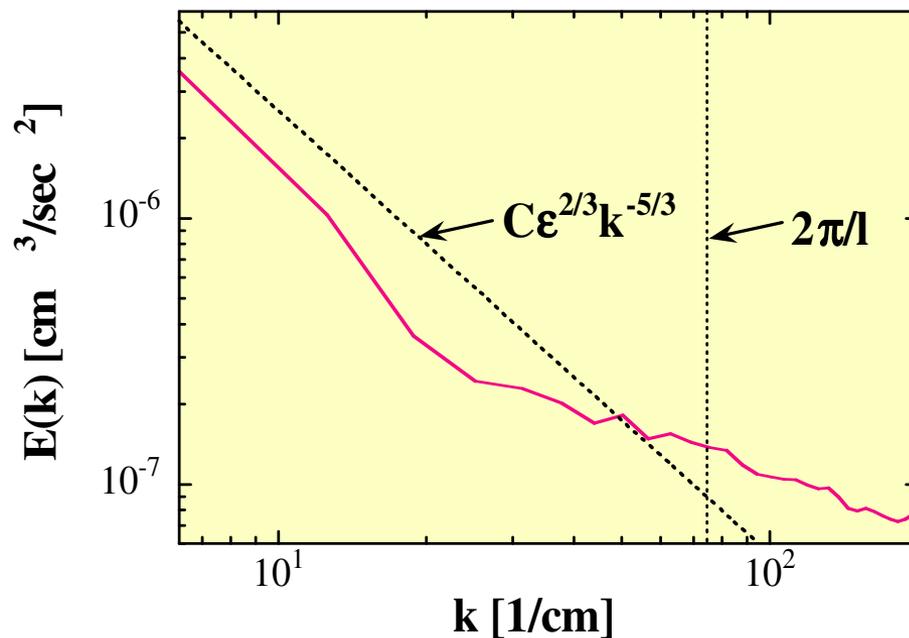


超流動乱流

エネルギースペクトルの時間発展

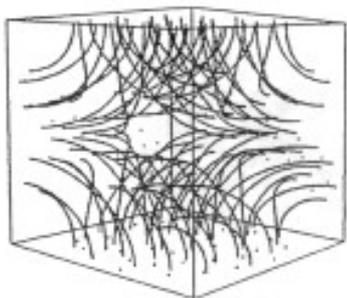


コルモゴロフ則との比較($C=1$)

