

図解解説：ボース凝縮体中のトポロジカル欠陥

東京大学大学院総合文化研究科
小林未知数

2010年12月12日 基礎物理セミナー合宿

内容

1. トポロジカル欠陥
2. ボース凝縮体
3. Spin-1 : π_1, π_2, π_3
4. Spin-2 : π_1, π_2, π_4
5. まとめ

トポロジカル欠陥

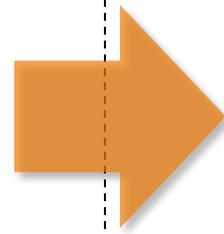
相転移などを経て対称性が破れている系に現れる欠陥

液体→固体の相転移（自発的対称性の破れ）

液体



- 系全体を回転させても自由エネルギーは変わらない
- 系全体を並進・回転させても状態が変わらない
- 系を局所的に並進・回転させても周囲は影響を受けない

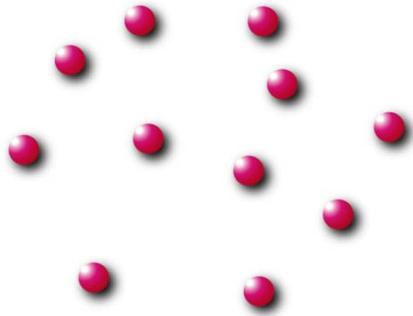


固体
(結晶)

- 系全体を回転させても自由エネルギーは変わらない
- 系全体を並進・回転させると状態が変わる
- 系を局所的に並進・回転させると周囲も変化する

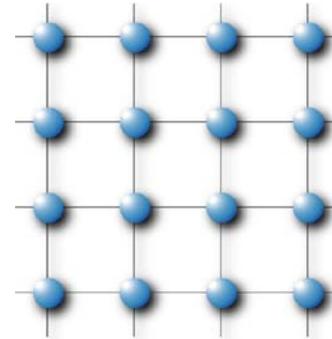
トポロジカル欠陥

液体



原子（集団）は他の
原子（集団）の影響
を受けない

結晶

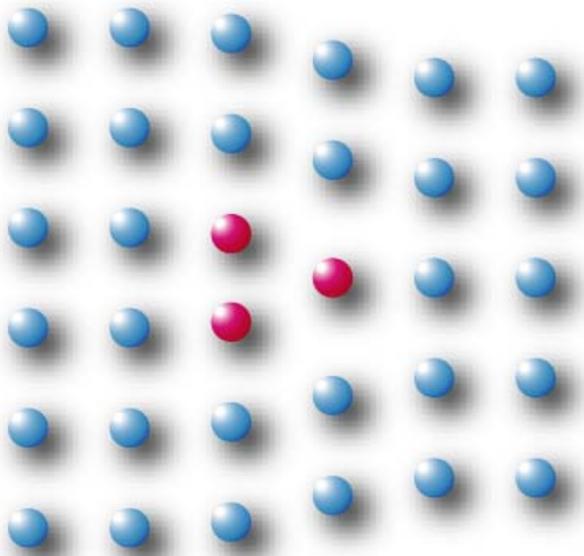


原子（集団）の位置・配向が、
他の原子（集団）の影響を受け、
ある決まった位置・配向を持つ。
しかし、具体的な位置・配向は
自由エネルギーからは決まらない
（自発的回転・並進対称性の
破れ）

