



量子流体力学および量子乱流 の理論的研究とその発展

大阪市立大理 小林未知数、坪田誠

9月12日～15日・研究集会「オイラー方程式250
年」

素励起物理学研究室
Elementary Excitation Physics Laboratory

(物性理論研究室)



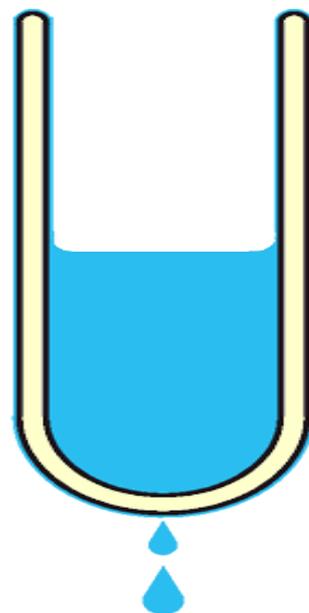
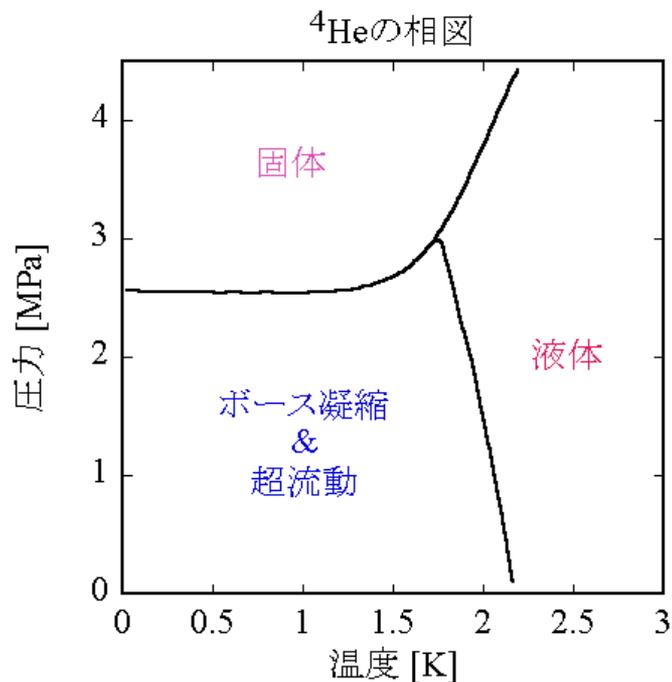
発表内容

1. 量子流体・量子乱流のイントロダクション
2. 理論研究の背景
3. 量子流体を記述するGross-Pitaevskii方程式
4. 数値計算結果
5. まとめ

量子流体・量子乱流

量子流体の舞台：超流動He

バルクの液体 ^4He はラムダ温度 $T_\lambda = 2.17$ [K]においてボース凝縮を引き起こして超流動状態となり、粘性を持っていないかのように振る舞う



超流動薄膜
現象

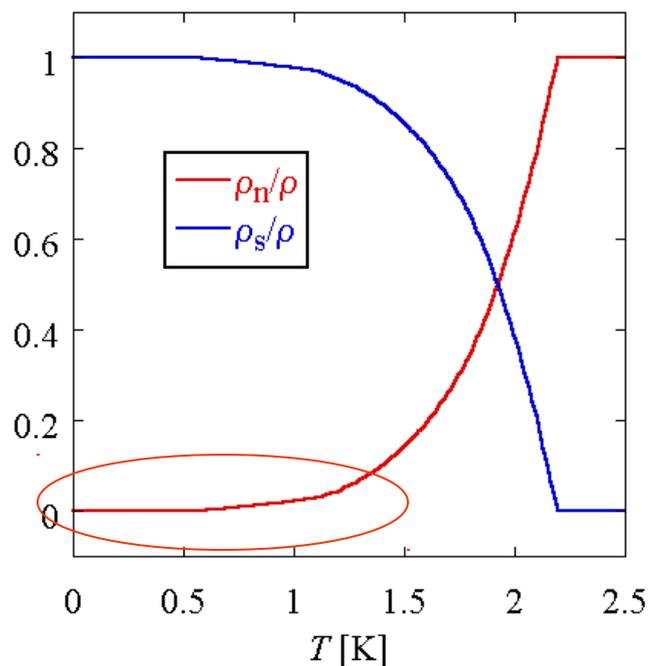
超流動のダイナミクス：2流体モデル

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad \rho : \text{流体の密度}$$

ρ_n : 常流体の密度 (粘性、エントロピーあり)

ρ_s : 超流体の密度 (粘性、エントロピーなし)

超流動の温度依存性

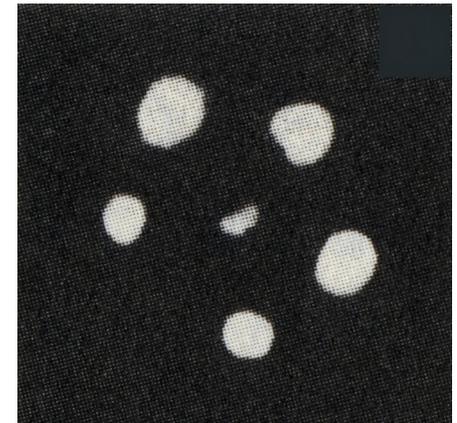
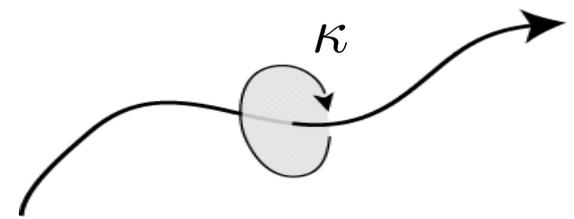


- 全流体は粘性のある成分 (常流体) とない成分 (超流体) とに分けられる。
- 二流体モデルを用いて超流動現象の多くを説明することができる

**1 K以下では常流体がほとんどない
→ 流体のダイナミクスが純粋な量子力学的効果によって記述される (量子流体)**

量子流体中の渦：量子渦

- すべての量子渦はいたるところで同じ循環 $\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{s} = n h / m$ を持つ(実際には $n \geq 2$ の渦は不安定で $n = 1$ の渦へと分裂する)。
- 渦の粘性拡散がなく、安定に存在する。
- 渦芯のサイズは数Å(液体 ^4He): 非常に微視的な渦→古典流体の渦では最も粗雑な近似である渦糸近似が、量子渦ではRealisticとなる。

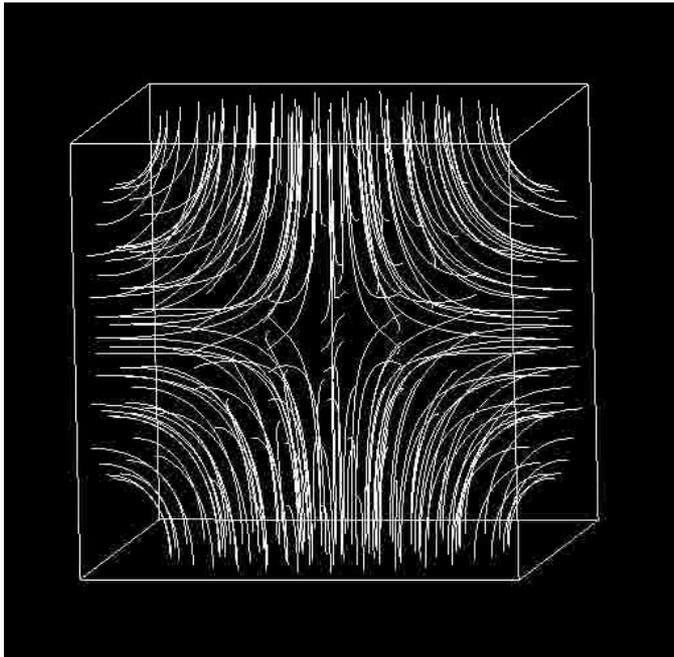


量子渦格子の
観測
(Packard 1982)