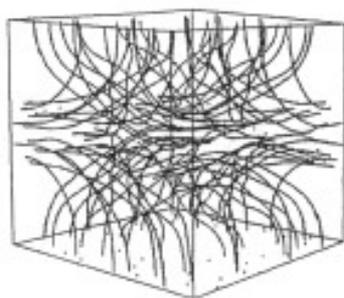


低波数側でエネルギースペクトルがKolmogorov則と定量的に一致した！

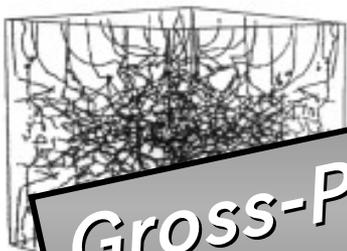
極低温の超流動乱流：過去の計算2



(a) $t=2$



(b) 4



(e) 10

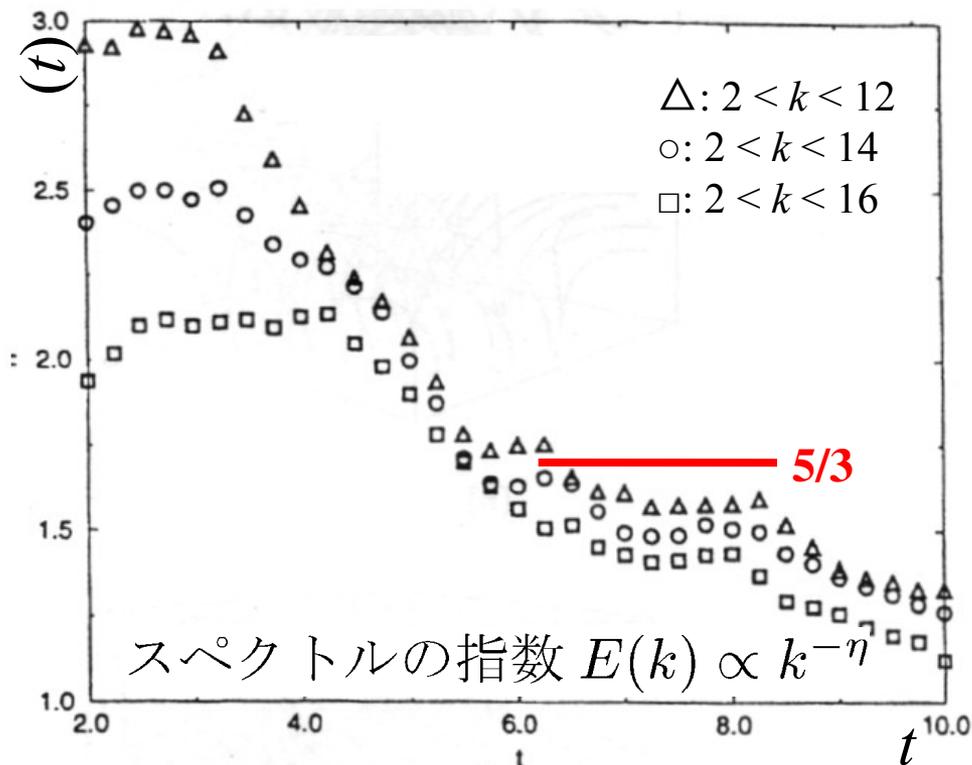


(f) 12

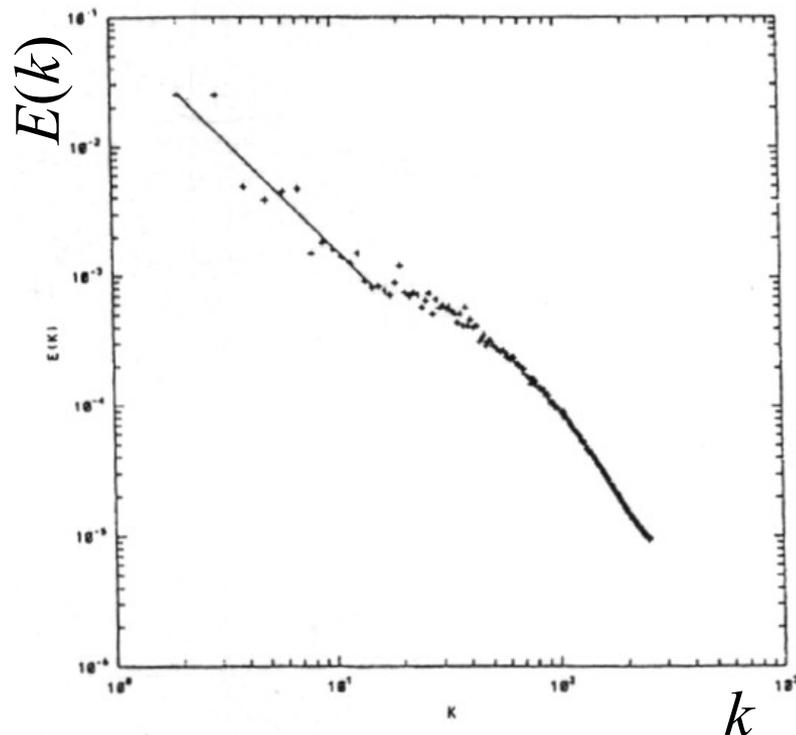
C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997)

Gross-Pitaevskii方程式は圧縮性流体の方程式であるため、全系のエネルギーは保存するものの、渦のエネルギーはどんどん音波へと転化してゆく！

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$



スペクトルの指数の時間発展



$t=5.5$ でのエネルギースペクトル
 (非圧縮性運動エネルギー)

時間発展の途中でエネルギースペクトルがKolmogorov則を示すが、その後音波放出の圧縮性効果が顕著になることでスペクトルはKolmogorov則から外れてゆく。

2、研究目的

- Gross-Pitaevskii方程式を用いて絶対零度の超流動乱流のダイナミクスを調べる
- Gross-Pitaevskii方程式に音波のみを散逸させる散逸項を導入し、音波の影響を消す

3、モデル

巨視的波動関数 $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$

密度 $\rho = |\Phi|^2$

流体の速度場 $\mathbf{v} = \hbar/m \nabla \theta$

渦芯のサイズ (回復長) $\xi = 1/\sqrt{2mg\rho}$

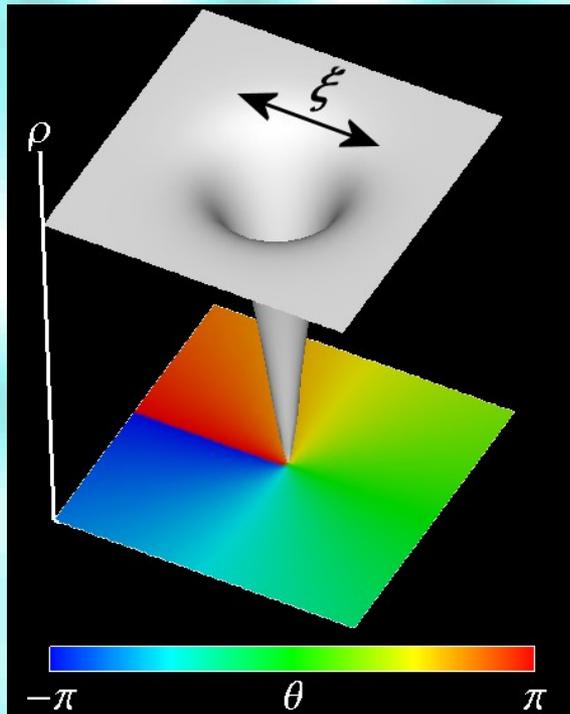
Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

Φ : 巨視的波動関数

μ : 化学ポテンシャル

g : 粒子間斥力相互作用の結合定数



量子渦

長さ : ξ

エネルギー : $E = \hbar^2/2m\xi^2$

時間 : \hbar/E

で無次元化

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\nabla^2 - \mu + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

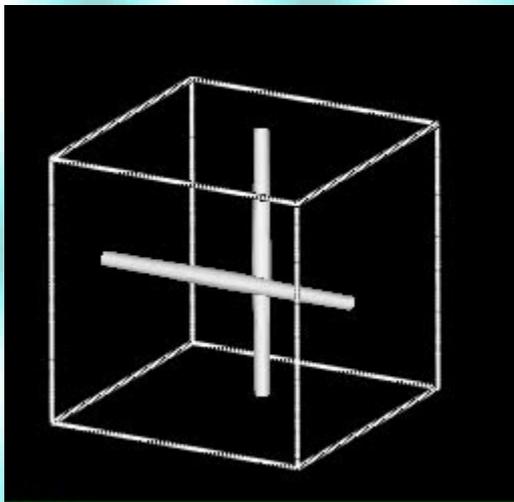
計算方法：スペクトル法

Gross-Pitaevskii方程式のフーリエ変換

$$[i - \gamma(k)] \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left[(k^2 - \mu) \Phi(k) + \frac{g}{V^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2) \right]$$

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$: 回復長 ξ より短いスケールで効く散逸

渦の再結合



GP方程式は圧縮性流体の方程式であり、渦の再結合時や渦芯の大きさまで小さくなった渦輪の消滅時に回復長より短い波長の音波(素励起)を放出する(絶対零度における量子渦の唯一の散逸)
⇒渦と相互作用し乱流のダイナミクスに影響を与えます