トポロジカル欠陥

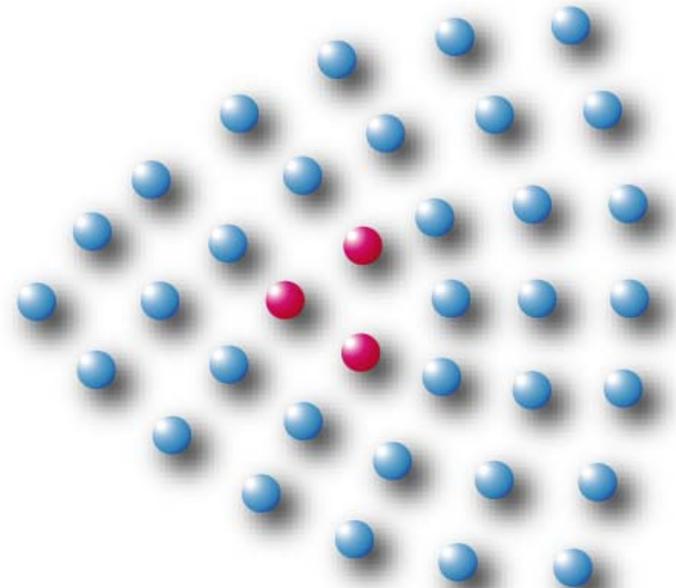
対称性の破れた系では破れ方に対応したトポロジカル欠陥が存在する

dislocation



並進対称性の破れに対応したトポロジカル欠陥

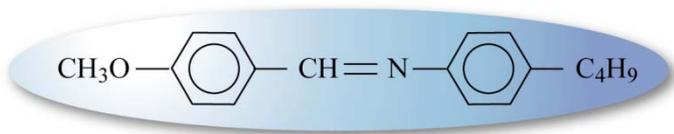
disclination



回転対称性の破れに対応したトポロジカル欠陥

トポロジカル欠陥

ネマティック液晶



棒状分子（円柱回転対称性）

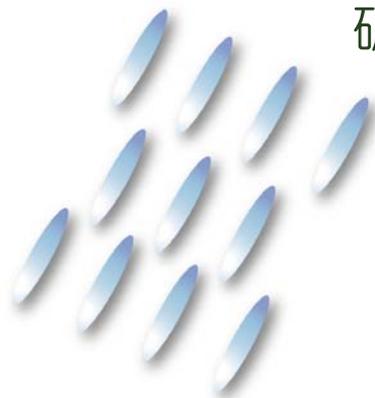
結晶

液晶

液体

並進対称性の
破れ

回転対称性の
破れ

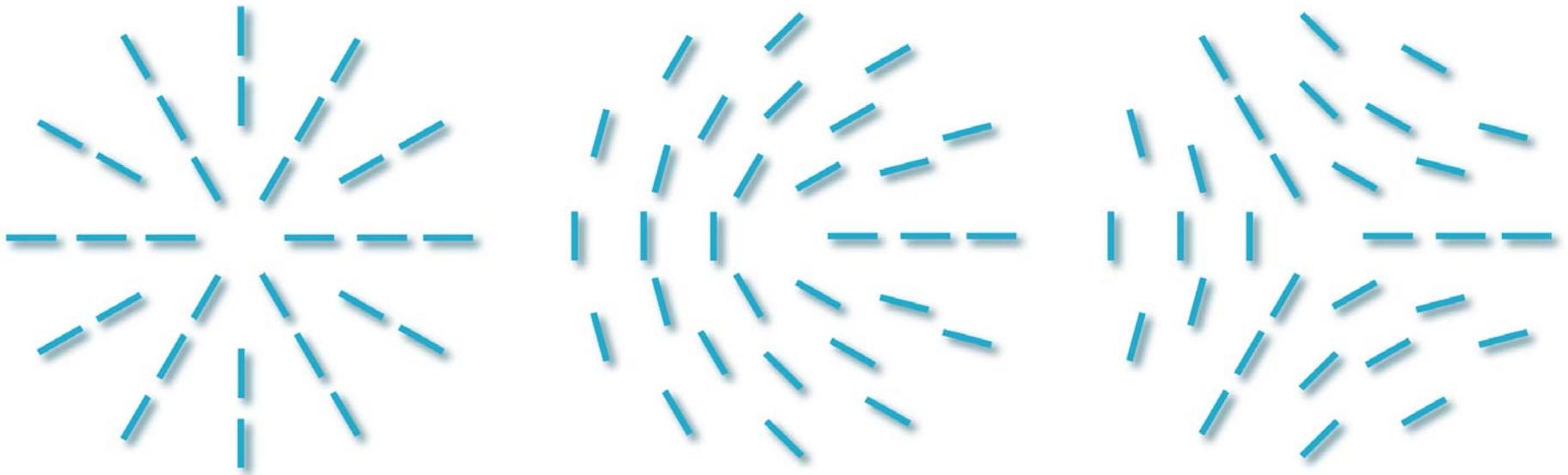


トポロジカル欠陥

トポロジカル欠陥

対称性の破れた系では破れ方に対応したトポロジカル欠陥が存在する

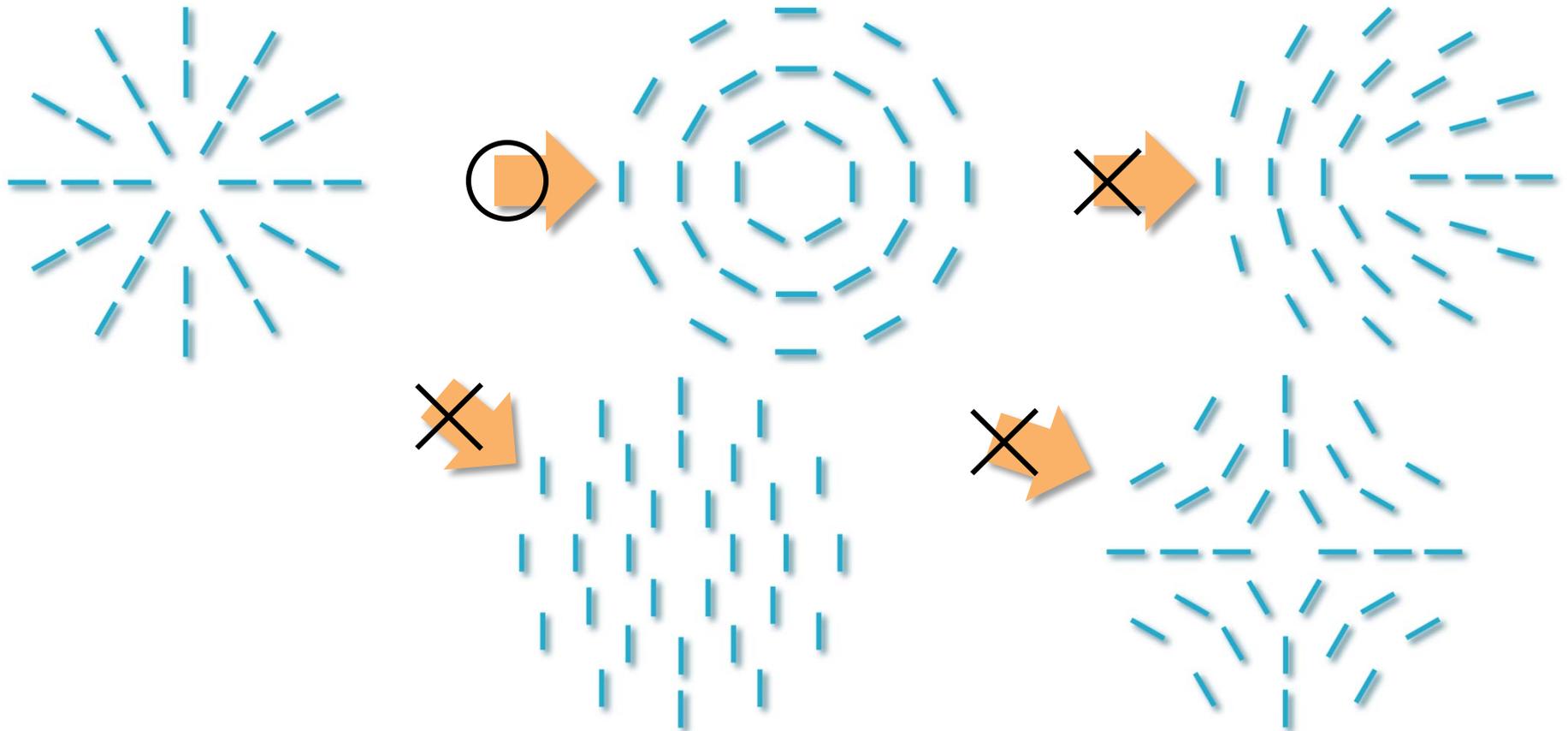
液晶の場合



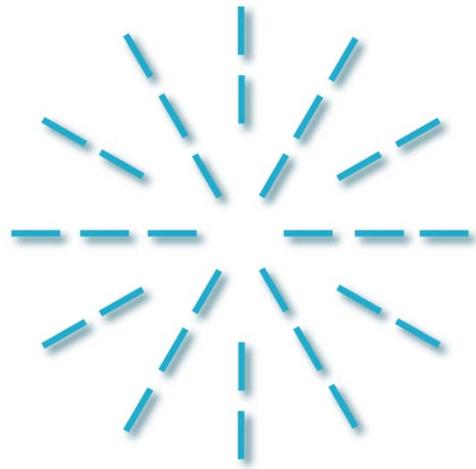
回転対称性の破れに対応したトポロジカル欠陥

トポロジカル欠陥とは？

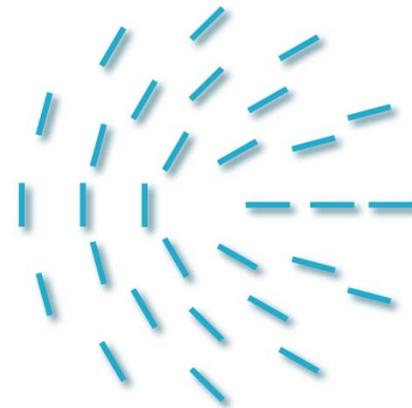
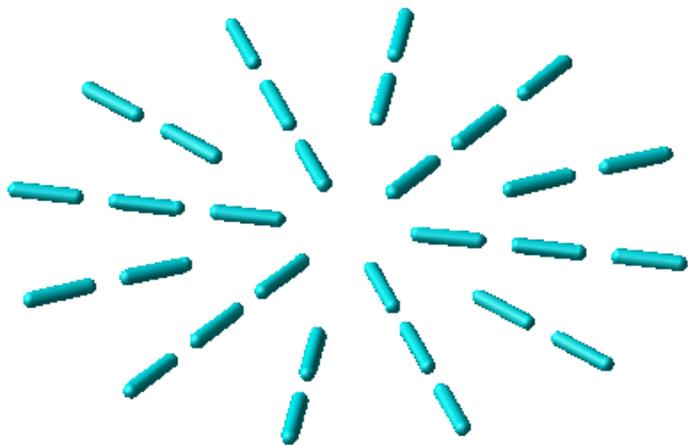
トポロジカル欠陥のある状態は連続的な変形を通して欠陥のない状態へと移せない