量子渦から量子乱流へ

量子渦のタングル状態として量子乱流が実現される

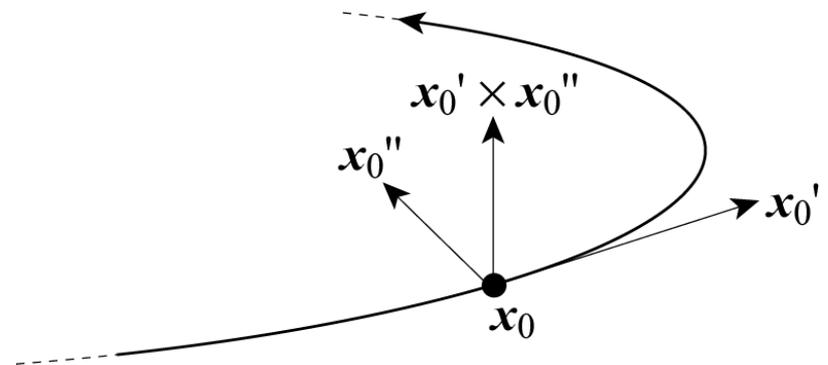
渦糸近似による量子乱流の
シミュレーション



$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{\text{sa}}(\mathbf{x})$$

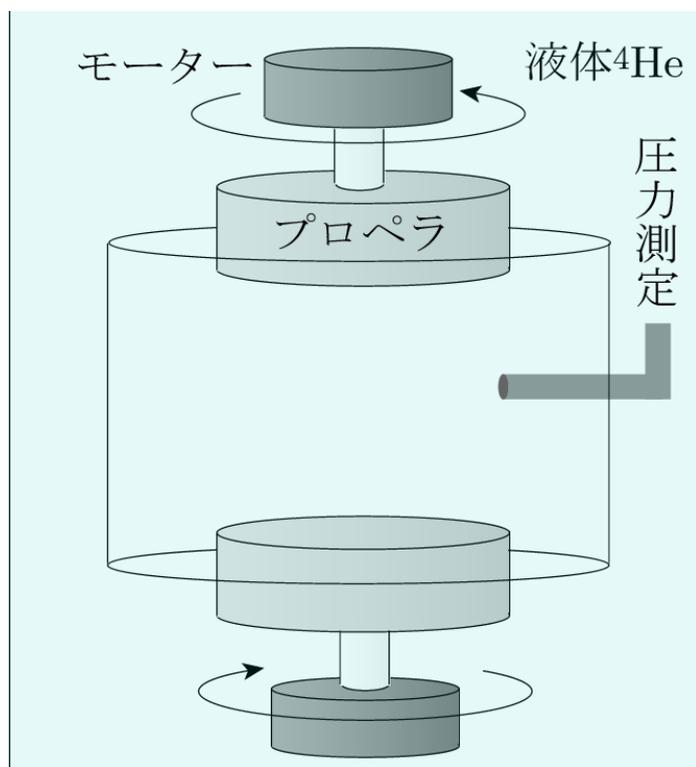
$$\mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}] \times d\mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}|^3}$$



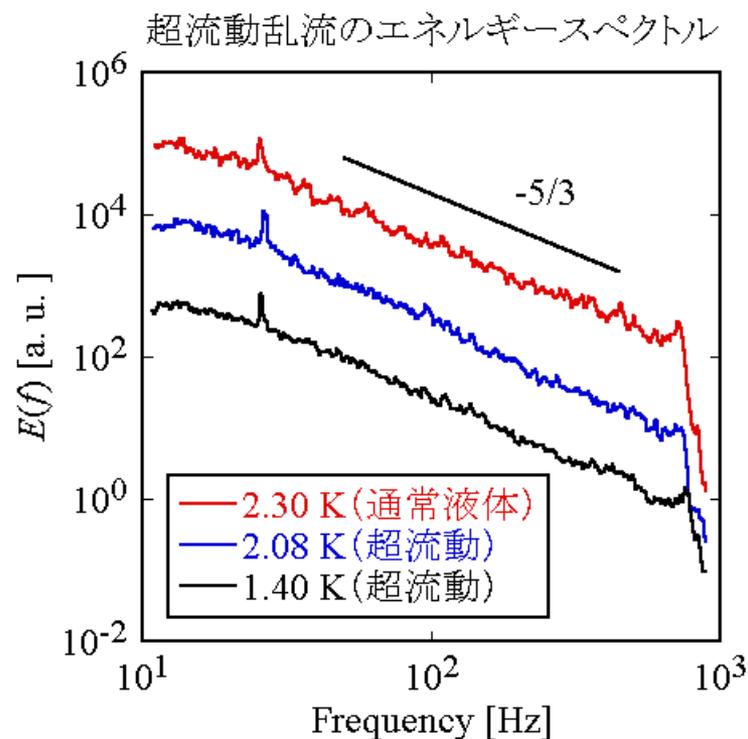
T. Araki, M. Tsubota and S. K. Nemirovskii,
Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002)

量子渦から量子乱流へ

量子渦のタングル状態として量子乱流が実現される



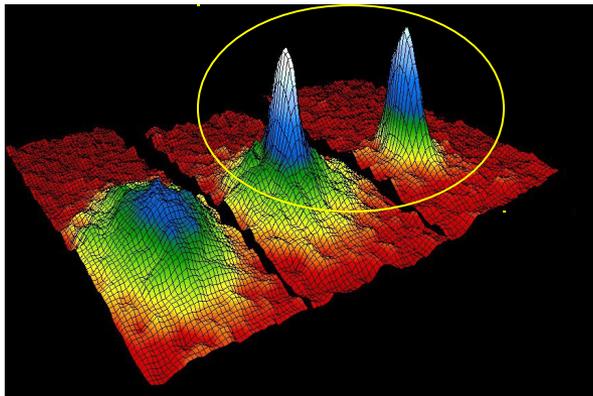
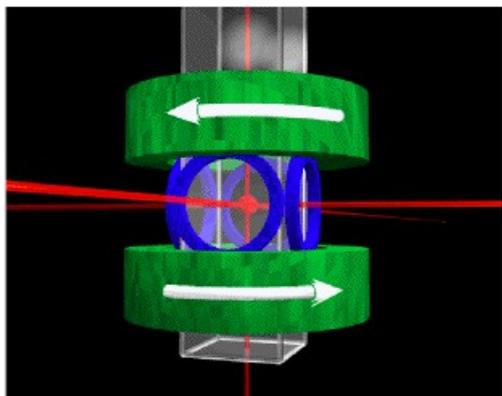
J. Maurer and P. Tabeling,
Europhys. Lett. **43** (1), 29 (1998)