□によって音波のみを散逸させる

⇒量子渦のみによって作られる超流動乱流のプロトタイプ

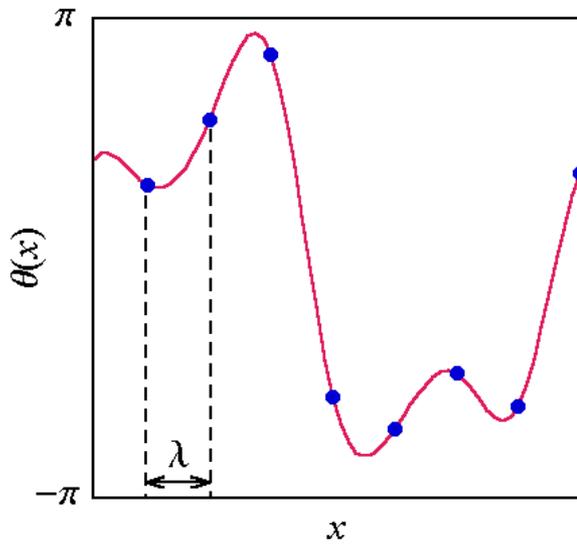
初期状態：ランダムな位相

$$\Phi = \sqrt{\rho} \exp(i\theta)$$

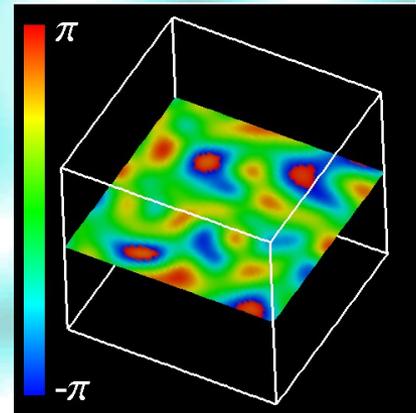
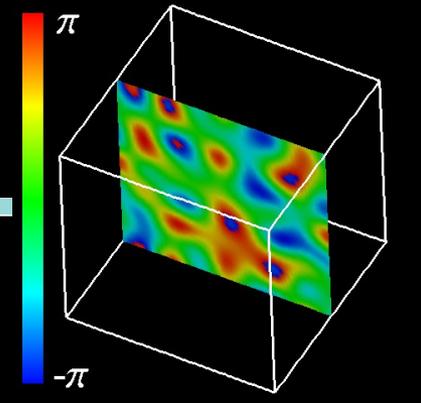
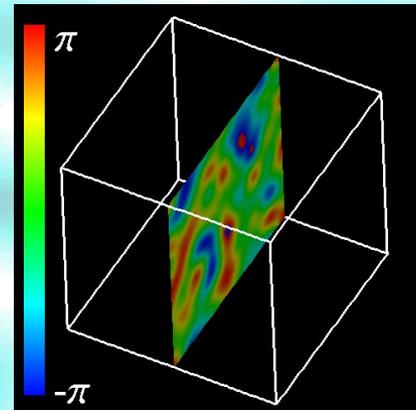
$\rho(t=0)$ は一様

$\theta(t=0)$ は空間に対してランダム

ランダムな位相の例(1次元)



3次元に
応用



初期の速度場はランダムな大きさと向きを持つので動的に不安定⇒すぐに多くの渦を作って**一様等方な乱流**となる

4、計算結果

時間発展: Runge-Kutta-Verner
法(8段6次Runge-Kutta法)

$256 \times 256 \times 256$ grids, $\Delta x = 0.0625$, $\Delta t = 0.001$
 $\xi = 1, \lambda = 4, g = 1$

$0 < t < 6$

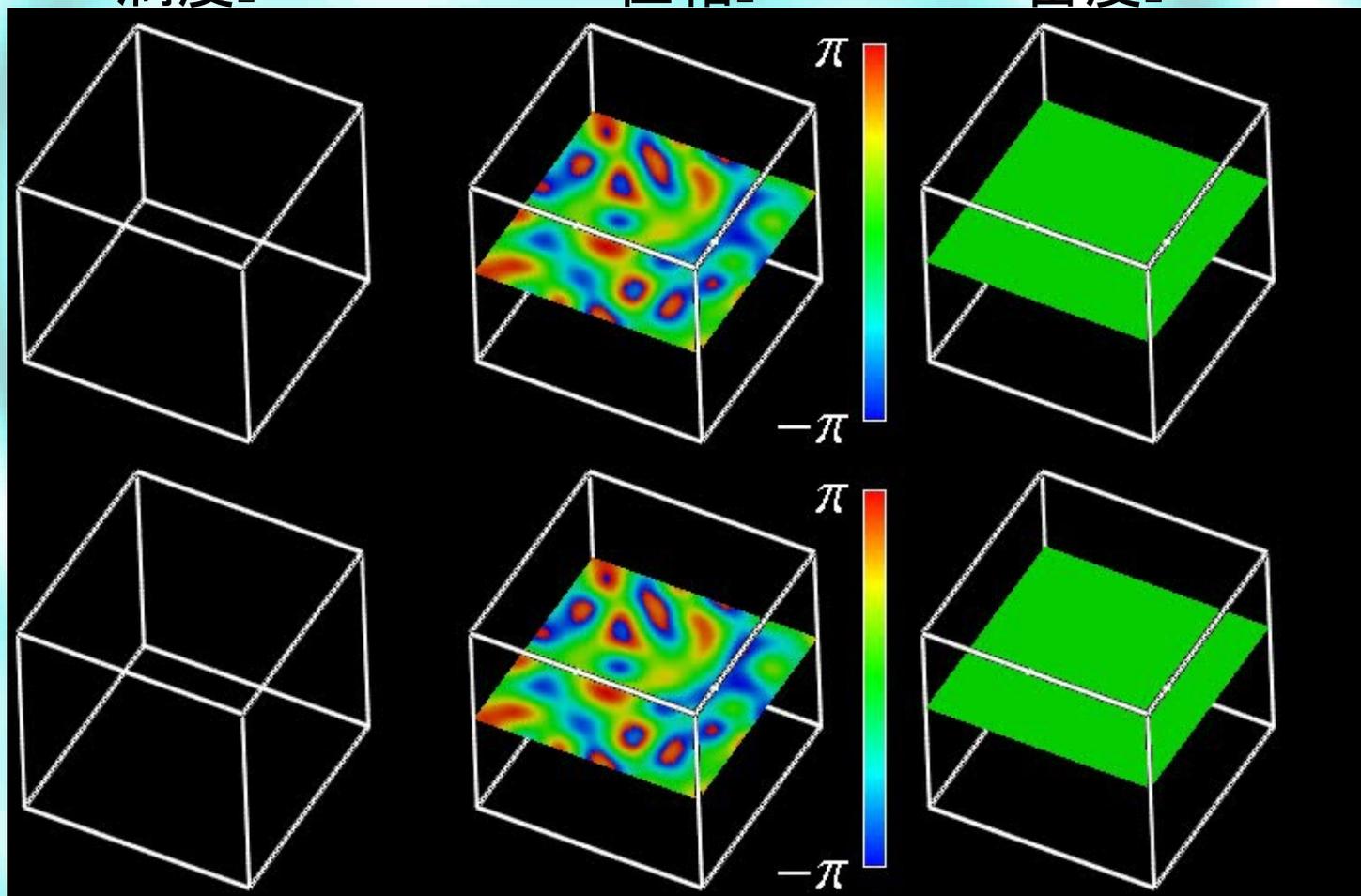
$\rho_0 = 0$
(散逸なし)