トポロジカル欠陥



この欠陥は液晶分子が2次元的に動けばトポロジカル欠陥だが、3次元的に動けばトポロジカル欠陥でなくなる



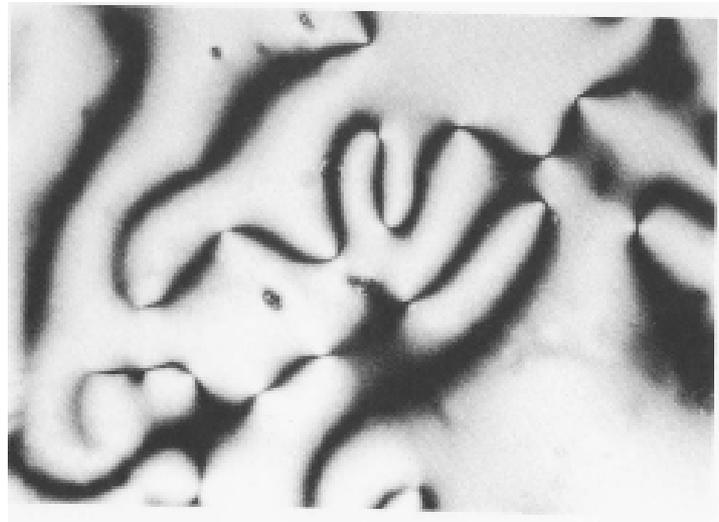
この欠陥はいつもトポロジカル欠陥

トポロジカル欠陥か否か、またその性質はオーダーパラメーターの自由度によって大きく変わる

欠陥の観測

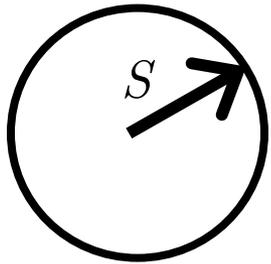


液晶表面



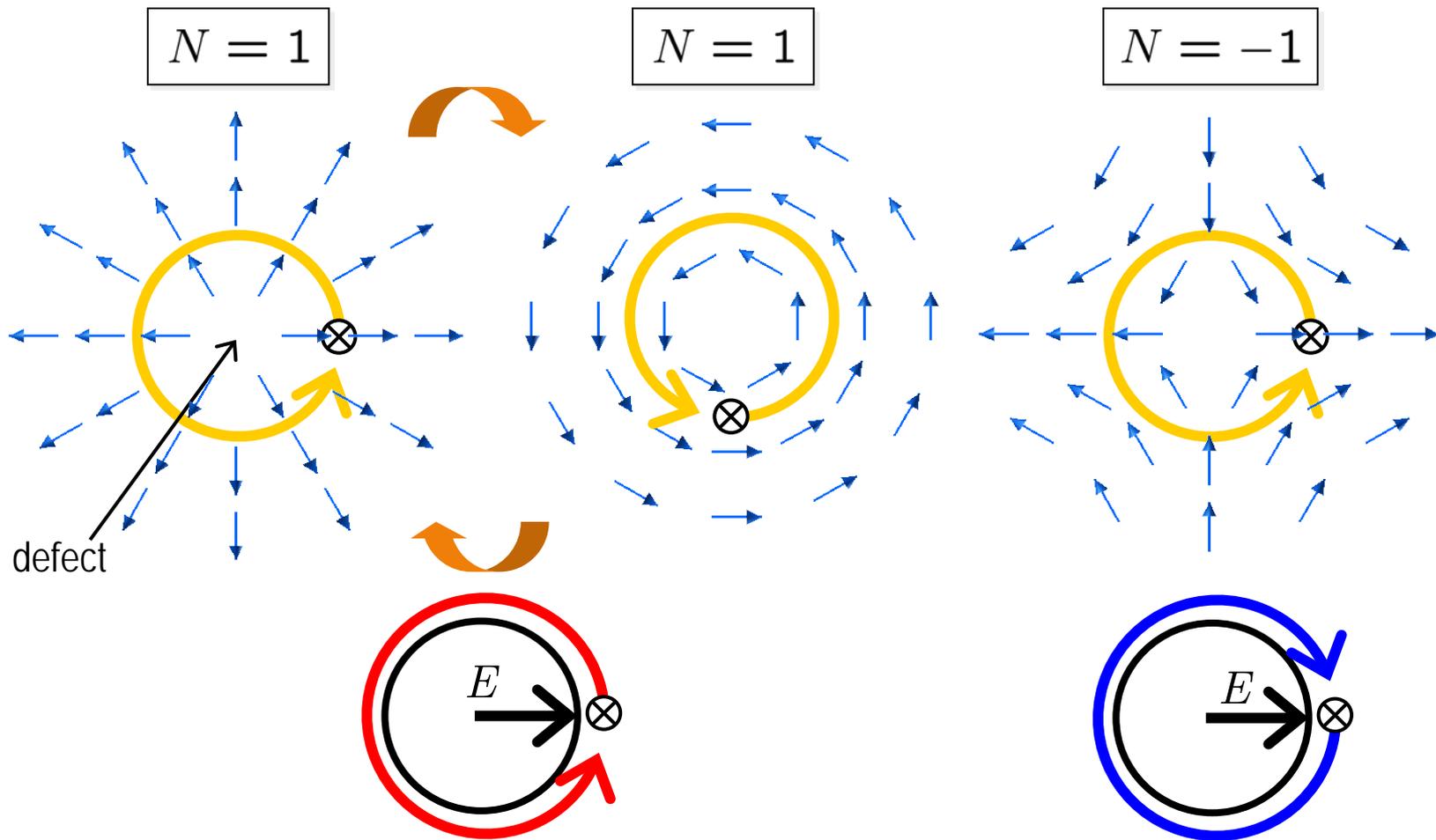
液晶内部

XY-spin system



XY-spinの系の秩序相では、オーダーパラメーターは単位円周上の1点で表される
→オーダーパラメーター空間

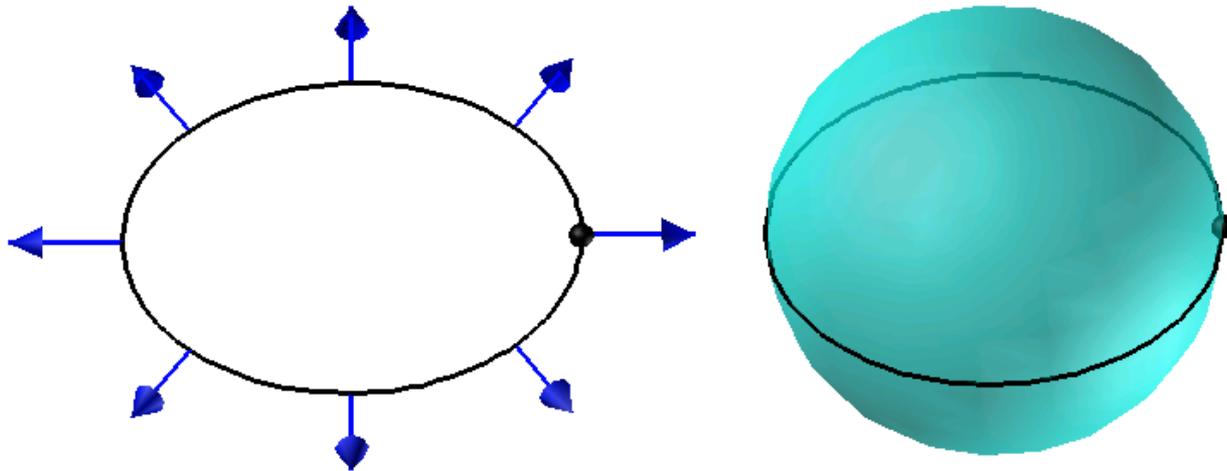
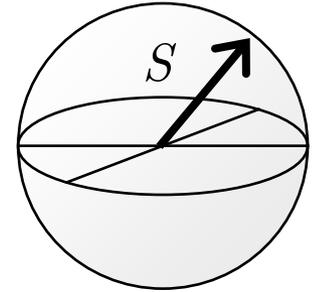
XY-spin system



欠陥は円周を何周したかのみによって特徴づけられる

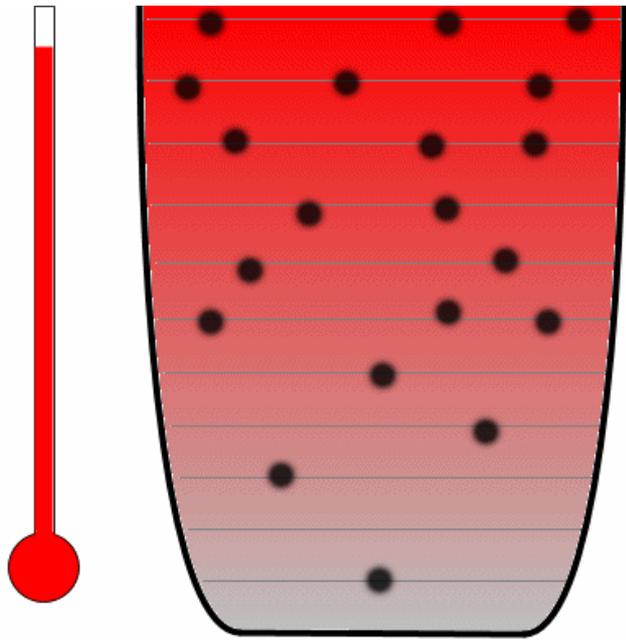
Heisenberg-spin system

スピンの3次元的に動く場合、オーダーパラメーターは単位球上の1点で表される



3次元的に回転させることによって欠陥は消える

ボース・アインシュタイン凝縮体



ボース系では低温において巨視的な数の原子が、1粒子の基底状態を占有し、巨視的な波動関数を形成する。

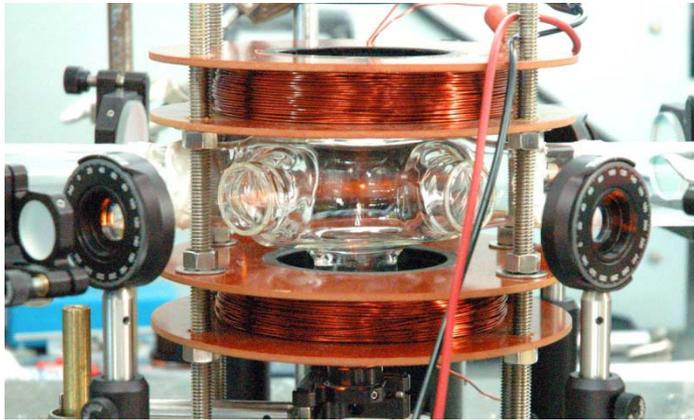
原子集団はコヒーレント状態として巨視的波動関数を形成する（超流動の起源）。

巨視的波動関数： $\langle \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \Psi(x) \Psi^*(y)$

巨視的波動関数はBECのオーダーパラメーターとなる

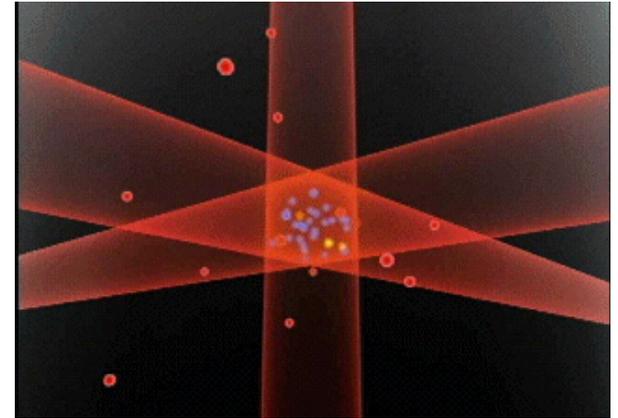
原子気体ボース・アインシュタイン凝縮

1997年に希薄なアルカリ原子気体のボース・アインシュタイン凝縮が成功した

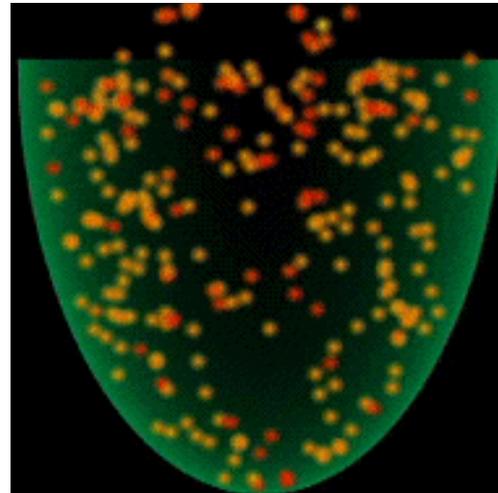


原子のトラップ

^{87}Rb , ^{23}Na , ^7Li , ^1H , ^{85}Rb ,
 ^{41}K , ^4He , ^{133}Cs , ^{174}Yb ,
 ^{52}Cr , ^{40}Ca , ^{84}Sr