量子乱流と古典乱流には
類似性がある

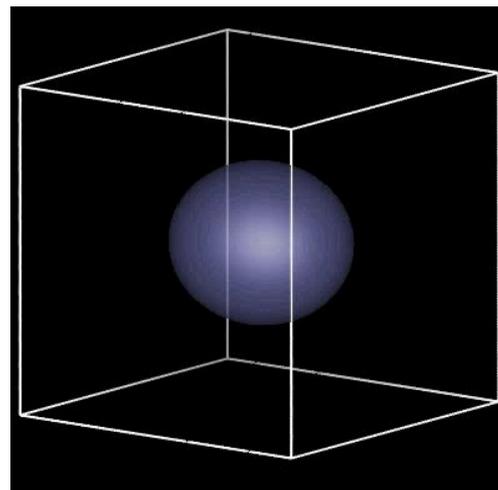
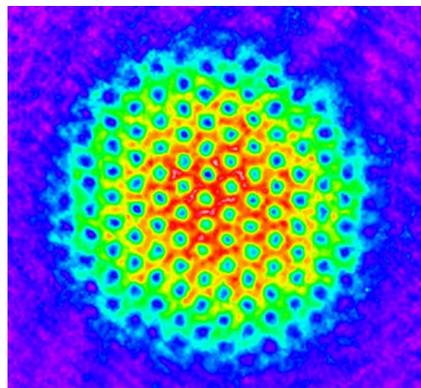
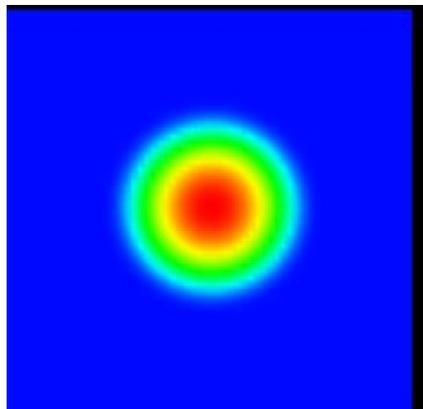
極低温原子気体ボース凝縮における 量子乱流

磁場によってトラップされたアルカリ原子気体をnK~pKまで冷却する
1995年に実現



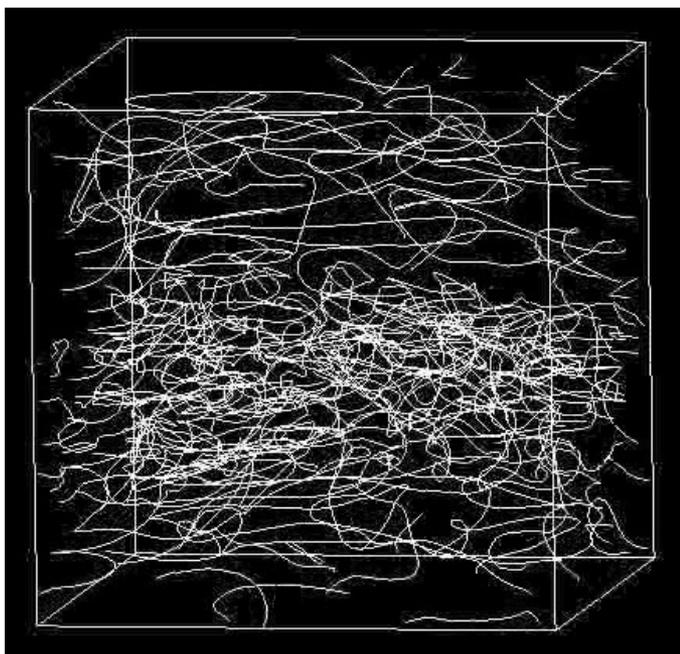
ボース凝縮の出現

量子渦格子



歳差回転を用いて量子
乱流を実現
する

量子乱流研究のモチベーション



量子渦は循環が量子化されており、その存在がはっきりしているので乱流と渦との関係を調べやすい

→乱流研究のプロトタイプ？

理論研究の背景

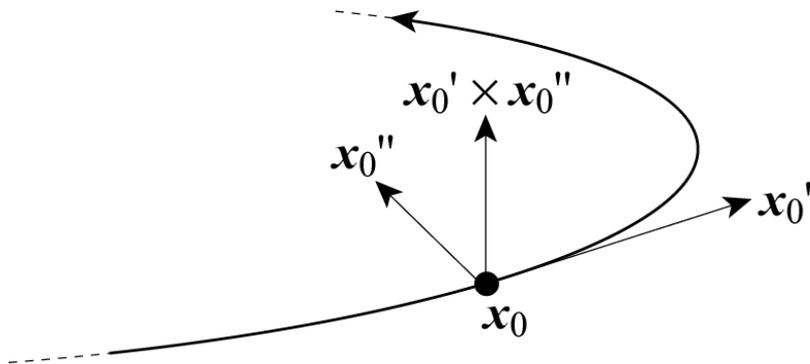
量子流体を研究する理論的モデルー1：渦糸近似

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0(t)}{\partial t} = \mathbf{v}_s(\mathbf{x}_0)$$

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{\text{sa}}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{v}_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}] \times d\mathbf{x}_0(t)}{|\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}|^3}$$

渦の運動は他の渦要素によって駆動される速度場（Biot-Savart則）と外部からの渦なし流（Laplace方程式）に従って運動する



理論研究の背景

量子流体を研究する理論的モデルー2：Gross-Pitaevskii方程式

超流動のダイナミクスはボース凝縮体の巨視的波動関数によって記述される


$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x})$$

非線形Schrödinger方程式

$\Phi(\mathbf{x}, t)$ ：ボース凝縮の巨視的波動関数

μ ：化学ポテンシャル

a ：粒子間相互作用に対するs-波散乱長

理論研究の背景

Gross-Pitaevskii方程式の導出

第二量子化によって記述されるボース場のハミルトニアン(剛体反発芯相互作用)

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu \right] \hat{\Psi} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{x} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}$$

$\hat{\Psi}(\hat{\Psi}^\dagger)$: ボース場の消滅 (生成) 演算子

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) &= \Phi(\mathbf{x}, t) + \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) \\ \Phi(\mathbf{x}, t) &= O(\sqrt{N_0}) \\ \hat{\varphi}(\mathbf{x}, t) &= O(1) \rightarrow 0 \text{ (at } T = 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Phi|^2 \right] \Phi$$

ボース凝縮している系において非凝縮体の寄与を無視する

量子流体・量子乱流を記述する Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t)$$

→流れは非粘性のポテンシャル流

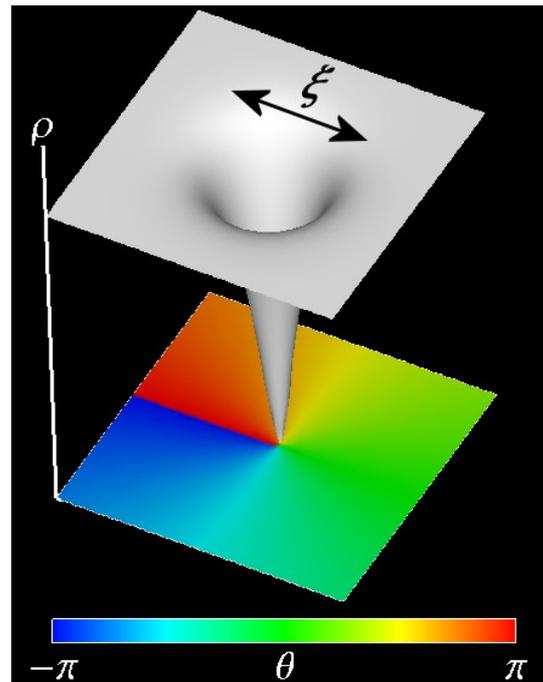
$$\Phi(\mathbf{x}) = |\Phi(\mathbf{x})| \exp[i\theta(\mathbf{x})]$$

$$\rho(\mathbf{x}) = |\Phi(\mathbf{x})|^2 : \text{流体の密度}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\hbar/m) \nabla \theta(\mathbf{x})$$