$\rho_0 = 1$
(散逸あり)

渦度

位相

密度



散逸(□₀=1)となし(□₀=0)との比較

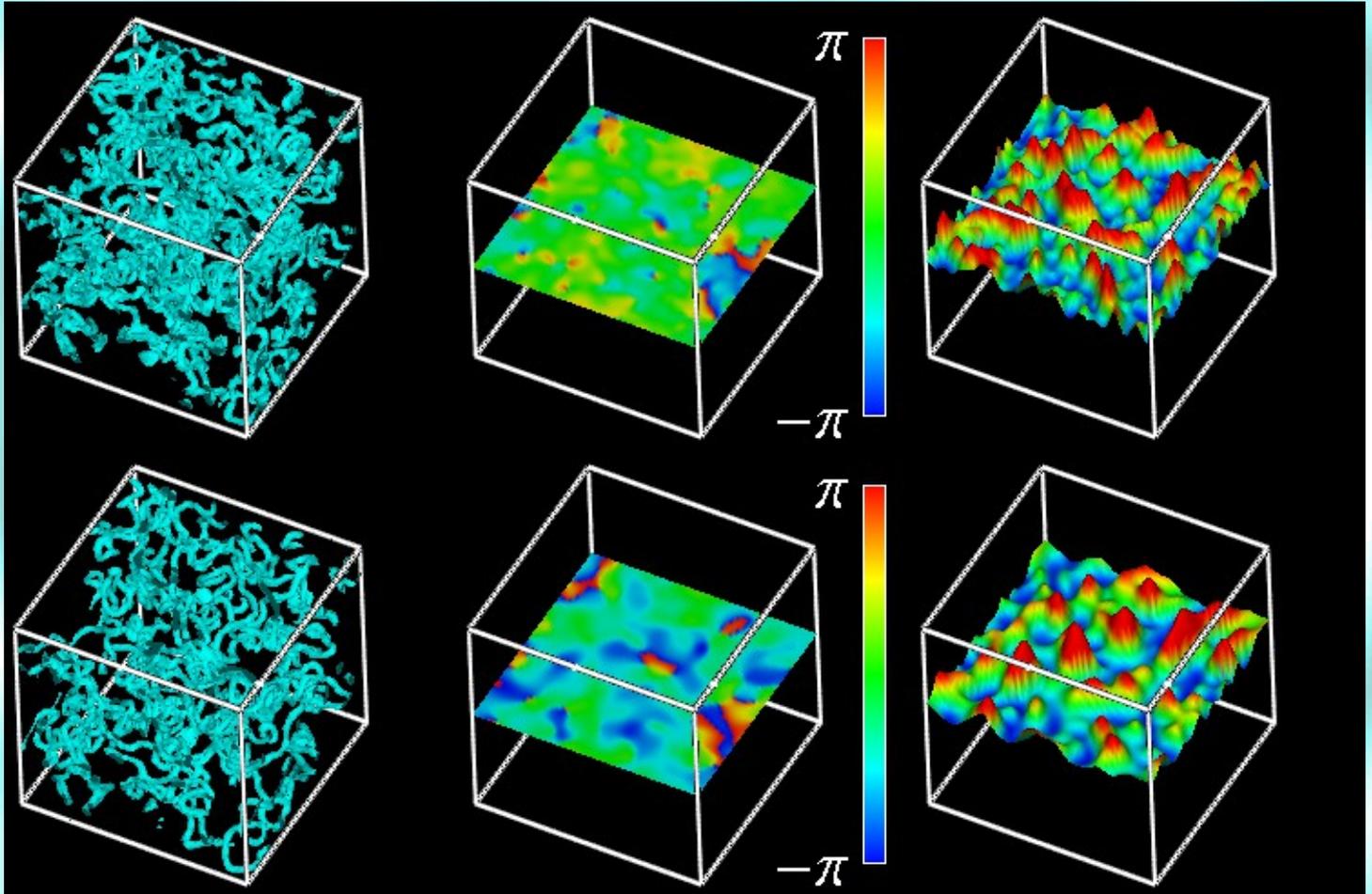
t = 5

渦度□

位相□

密度□

□₀=0
(散逸なし)



□₀=1
(散逸あり)