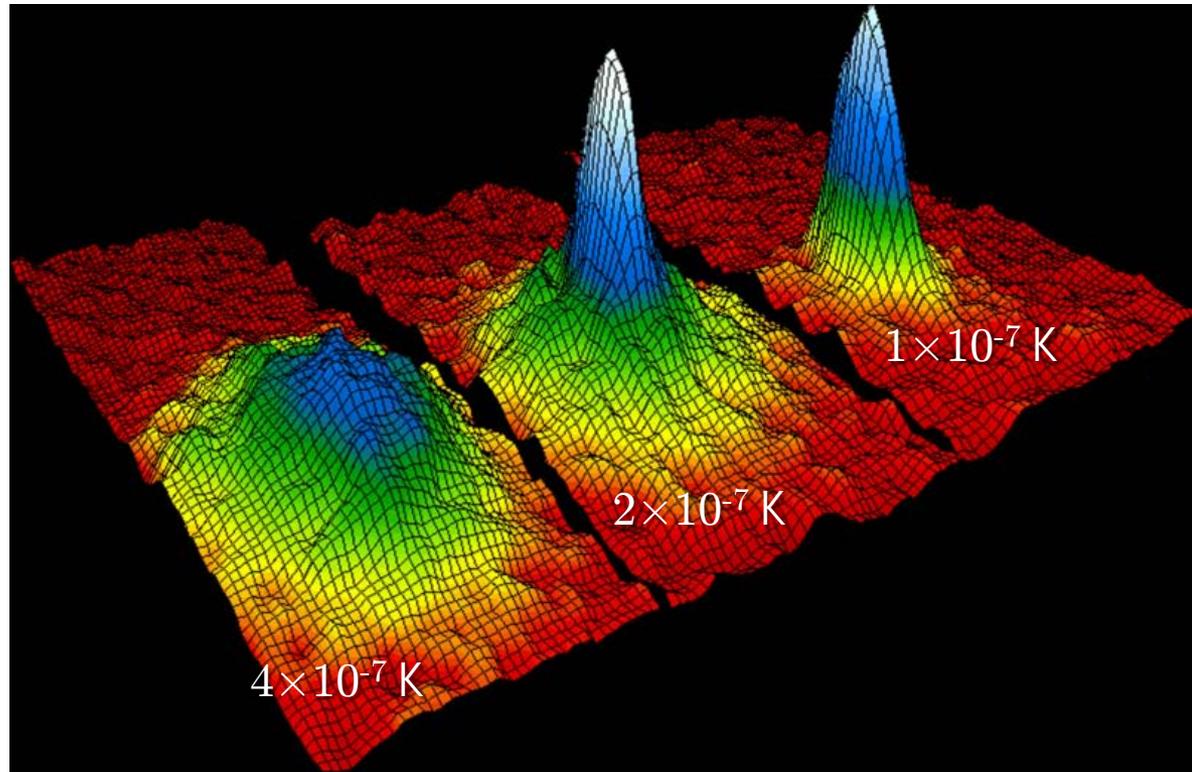
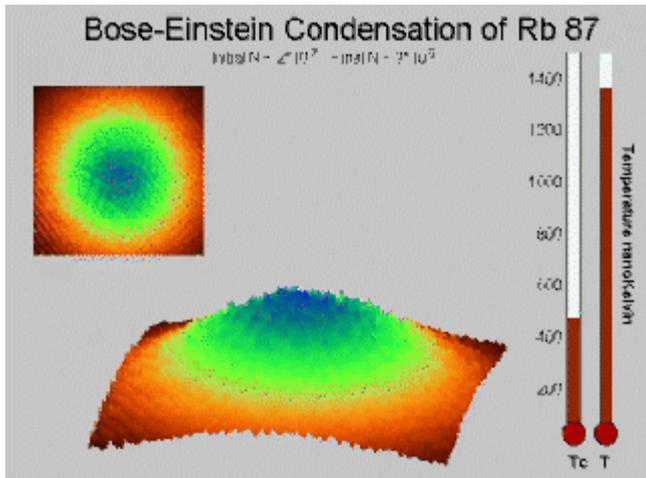
レーザーによる原子の冷却



熱い原子を捨てる
(蒸発冷却)

原子気体BEC

BEC of ^{87}Rb



BECとゲージ対称性の破れ

BECの本質は巨視的波動関数（オーダーパラメーター）の存在である

$$\langle \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}^\dagger(y) \rangle \xrightarrow{|x-y| \rightarrow \infty} \Psi(x) \Psi^*(y)$$

$\Psi(x) = |\Psi(x)| \exp[i \phi(x)]$: 波動関数の位相 $\phi(x)$ が決まる（液晶の配向に対応）

絶対零度における平均場ハミルトニアン

$$H = \int dx \left[\frac{\hbar^2}{2M} \nabla \Psi^*(\mathbf{x}) \nabla \Psi(\mathbf{x}) + \frac{c_0}{2} |\Psi(\mathbf{x})|^4 \right]$$

BECと $U(1)$ ゲージ対称性の破れ

絶対零度における平均場ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi|^2 + \frac{c_0}{2} |\Psi|^4 \right]$$

波動関数の時間発展 : Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\Psi} = \left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + c_0 |\Psi|^2 \right] \Psi$$

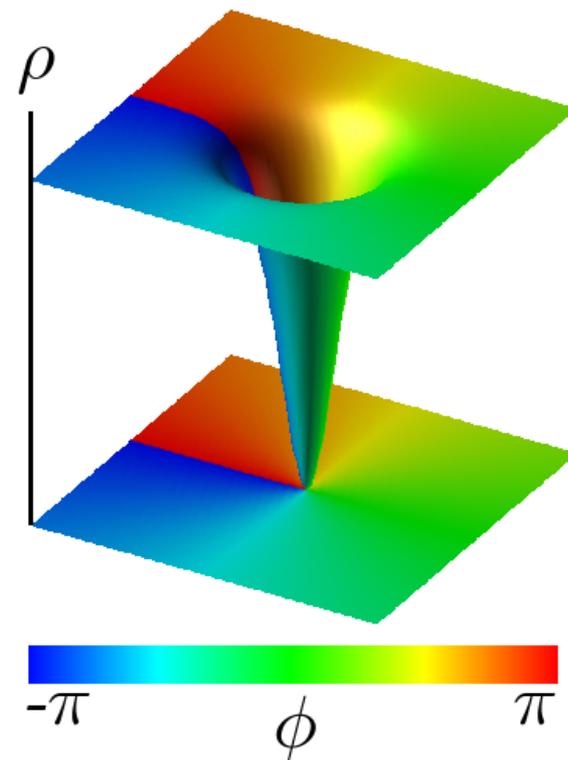
$$\Psi(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})| \exp[i\phi(\mathbf{x})]$$

$$\rho(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})|^2 : \text{流体の数密度}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{m} \nabla\phi(\mathbf{x}) : \text{流体の流速}$$

量子渦（トポロジカル欠陥）の出現

波動関数の位相 ϕ が 2π ずれている部分があると、その中心では波動関数を定義できず($\rho = 0$)トポロジカル欠陥となる。



$$\Psi(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})| \exp[i\phi(\mathbf{x})]$$
$$\rho(\mathbf{x}) = |\Psi(\mathbf{x})|^2 : \text{流体の数密度}$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{x}) : \text{流体の流速}$$

量子渦（トポロジカル欠陥）の出現

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} |\nabla\Psi|^2 + \frac{c_0}{2} |\Psi|^4 \right]$$