: 流体の速度場

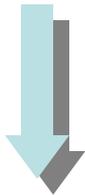
$$\xi = 1/\sqrt{8\pi a \bar{\rho}} : \text{回復長}$$



量子渦が波動関数の位相欠陥として定義される

Euler方程式とGross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\Phi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Phi(\mathbf{x}, t)$$



$$\text{Madelung 変換 : } \begin{cases} \rho(\mathbf{x}) = |\Phi(\mathbf{x})|^2 \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (\hbar/m) \nabla \theta(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{m\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla p(\mathbf{x}, t)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar^2}{m} \rho(\mathbf{x}, t) \left[4\pi a \rho(\mathbf{x}, t) - \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)}}{2\sqrt{\rho(\mathbf{x}, t)}} \right]$$

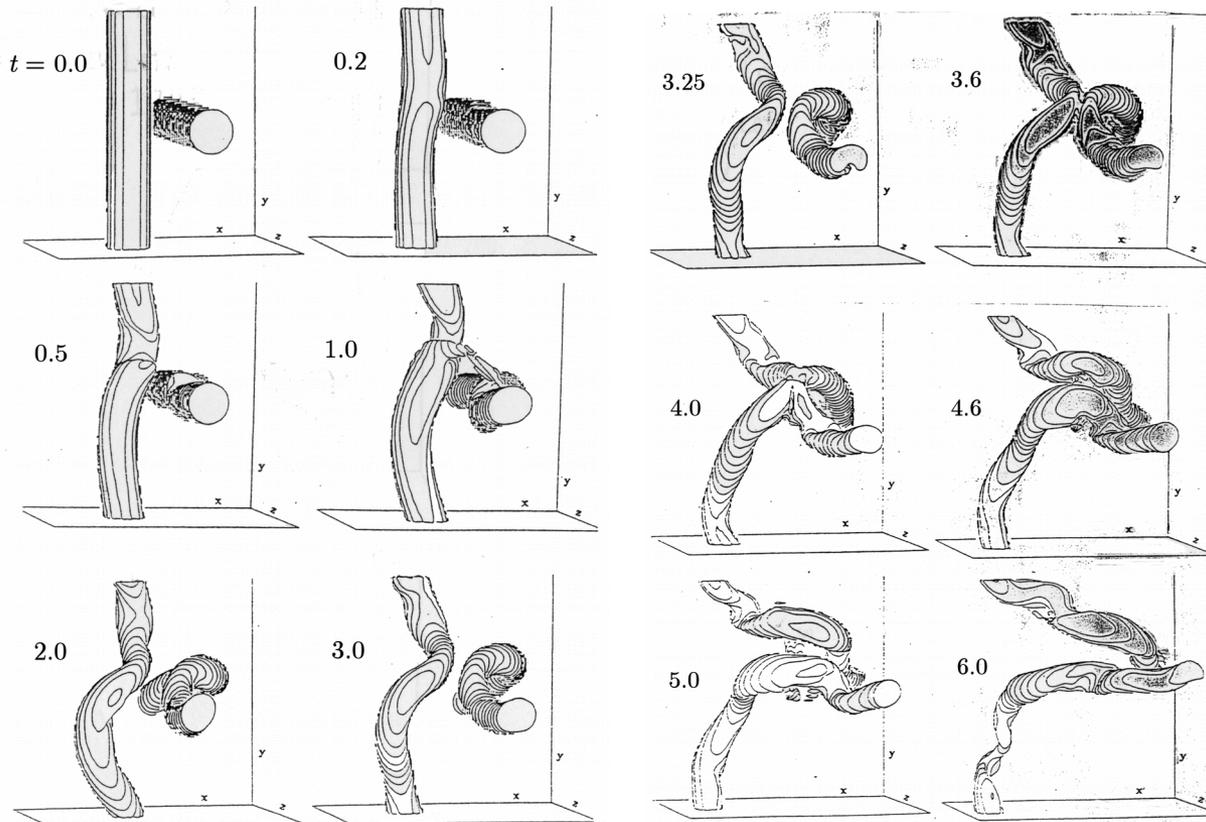
量子圧力項

Gross-Pitaevskii方程式は（位相の量子化を除いて）Euler方程式とほとんど同じ形となる

Euler方程式とGross-Pitaevskii方程式

渦の再結合：Navier-Stokes方程式

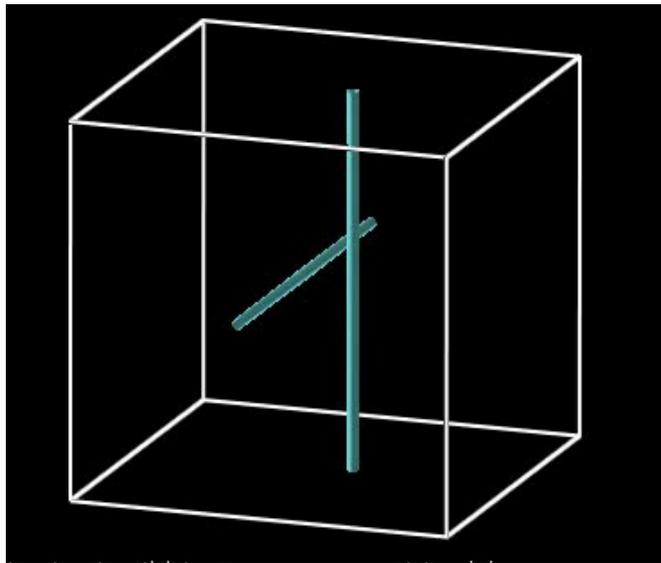
O. N. Boratav , R. B. Pelz and N. J. Zabusky, Phys. Fluids. A 4, 581 (1992)