□₀=0 のときに現れる細かい構造(音波)が□₀=1では消えている

もし波数に依存しない散逸を入れたら？

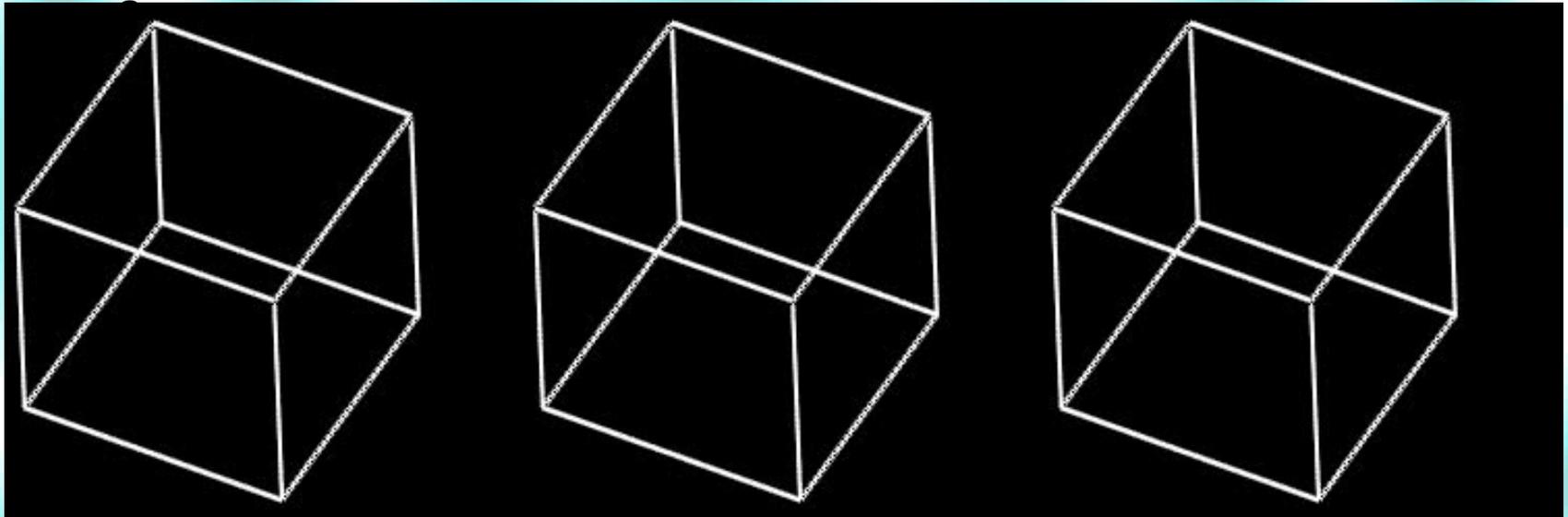
$\gamma(k) = \gamma_0$: 全てのスケールで効く散逸

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$: 短いスケールのみで効く散逸

$$\nu(k) = \nu_0$$

$$\nu(k) = \nu_0$$

$$\nu(k) = \nu_0 \nu(k -$$



波数に依存しない散逸は音波のみならず渦まで散逸させる \Rightarrow 渦のダイナミクスを調べるには不適當

$$E = \int dx \Phi(x)^* [-\nabla^2 + g/2|\Phi(x)|^2] \Phi(x)$$

全エネルギー

$$E_{\text{int}} = g/2 \int dx |\Phi(x)|^4 \text{相互作用エネルギー}$$

$$E_{\text{q}} = \int dx [\nabla|\Phi(x)|]^2 \text{量子エネルギー}$$

$$E_{\text{kin}} = \int dx [|\Phi(x)|\nabla\theta(x)]^2 \text{運動エネルギー}$$

$$E_{\text{kin}}^i = \int dx [\{|\Phi(x)|\nabla\theta(x)\}^i]^2$$

$$\text{div}\{|\Phi(x)|\nabla\theta(x)\}^i = 0$$

E_{kin} の非圧縮性

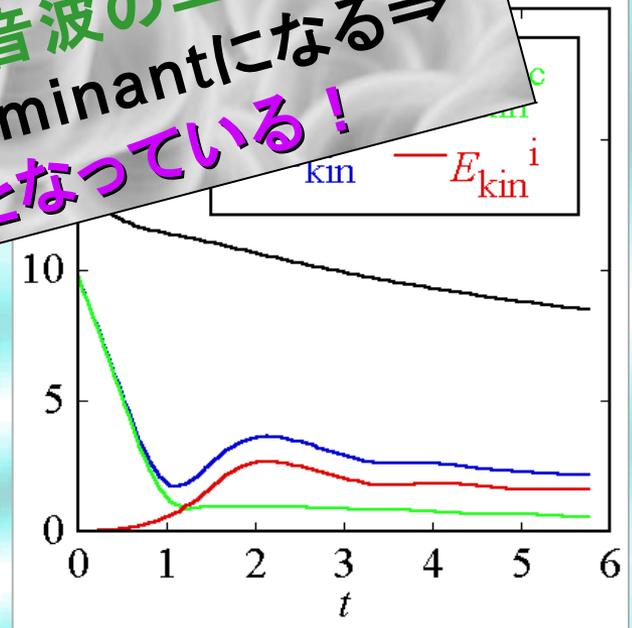
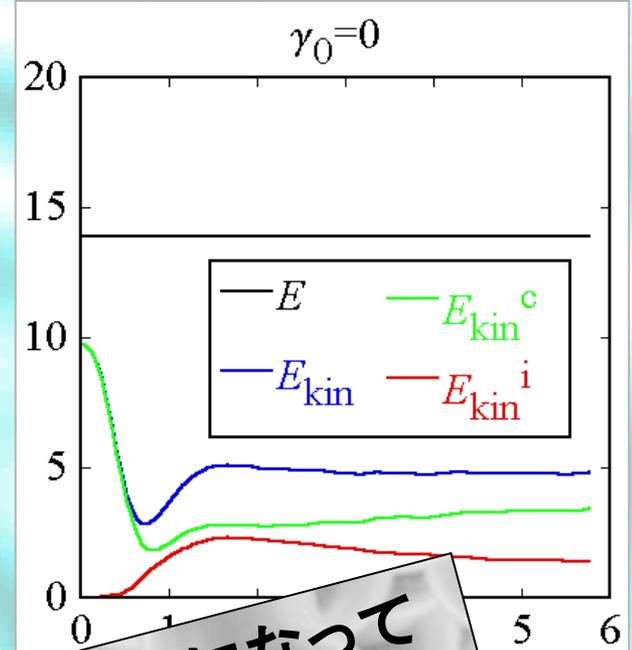
$$E_{\text{kin}}^c$$

ro

E_{kin} (音波の運動エネルギー)