ハミルトニアンは $U(1)$ ゲージ変換で不変 $\Psi \rightarrow e^{i\phi} \Psi$: 対称性 G

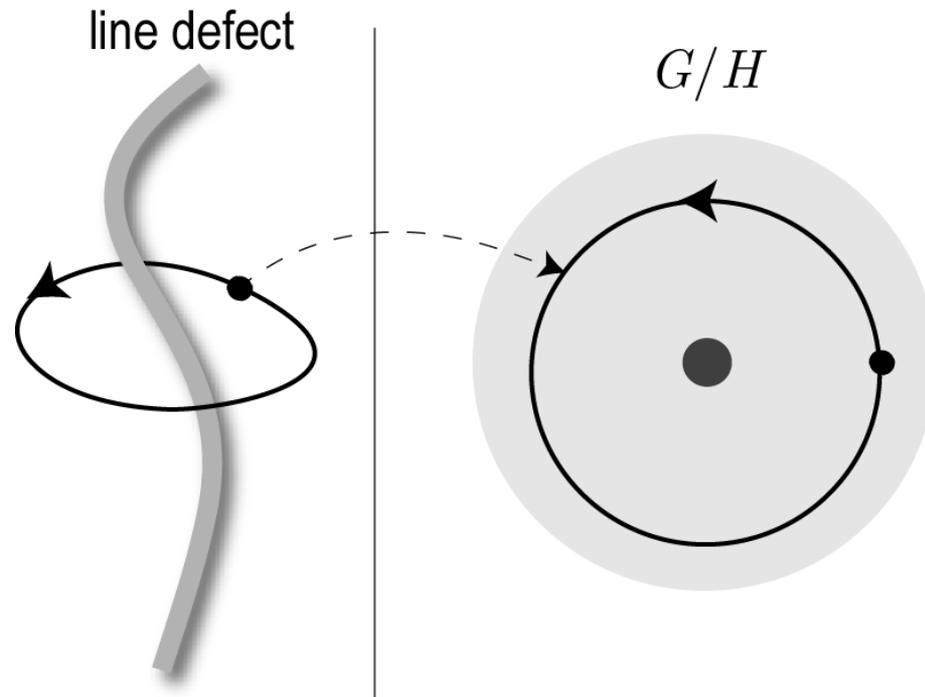
状態は位相 ϕ が決まっている : 状態の対称性 $H = 1$

Order-parameter manifold (Ψ の自由度)

$$G/H \cong U(1) \cong S^1$$

トポロジカル欠陥（基本群）

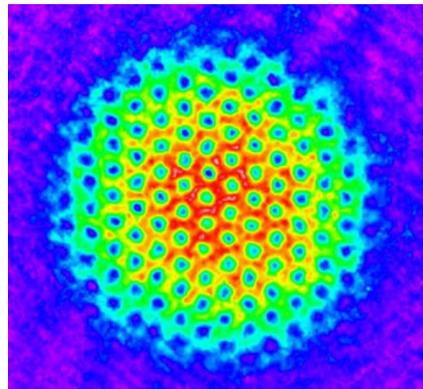
線欠陥（基本群）



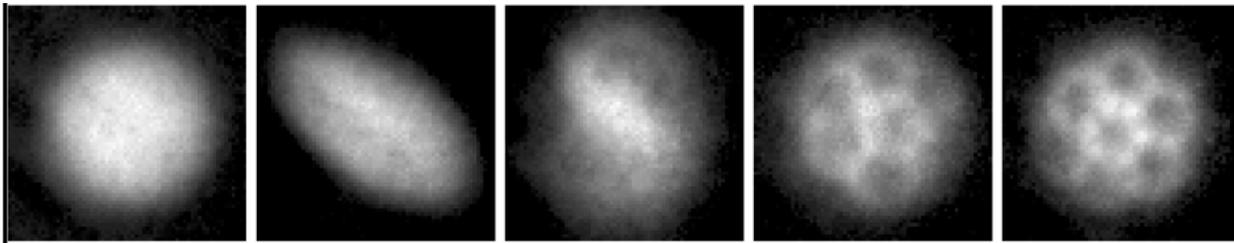
渦を囲む経路に沿って、 Ψ の空間 S^1 を何回巻いたか？：欠陥のトポロジカル不変量（基本群 π_1 ）

渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦

原子気体BECにおける渦格子の観測



Vortex lattice in
 ^{87}Rb BEC



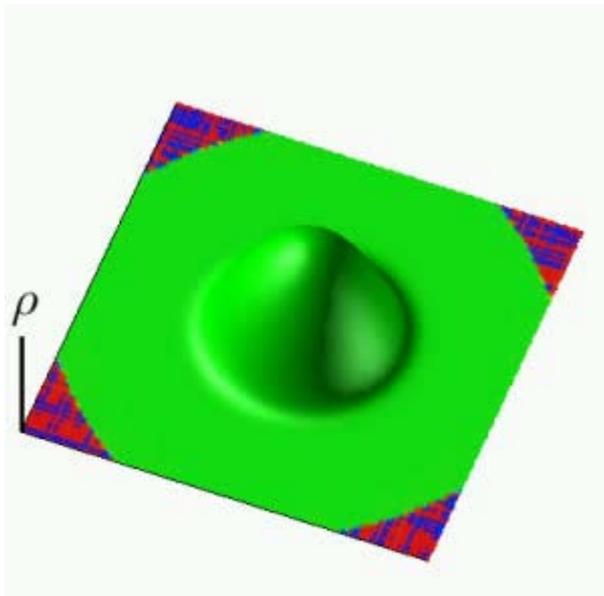
K. W. Madison et al. PRL **86**, 4443 (2001)

渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦渦

2D GP equation (in non-dimensional form)

$$(i - \gamma) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\nabla^2}{2} - \mu + \frac{\omega^2 \mathbf{x}^2}{2} + c_0 |\Psi|^2 + i\Omega_z \mathbf{x} \times \nabla \right] \Psi$$

K. Kasamatsu et al. PRA **67**, 033610 (2003)



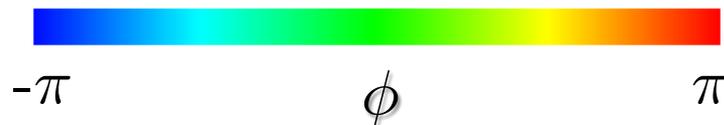
γ : dissipation term

μ : chemical potential

ω : harmonic trap potential

Ω_z : external rotation

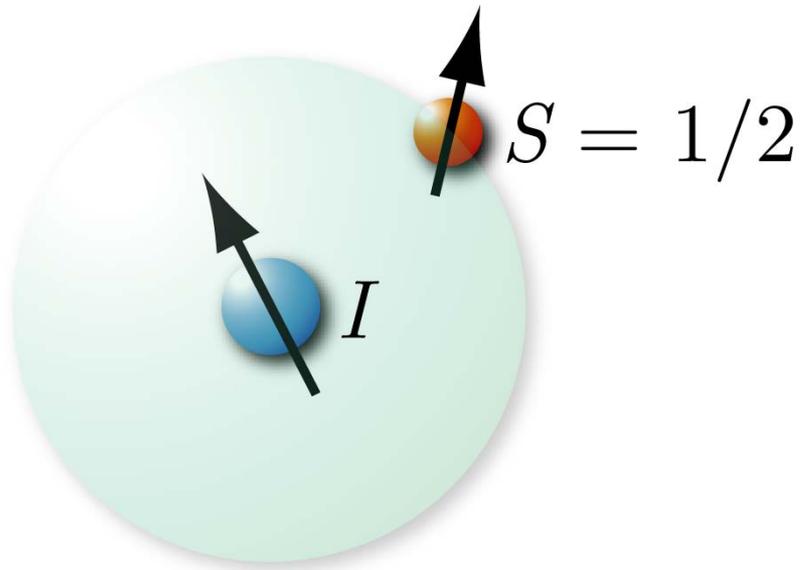
$t = 0$: Stationary state with $\Omega_z = 0$



スピノルBEC

原子のスピノ自由度が生きているようなBECを考える

超微細相互作用により核と電子のスピノが結合する($F = I + S + L$)



$^{87}\text{Rb}, ^{23}\text{Na},$ $^7\text{Li}, ^{41}\text{K}$	$F=1, 2$
^{85}Rb	$F=2, 3$
^{133}Cs	$F=3, 4$
^{52}Cr	$S=3, I=0$

スピノールBEC

原子のスピノール自由度が生きているようなBECを考える

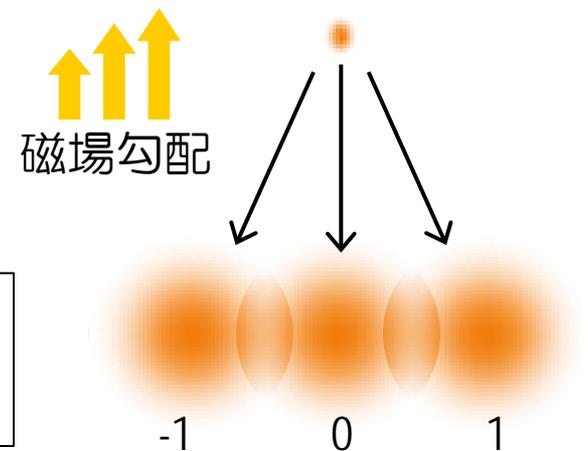
^{87}Rb ($I = 3/2$)

$$F = 2 \begin{cases} m_F = 2 \\ m_F = 1 \\ m_F = 0 \\ m_F = -1 \\ m_F = -2 \end{cases} \quad F = 1 \begin{cases} m_F = 1 \\ m_F = 0 \\ m_F = -1 \end{cases}$$