粘性によってKelvinの循環定理が破れ、渦の再結合が起こりうる

Euler方程式とGross-Pitaevskii方程式

渦の再結合：Gross-Pitaevskii方程式



粘性とは関係なく、再結合が起こる

。

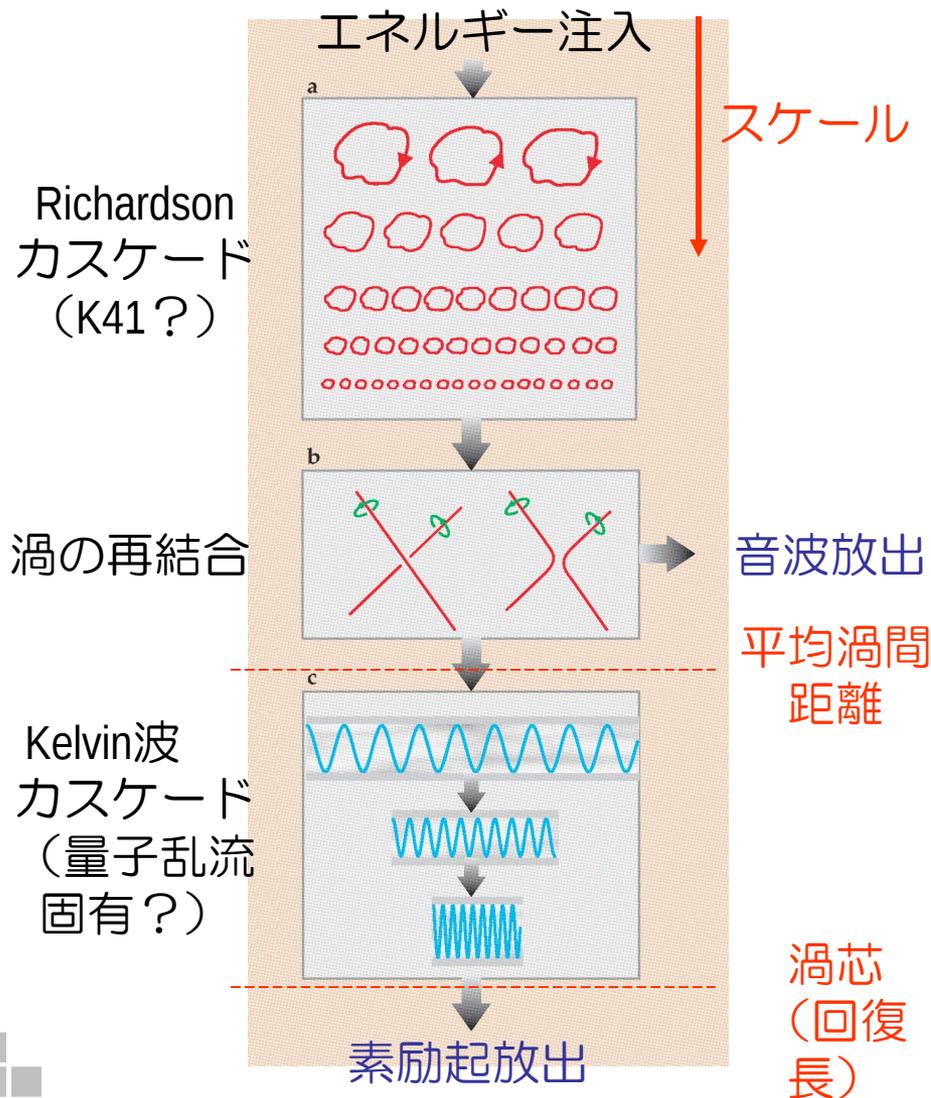
→再結合は密度の零点のみで起こるのでKelvinの循環定理を抵触しない



再結合を通して量子渦のカスケードが起こる（Euler方程式よりエネルギーのカスケードが明らか？）

。

量子乱流のシナリオ



量子乱流中で量子渦の小さいスケールへのカスケードが期待される

再結合を通じたRichardsonカスケードの他にKelvin波カスケードと呼ばれる別の乱流状態が期待されている

渦は渦芯スケールにおいて素励起(非ボース凝縮体)へと転化する(この効果はGP方程式には直接含まれていない)

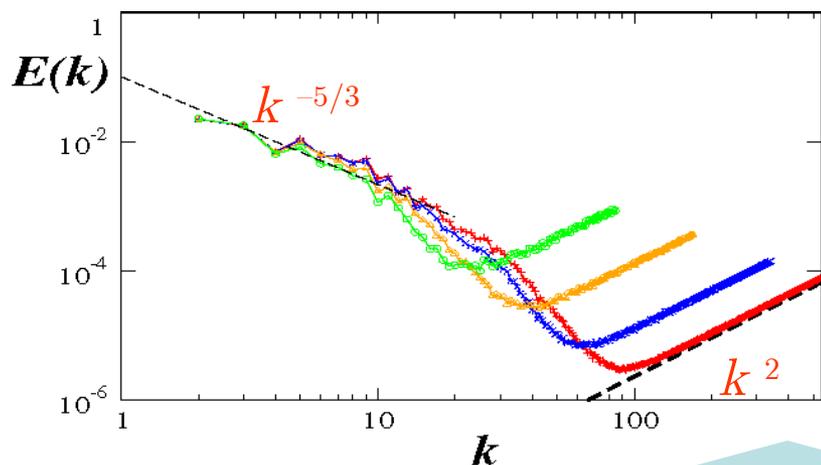
3次元GP方程式は有限時間において波数無限大での解の爆発が起こりうる

研究目的

- Gross-Pitaevskii方程式を用いて量子乱流の数値シミュレーションを行う。
- Richardsonカスケードが起こる領域において量子乱流の古典乱流との対応を調べる。

Euler乱流のシミュレーション

C. Cichowlas, P. Bonaiti, F. Debbasch and M. Brachet, Phys. Rev. Lett **95**, 264502 (2005)



$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

低波数側でKolmogorov則が、
高波数側でエネルギー等分
配則が現れている。

渦のカスケードはあるのか？

(Euler方程式に比べ) 渦の存在が明確である、再結合を通じたカスケードが分かりやすい、自由度が少なく扱いやすい、解の爆発が分かっているGross-Pitaevskii方程式は、乱流研究に適しているのではないか？

Gross-Pitaevskii方程式の数値シミュレーション

扱う乱流：周期境界条件における一様等方定常乱流

GP方程式のフーリエ変換

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \Phi(k) + \frac{4\pi \hbar^2 a}{mV^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2)$$



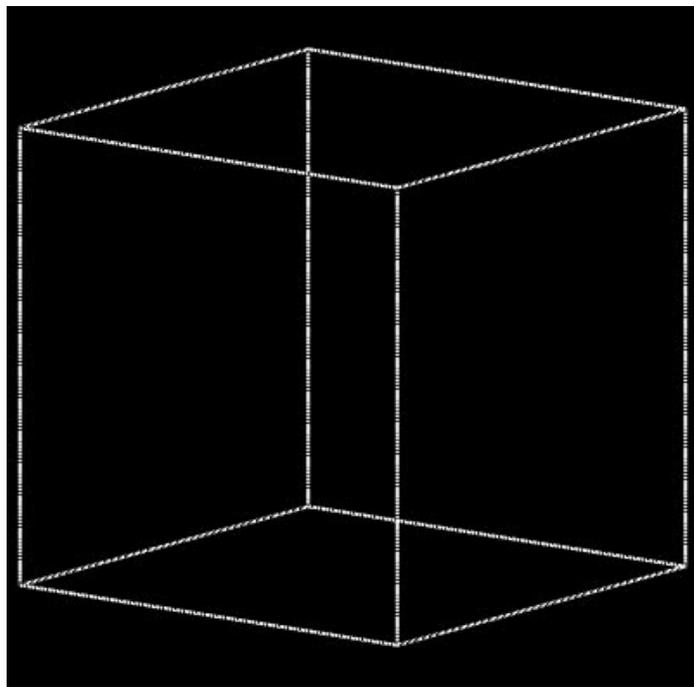
$$\hbar[i - \gamma(k)] \frac{\partial \Phi(k)}{\partial t} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \Phi(k) + \frac{4\pi \hbar^2 a}{mV^2} \sum_{k_1, k_2} \Phi(k_1) \Phi^*(k_2) \Phi(k - k_1 + k_2)$$

$\gamma(k) = \gamma_0 \theta(k - 2\pi/\xi)$: 回復長 (渦芯) ξ より短いスケールで効く散逸

渦芯スケールで働く素励起放出に対する現象論的散逸項

エネルギー注入：量子渦の注入

一定時間毎に量子渦輪の解（波動関数）を重ね合わせる



ランダムな位置・方向に向かい合った同じ大きさの2つの渦輪を注入する

数値計算のパラメーター

(長さは回復長で規格化: $\xi = 1$)