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{q}} + E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^i + E_{\text{kin}}^c$$



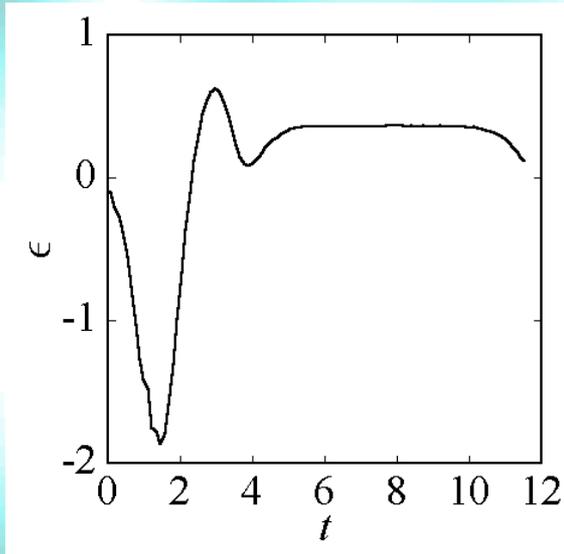
散逸がないと音波のエネルギーがdominantになって
 いるのに対し、散逸を導入することで音波のエネルギーが散逸し、渦のエネルギーがdominantになる⇒
 散逸による音波のみの抑制が有効となっている！

散逸($\beta_0=1$)となし($\beta_0=0$)との比較

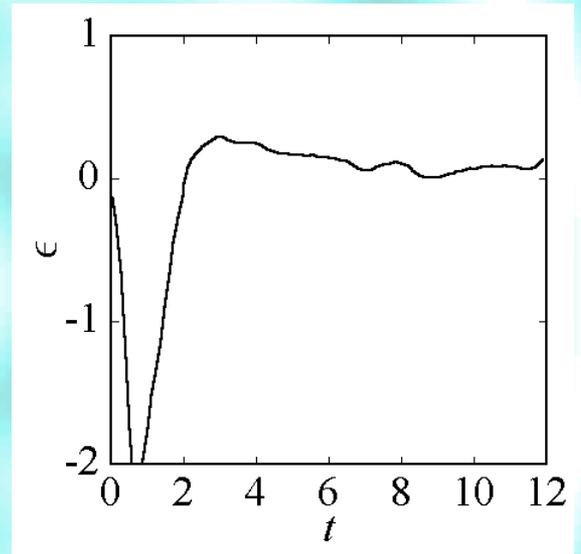
非圧縮運動エネルギーの散逸率

$$\epsilon = -\frac{\partial E_{\text{kin}}^i}{\partial t}$$

$\beta_0=1$



$\beta_0=0$



$\beta_0=1$ の場合、エネルギー散逸率は $4 < t < 10$ でほぼ一定となるのに対し、 $\beta_0=0$ では落ち着かずに時には負になることもある

⇒音波の運動エネルギーが渦の運動エネルギーへと逆流している

□□□□($\square_0=1$)となし($\square_0=0$)との比較

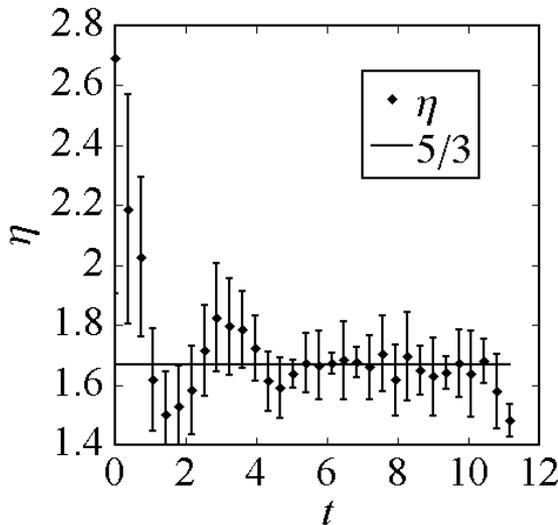
エネルギースペクトルの指数

$$E_{\text{kin}}^i = \int dk E_{\text{kin}}^i(k)$$

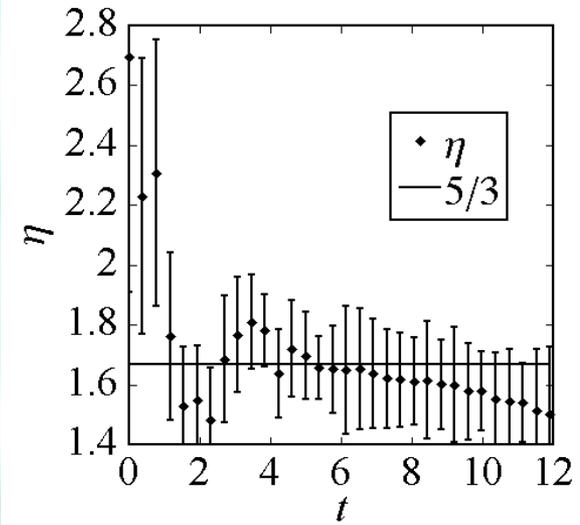
$$E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^{-\eta} \text{ (慣性領域)}$$

エネルギーが散逸しないスケール
 $\square k < k < 2 \square \square / \square \square (0.20 < k < 6.3)$
を慣性領域として定義する