m_F で特徴づけられる多成分のBECが実現する

スピノール1：3成分の非対角長距離秩序 $\Psi = (\psi_1, \psi_0, \psi_{-1})$

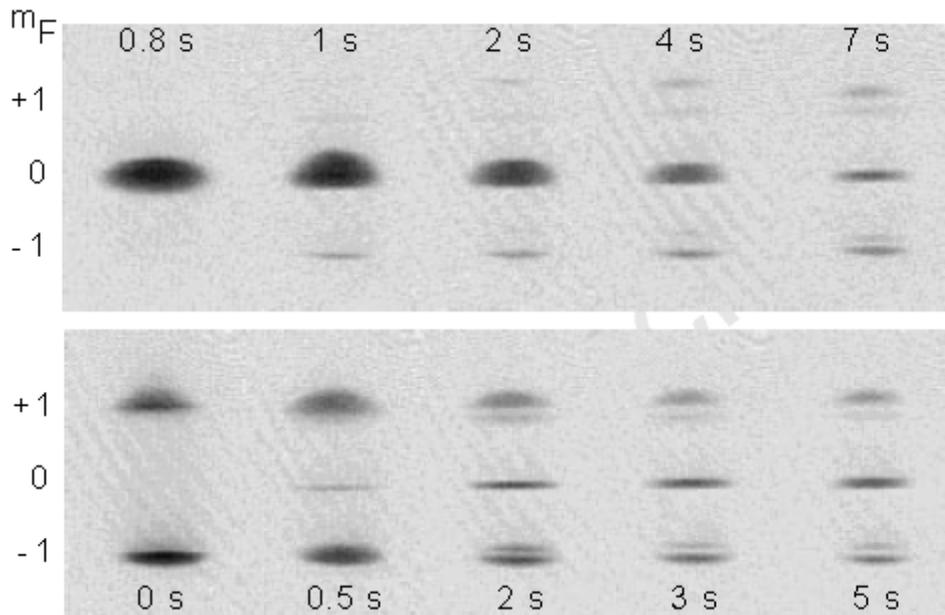
Stern-Gerlach実験により成分ごとに観測できる



BECのスピンダイナミクス

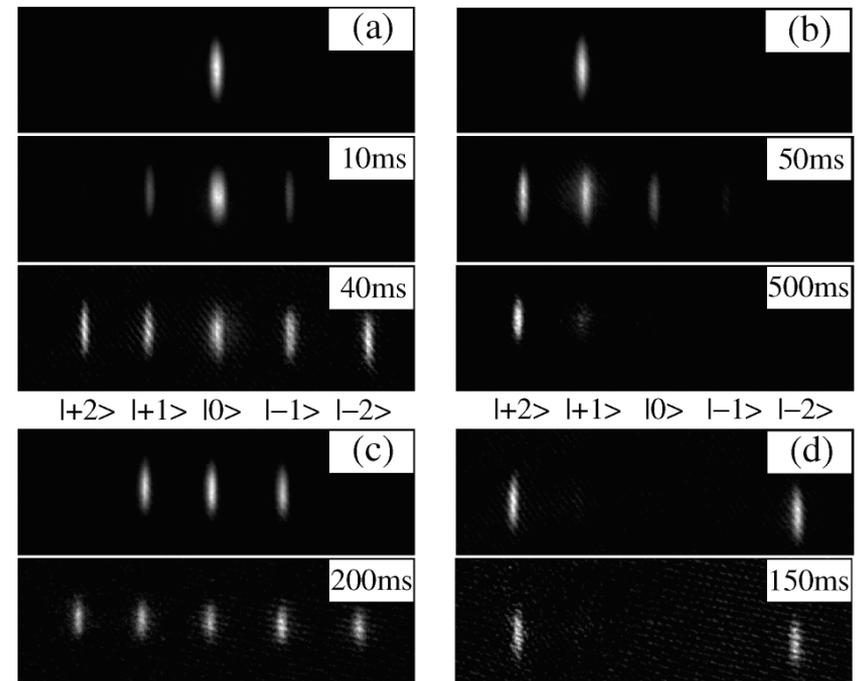
Stern-Gerlach実験

$F = 1$



J. Stenger et al. Nature **396**, 345 (1998)

$F = 2$



H. Schmaljohann et al. PRL **92**, 040402 (2004)

異なる m_F の凝縮体は入れ替わることができる (スピンの回転演算に対応)

ハミルトニアン (スピン1の場合)

$$H = \int d\mathbf{x} \sum_m \Psi_m^\dagger(\mathbf{x}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right) \Psi_m(\mathbf{x}) \\ + \frac{1}{2} \int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{x}_2 \sum_{m_1, m_2, m'_1, m'_2} \Psi_{m_1}^\dagger(\mathbf{x}_1) \Psi_{m_2}^\dagger(\mathbf{x}_2) V_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \Psi_{m'_2}(\mathbf{x}_2) \Psi_{m'_1}(\mathbf{x}_1)$$

低エネルギー接触相互作用を仮定 ($l=0$)

$$V_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \sum_{F=0,2} g_F \sum_{m_1, m_2, m'_1, m'_2, M} O_{m_1 m_2}^{F, M} \left(O_{m'_1 m'_2}^{F, M} \right)^* \\ = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) (c_0 \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} + c_1 \hat{\mathbf{F}}_{m_1 m'_1} \cdot \hat{\mathbf{F}}_{m_2 m'_2})$$

$O_{m_1 m_2}^{F, M}$: Clebsch-Gordan 係数

$$c_0 = \frac{g_0 + 2g_2}{3}, \quad c_1 = \frac{g_2 - g_0}{3}$$

$$F_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_- = F_+^T, \quad F_x = \frac{F_+ + F_-}{2}, \quad F_y = \frac{F_+ - F_-}{2i}$$

平均場ハミルトニアン(spin-1)

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m=-1}^1 \nabla \Psi_m^* \nabla \Psi_m + \underbrace{\left(\frac{c_0}{2} \rho^2 \right)}_{\text{密度}} + \underbrace{\left(\frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 \right)}_{\text{スピノール}} \right]$$

$$\rho = \sum_m |\Psi_m^*|^2 : \text{粒子数密度}$$

$$\mathbf{F} = \sum_{m,m'} \Psi_m^* \hat{\mathbf{F}}_{mm'} \Psi_{m'} : \text{スピン密度}$$

ゲージ変換とスピン回転の対称性が破れている

$$\Psi' = e^{i\phi} e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} \alpha} \Psi \quad (G = U(1)_{\mathbf{F}} \times SO(3)_{\phi})$$

対称性の破れと相図

$$H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{m=-1}^1 \nabla \Psi_m^* \nabla \Psi_m + \frac{c_0}{2} \rho^2 + \frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 \right]$$

$c_1 > 0$: polar相 (^{23}Na BEC)

$$e^{i\varphi} e^{-i\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{F}} \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} = 0$$

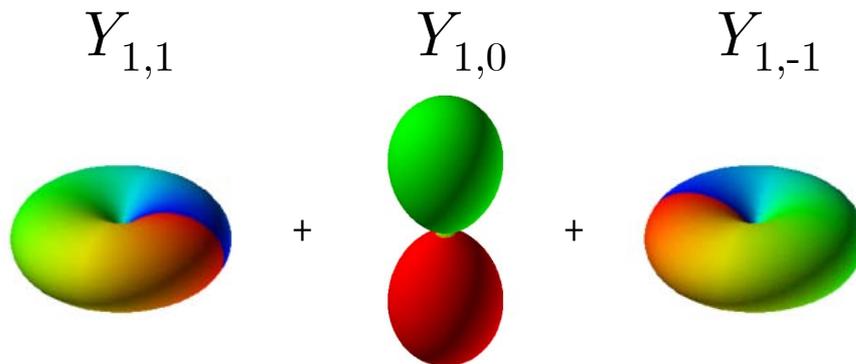
$c_1 < 0$: Ferromagnetic相 (^{87}Rb BEC)

$$e^{i\varphi} e^{-i\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{F}} \alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F} \neq 0$$