全格子点数 : 512^3

空間解像度 : $\Delta x = 1/8$: 回復長 ξ あたり 8 格子点、系の体積 $V = 64^3$

波数の解像度 : $\Delta k = 2\pi/64 = 9.82 \times 10^{-2}$

密度 : $\bar{\rho}/\xi^3 = 1$

時間解像度 : $\hbar\Delta t/m\xi^2 = 0.0001$

空間: 周期境界条件における擬スペクトル法

時間: 4次のRunge-Kutta法

量子乱流のエネルギー

運動エネルギーを渦の部分と圧縮性素励起の部分に分ける

$$E_{\text{kin}} = \frac{\hbar^2}{2m^2 N} \int d\mathbf{x} [|\Phi(\mathbf{x})| \nabla \theta(\mathbf{x})]^2$$

運動エネルギー

$$E_{\text{kin}}^{\text{i}} = \frac{\hbar^2}{2m^2 N} \int d\mathbf{x} [\{ |\Phi(\mathbf{x})| \nabla \theta(\mathbf{x}) \}^{\text{i}}]^2 \quad \text{div} \{ |\Phi(\mathbf{x})| \nabla \theta(\mathbf{x}) \}^{\text{i}} = 0$$

非圧縮性運動エネルギー (渦)

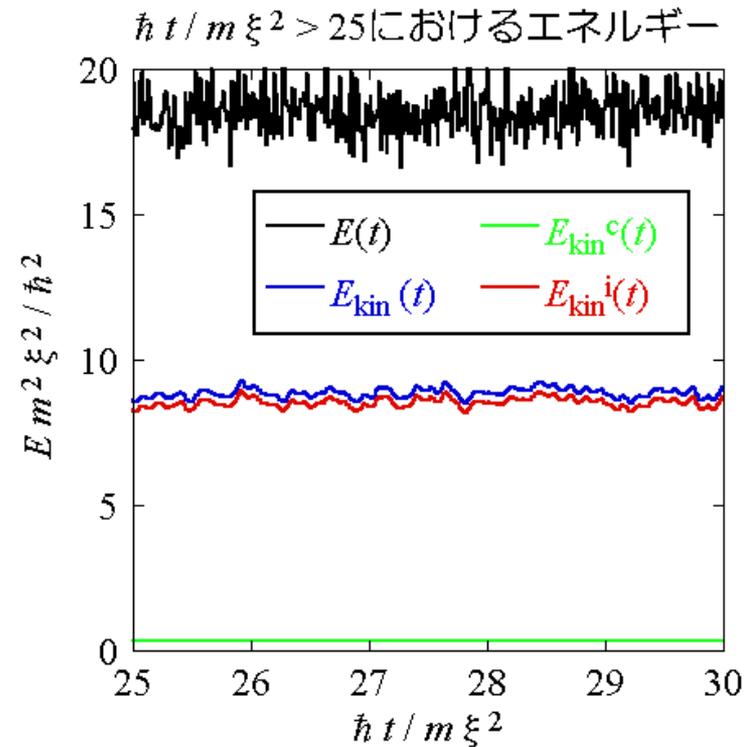
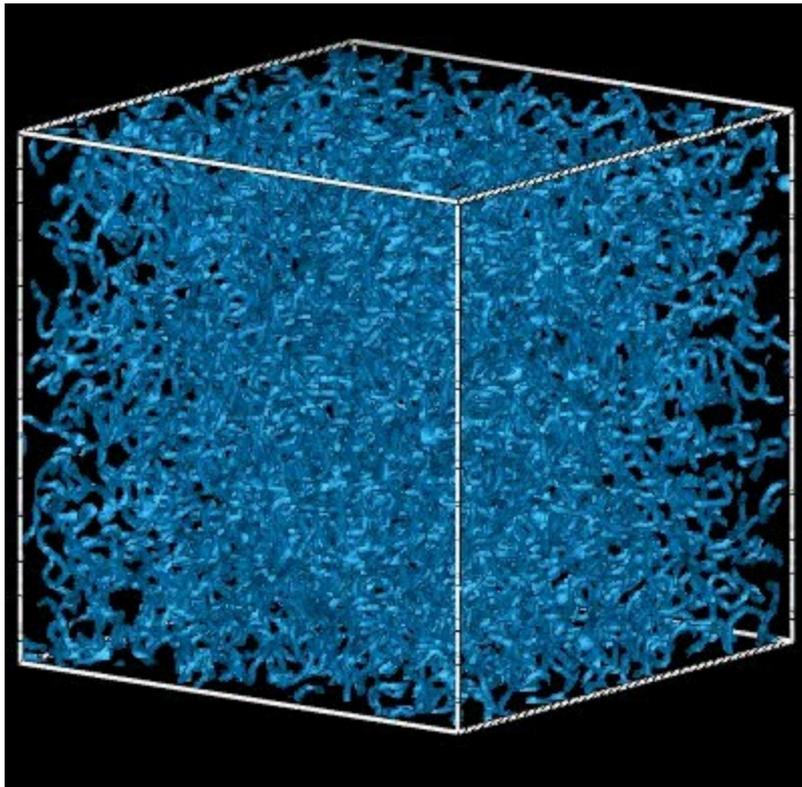
$$E_{\text{kin}}^{\text{c}} = \frac{\hbar^2}{2m^2 N} \int d\mathbf{x} [\{ |\Phi(\mathbf{x})| \nabla \theta(\mathbf{x}) \}^{\text{c}}]^2 \quad \text{rot} \{ |\Phi(\mathbf{x})| \nabla \theta(\mathbf{x}) \}^{\text{c}} = 0$$

圧縮性運動エネルギー (圧縮性素励起)

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}^{\text{i}} + E_{\text{kin}}^{\text{c}}$$