$\square_0=1$



$\square_0=0$

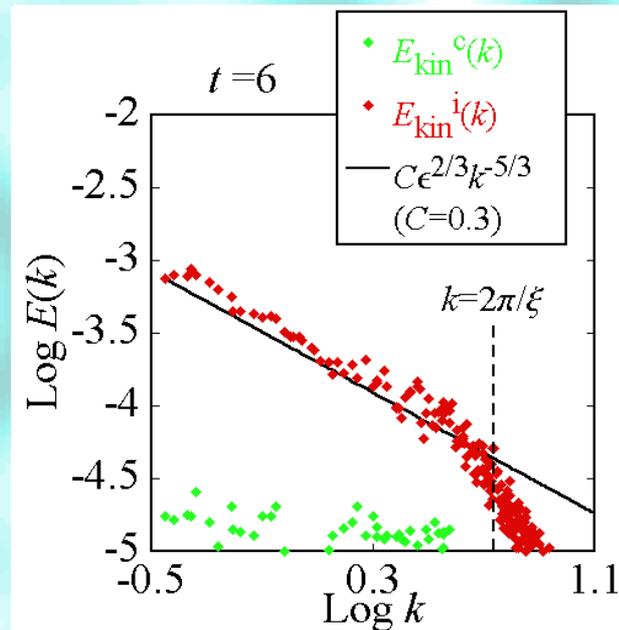
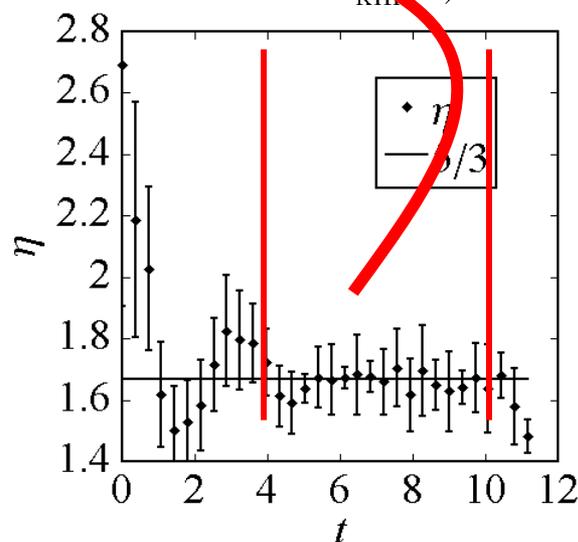
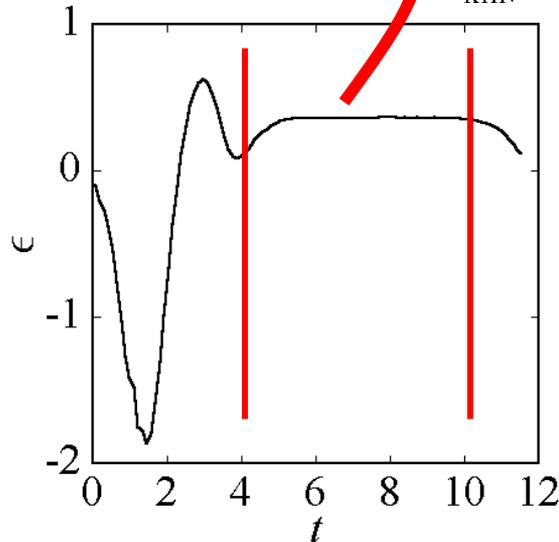


散逸がないとKolmogorov則との一致は短くなる⇒音波の影響が無視できない

Kolmogorov則との比較

一定の ϵ と η \Rightarrow 一定のKolmogorovスペクトル $E(k) \propto k^{-5/3}$

エネルギー散逸率 $\epsilon = -\partial E_{\text{kin}}^i / \partial t$ スペクトルの指数 $E_{\text{kin}}^i(k) \propto k^{-\eta}$



音波の影響を取り除くことで、超流動乱流中の量子渦ダイナミクスは古典乱流との類似性を示した。

5、今後の課題

今まで扱ってきた乱流：散逸のある減衰乱流
⇒乱流はいずれ平衡状態へと向かってゆく



大きなスケールからエネルギーを注入することにより、定常乱流をつくることができる：古典乱流とのより深い関係を調べることができる。

散逸のない通常のGross-Pitaevskii方程式との最も異なる点

定常乱流の作成

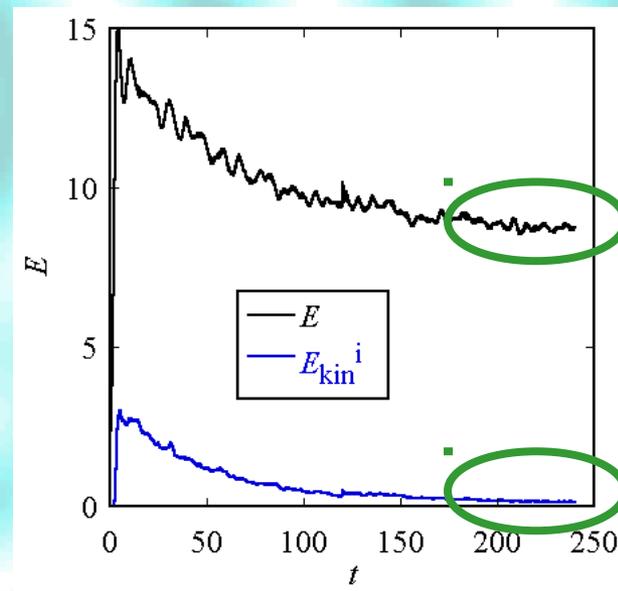
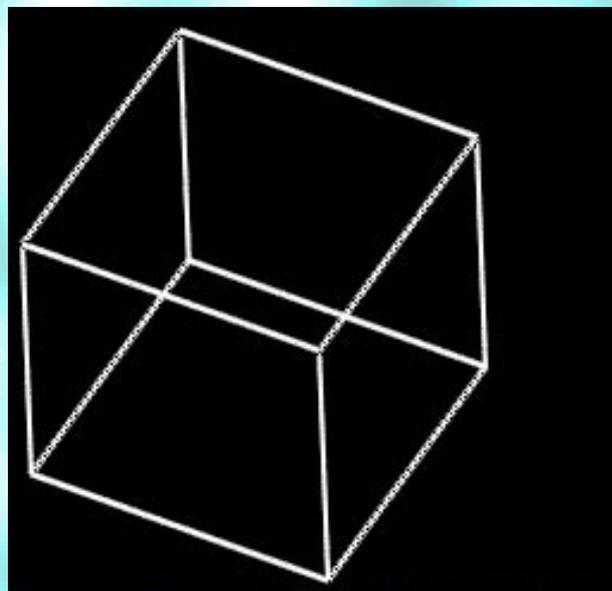
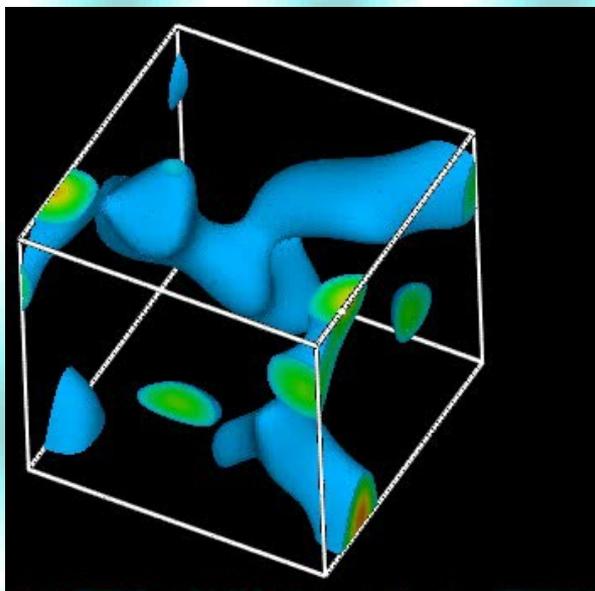
$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\nabla^2 - \mu + V + g|\Phi|^2 \right] \Phi$$