球面調和関数を用いたスピン状態の表示

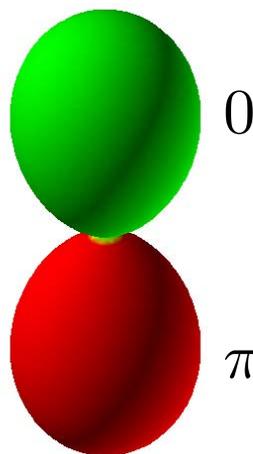
$$\sum_{m=-1}^1 \Psi_m Y_{2,m}$$



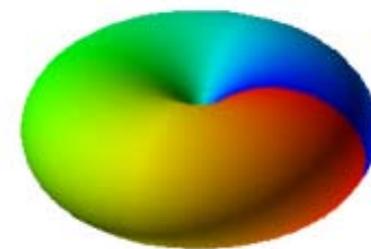
$$\cos \theta$$

$$-e^{i\phi} \sin \theta$$

Polar相



Ferromagnetic相

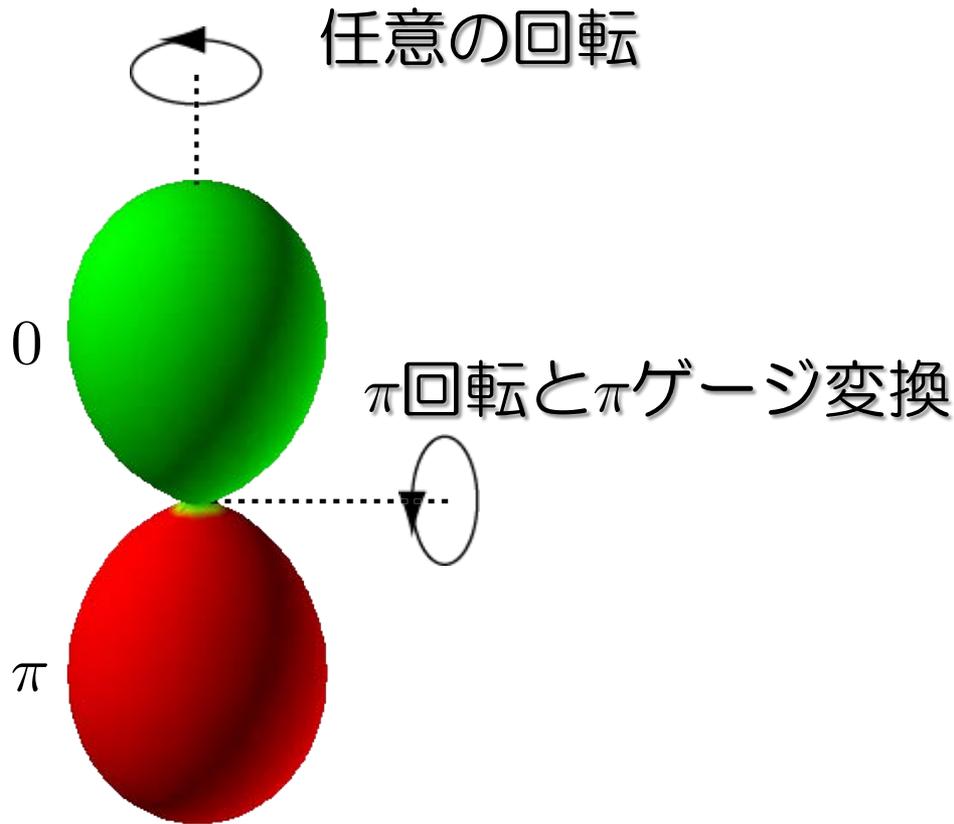


$-\pi$

π



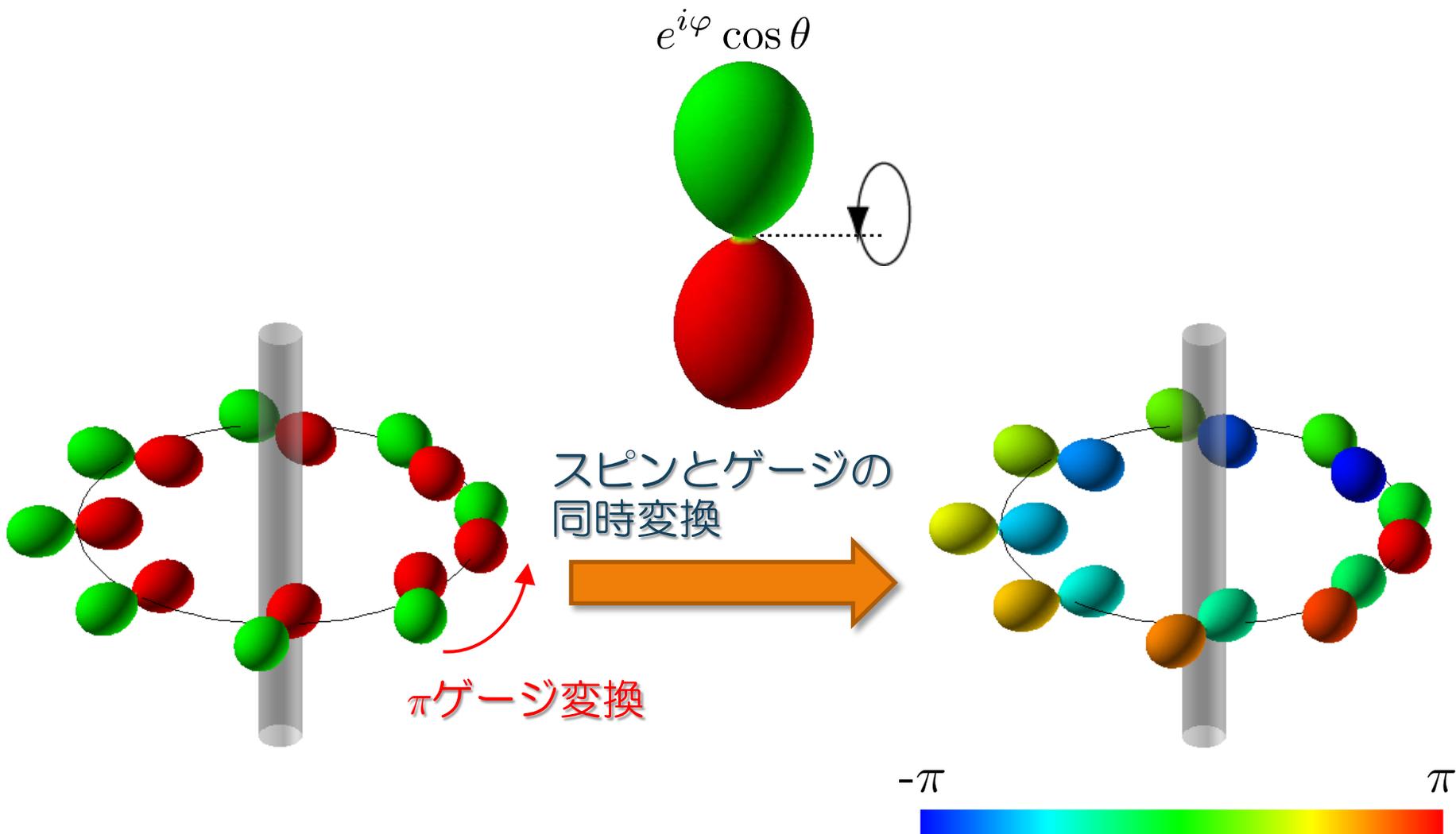
Polar相の対称性



$$\begin{aligned}\frac{G}{H} &\simeq \frac{U(1)_\phi \times SO(3)_F}{SO(2)_F \rtimes (\mathbb{Z}_2)_{\phi+F}} \\ &\simeq \frac{U(1)_\phi \times S^2_F}{(\mathbb{Z}_2)_{\phi+F}}\end{aligned}$$