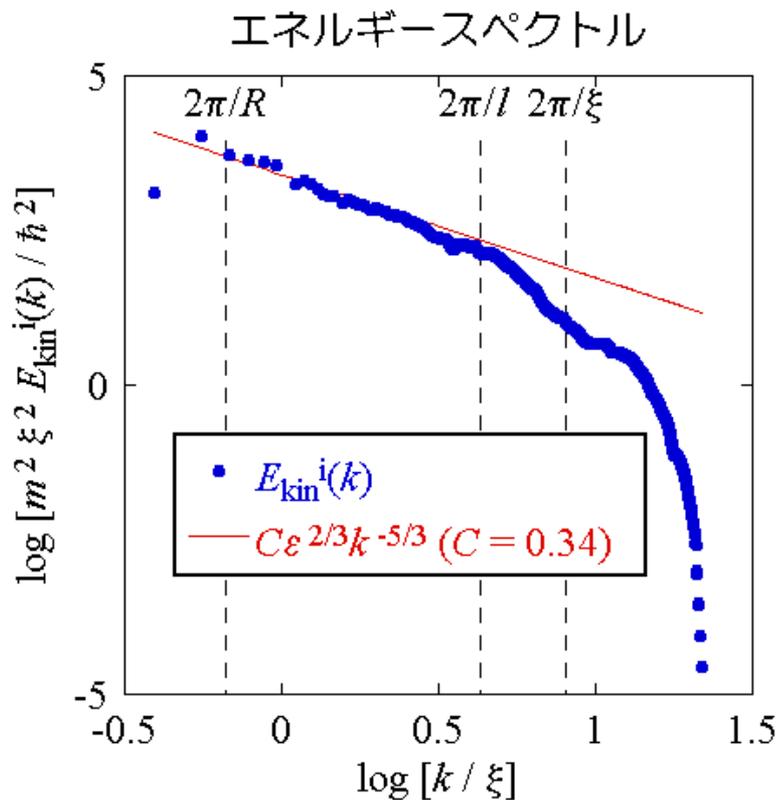
量子乱流のエネルギー

量子渦のプロット



渦を注入するので、渦のエネルギーが運動エネルギーを占めている

エネルギーースペクトル



R : 注入渦輪のサイズ

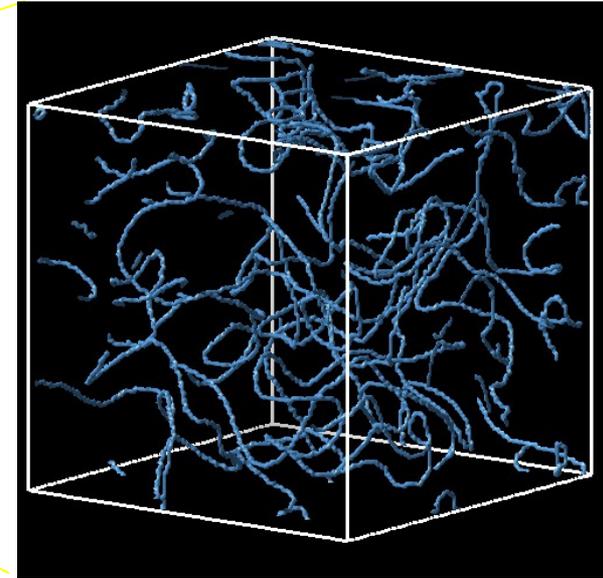
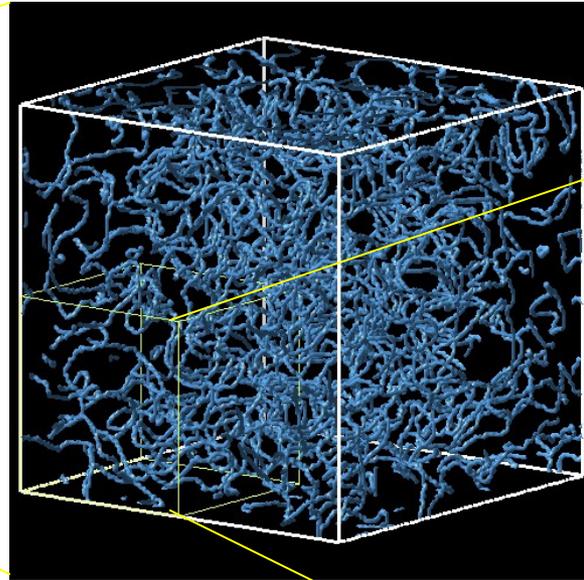
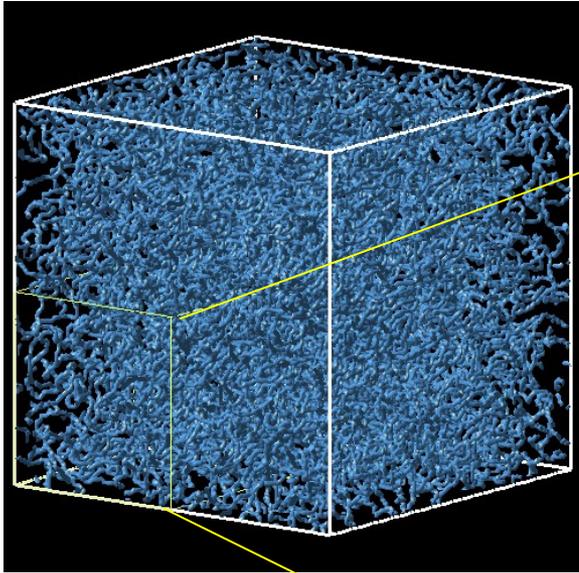
$E(k) \propto k^{-5/3}$: Kolmogorov則
が確認された

$l = (V/L)^{1/2}$: 平均渦間距離

$E(k) \propto k^{-2}$: Kolmogorov則と
は別のスケーリングが見
えた (Kelvin波乱流 : 量子
乱流固有の現象?)

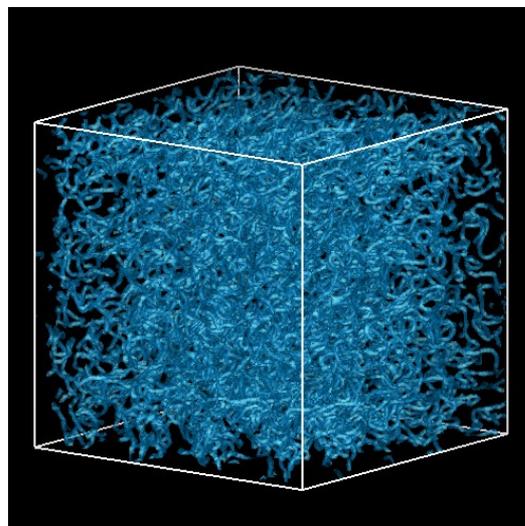
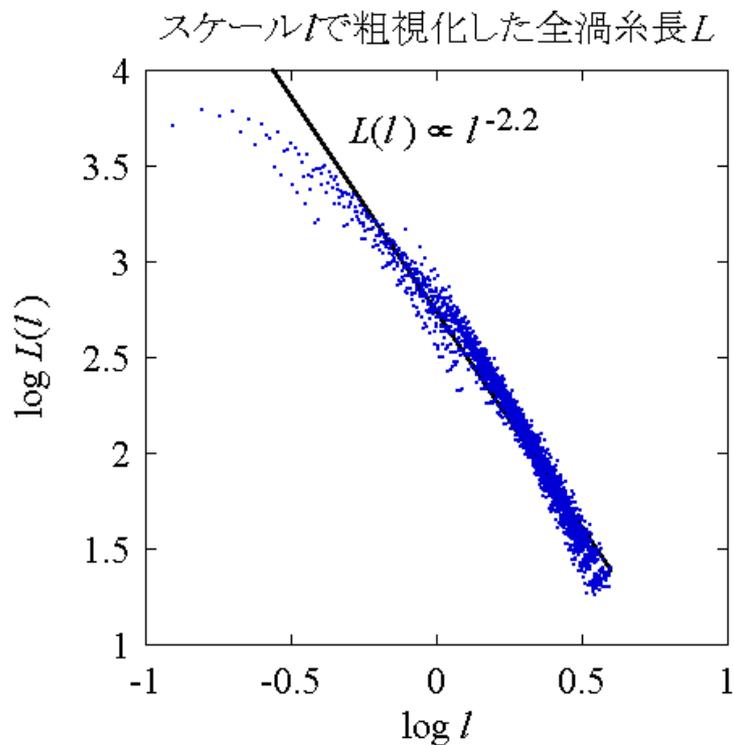
ξ : 回復長 (渦芯)

量子渦の自己相似的構造

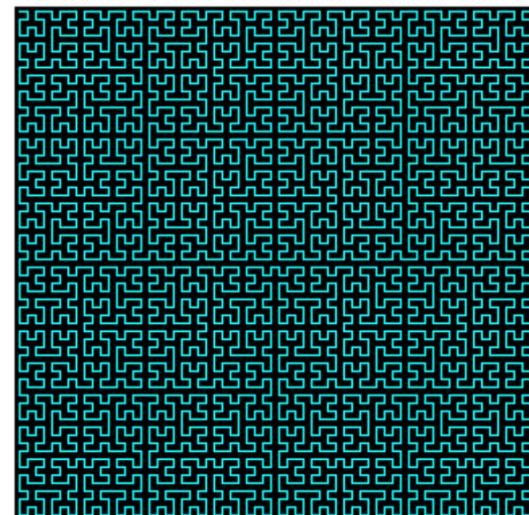


量子渦の繰り返し構造

量子渦のフラクタル次元



=



フラクタル次元 $d \sim 2$

→ペアノ曲線のような構造？

まとめ

- Gross-Pitaevskii方程式の数値シミュレーションを用いて量子乱流のダイナミクスを調べた。
- 慣性領域において量子乱流と古典乱流には明らかに類似性が存在し、さらに量子渦に関して自己相似的な構造が現れることを明らかにした。