$V = V(\mathbf{x}, t)$: 時間に依存するポテンシャル

$V(\mathbf{x}, t)$ の例

定常乱流へ...

エネルギーの時間発展



時間発展の計算とエネルギースペクトルの計算が現在進行中！

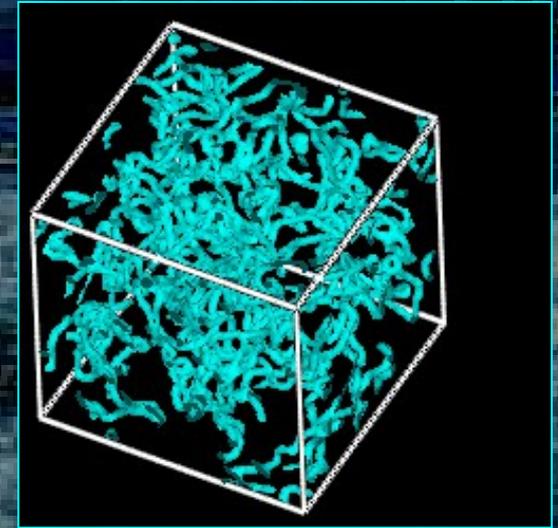
6、まとめ

1. Gross-Pitaeskiï方程式による絶対零度での超流動乱流の数値シミュレーションを用いて、古典乱流との対応を議論した
2. Gross-Pitaeskiï方程式は圧縮性流体の方程式であるため、渦の再結合等によって生じた短波長の音波が、超流動乱流における本来の量子渦ダイナミクスに影響を与える。そこで短いスケールでのみ有効な散逸を導入し、これら音波の影響を消した
3. 超流動乱流の渦の運動エネルギーのスペクトルが古典乱流の統計則であるKolmogorov則と定量的に一致した

まとめ：量子系のダイナミクス

これまで量子力学の物質への応用は、ほとんど固体に限定されてきた。

量子渦に象徴される量子流体力学の
眼目は何か？

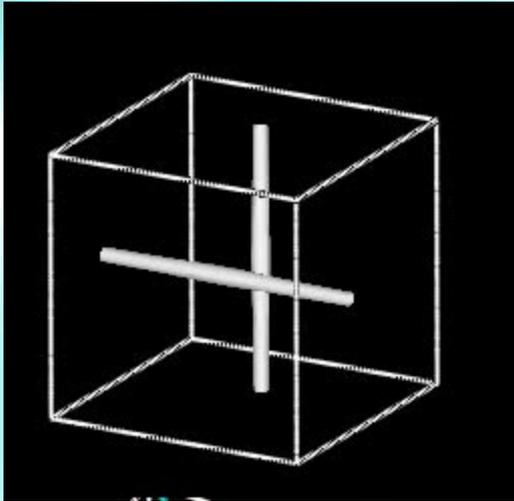


流体において、要素還元的な理解ができることである！

流体は流れる、変形する、多くの自由度が生き残っている・・・
⇒そのような多自由度をreduceする低温における量子凝縮系

量子渦、素励起をいったような要素還元的な見方が、流体や流動の理解をより加速するかもしれない。

極低温での量子渦糸の減衰



再結合による音波放出



素励起(フォノン・ロトン)の放出
(Richardson
カスケードのな
れの果て)

いずれも
高波数
領域で
起こる

数値計算の精度

	1	2	3
時間分解能	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \times 10^{-4}$	$\Delta t = 2 \times 10^{-5}$
空間分解能	256^3 grids	512^3 grids	256^3 grids

1 : 現行の数値シミュレーション

$0 < t < 12$ のシミュレーションにおいてシミュレーション間の相対誤差の最大値 $F_{ij}(E) = |(\langle E \rangle_i - \langle E \rangle_j) / \langle E \rangle_i|$ を計算する ($\rho_0 = 0$)

	F_{12}	F_{13}
E	2.4×10^{-15}	6.3×10^{-13}
E_{int}	3.7×10^{-15}	8.8×10^{-13}
E_q	2.6×10^{-15}	6.9×10^{-13}
E_{kin}	5.1×10^{-15}	9.4×10^{-13}

エネルギー保存

$$|[E(t=0) - E(t=12)]/E(t=0)| \simeq 6.5 \times 10^{-13}$$

異なる分解能間で、また時間発展においてエネルギーが10桁以上保存している⇒高い精度

散逸の比較

$$\epsilon(k) = \epsilon_0$$

$$\epsilon(k) = \epsilon_0$$

$$\epsilon(k) = \epsilon_0 \epsilon(k - k_0)$$