量子乱流の今後の展望

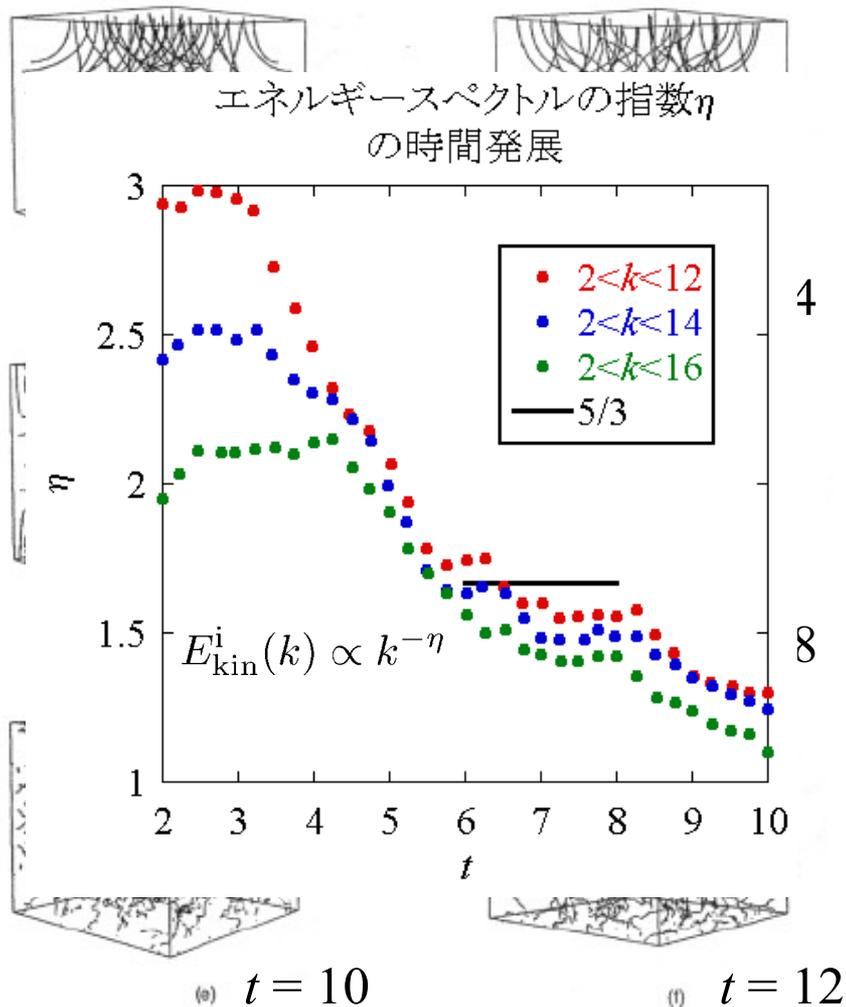
量子乱流と古典乱流

今まで量子乱流と古典乱流は全く別の分野であった



量子乱流が古典乱流との対応を持つのなら、存在が明確な量子渦という要素還元的な見方でもって、乱流の理解に貢献することができるかも知れない！

散逸無しでのGross-Pitaevskii方程式



高波数側で渦のエネルギーは
 どんどん圧縮性のエネルギー
 へと転化し、最終的に圧縮性
 のエネルギーが波数のほとん
 どの領域を占め、Kolmogorov則
 との一致はあまり明確ではな
 い

C. Nore, M. Abid, and M. E. Brachet,
 Phys. Rev. Lett. **78**, 3896 (1997)



1次揺らぎまで残した平均場近似

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$$



$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, t) + \hat{\chi}(\mathbf{x}, t) + \hat{\zeta}(\mathbf{x}, t)$: ボース場

$\Phi(\mathbf{x}, t) = O(\sqrt{N_0})$: BEC の巨視的波動関数 (平均場)

$\hat{\chi}(\mathbf{x}, t) = O(1)$: BEC の 1次揺らぎ

$\hat{\zeta}(\mathbf{x}, t) = O(1/\sqrt{N_0})$: 高次揺らぎ (無視)

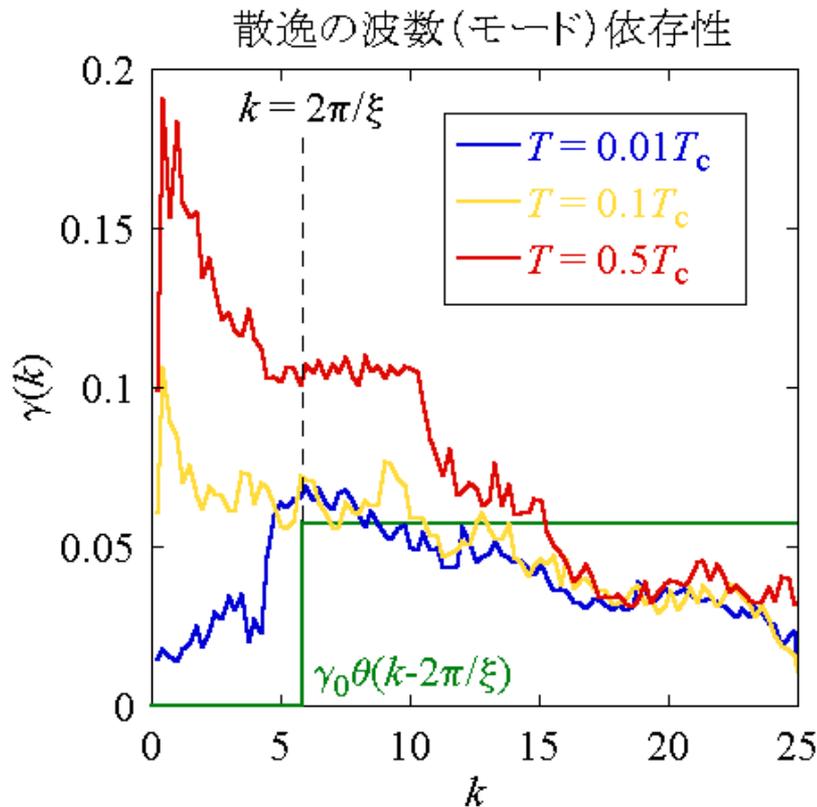
GP方程式とBdG方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} (|\Phi|^2 + 2\langle \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle) \right] \Phi + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \langle \hat{\chi} \hat{\chi} \rangle \Phi^* : \text{GP}$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\chi}}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + \frac{8\pi\hbar^2 a}{m} |\Phi|^2 \right] \hat{\chi} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \Phi^2 \hat{\chi}^\dagger : \text{BdG}$$



超流動乱流中でのシミュレーション



($t > 1$ での平均)

低温では:

散逸が高波数領域のみ
で効いている。

→短波長の素励起のみ
が散逸してる(渦散逸はな)