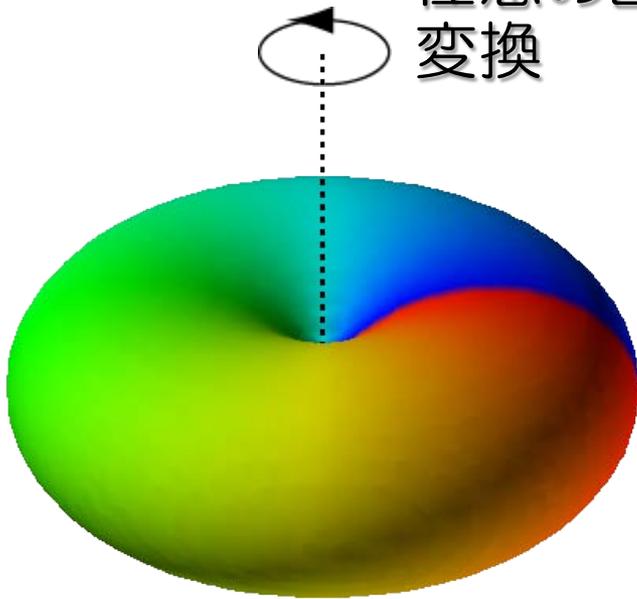
Polar相のオーダーパラメーターはネマティック
液晶とほぼ同様である

Polar相の量子渦（トポロジカル欠陥）



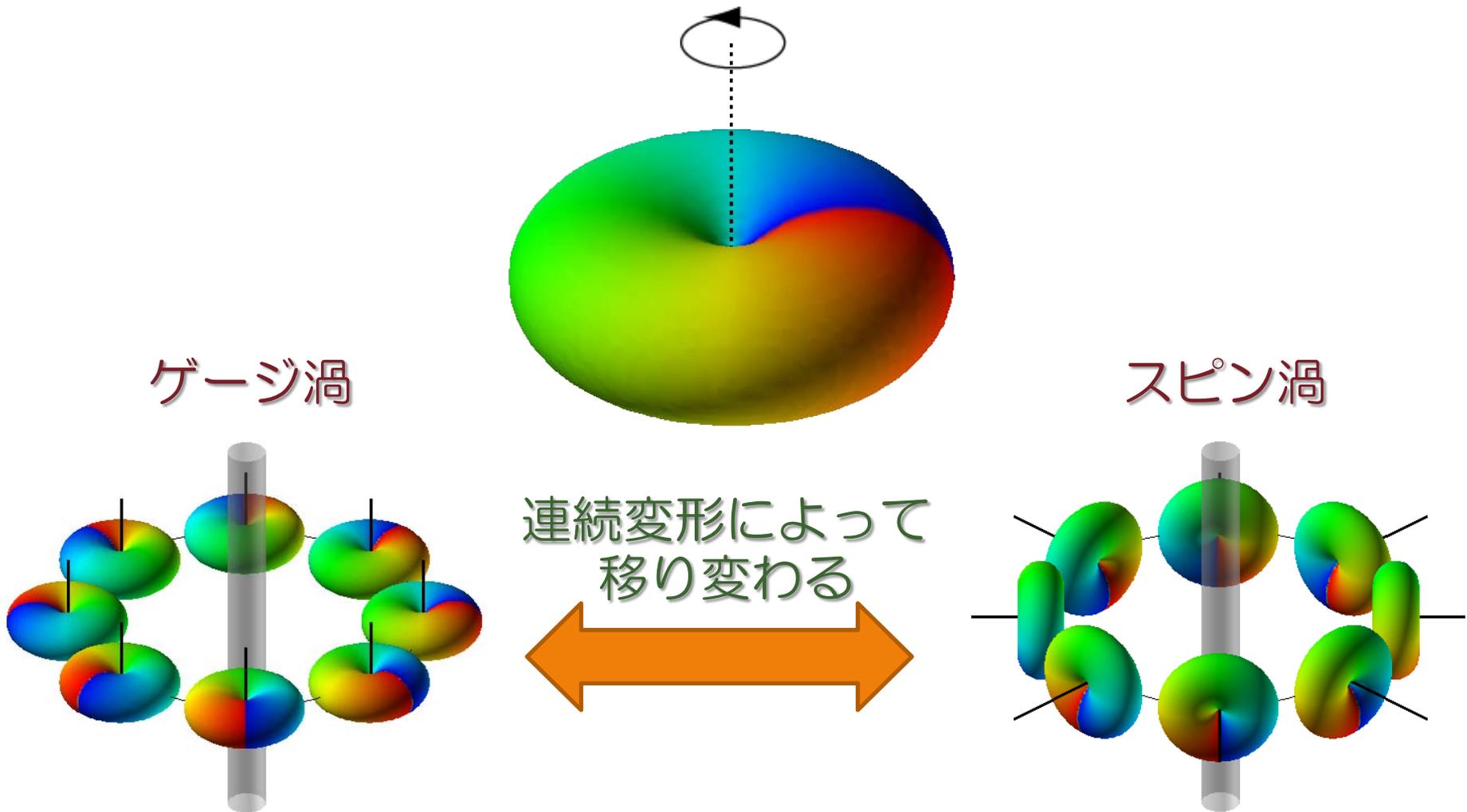
Ferromagnetic相の対称性

任意の回転とゲージ
変換

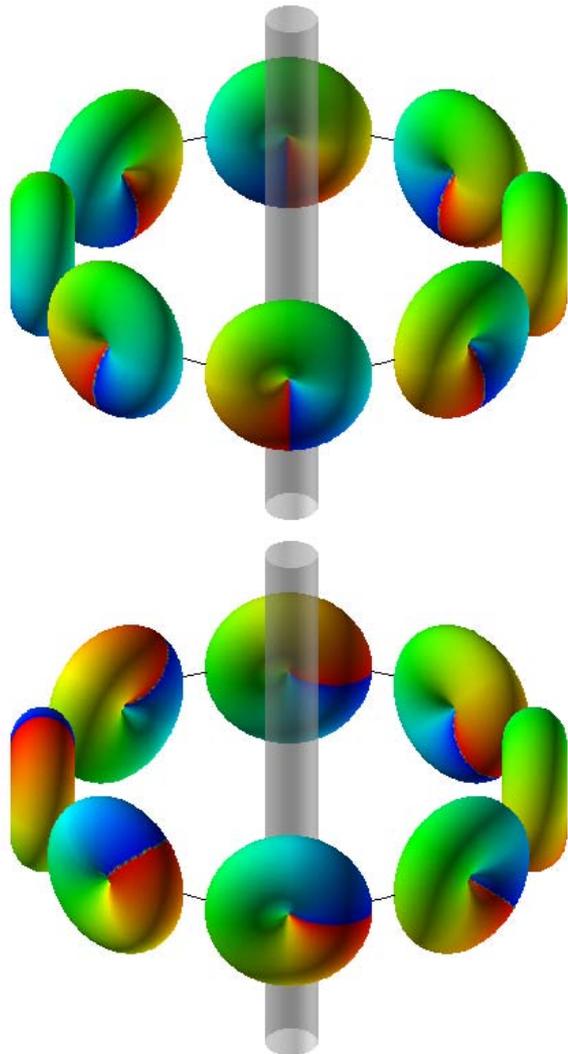


$$\begin{aligned}\frac{G}{H} &\simeq \frac{U(1)_\phi \times SO(3)_F}{(U(1))_{\phi+F}} \\ &\simeq SO(3)_{\phi+F}\end{aligned}$$

Ferromagnetic相の渦



Ferromagnetic相の量子渦



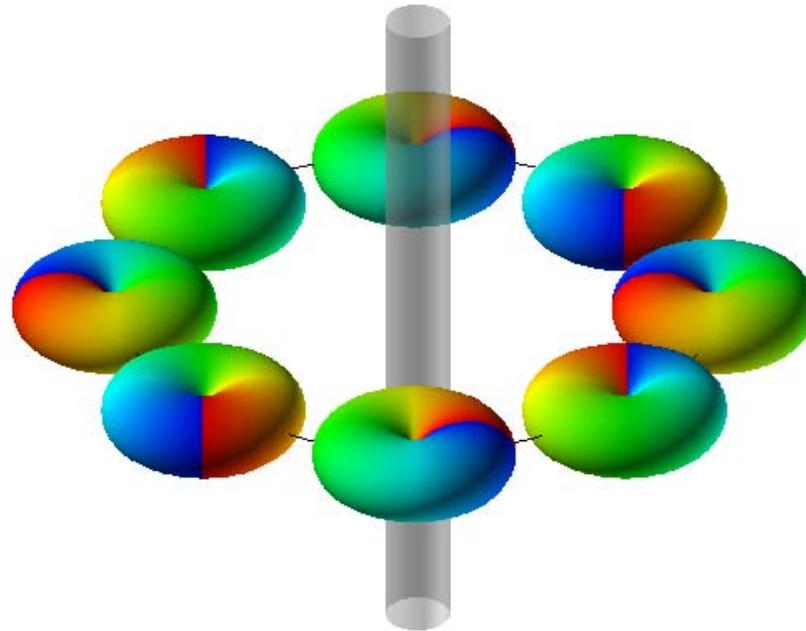
量子渦になる



量子渦にならない

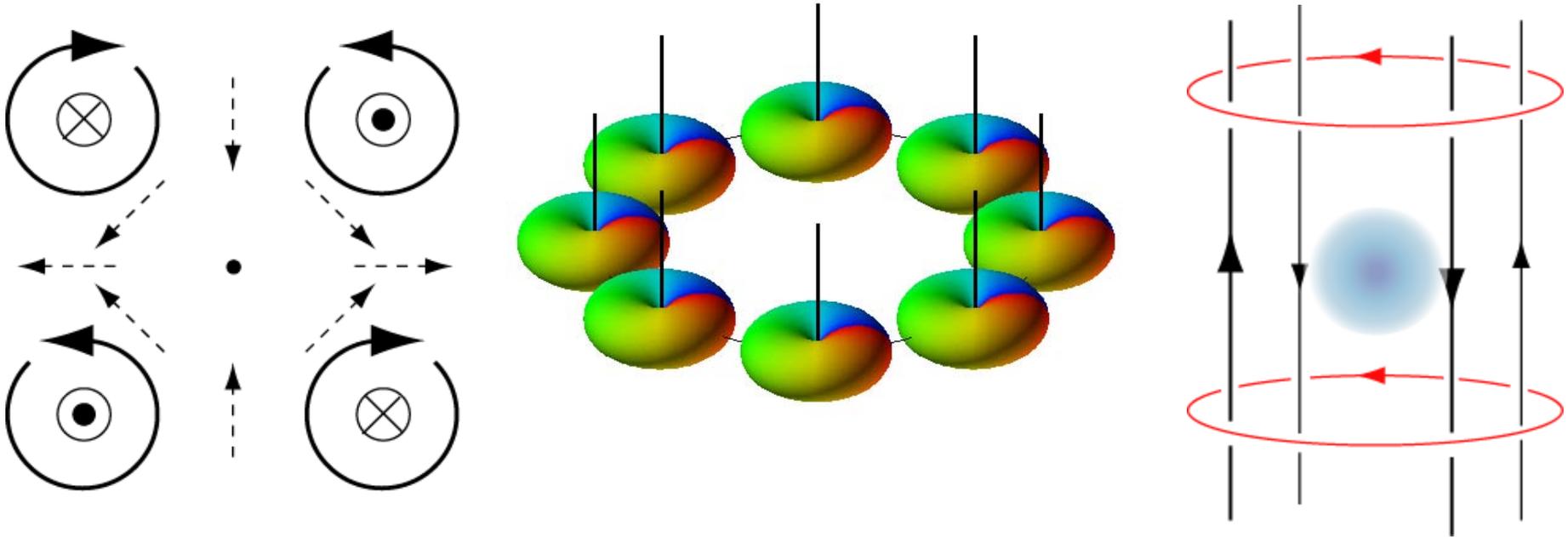
Ferromagnetic相の量子渦

2回巻くと量子渦でなくなる



Ferromagnetic相の量子渦

4重極磁場を用いて巻き数2を作る



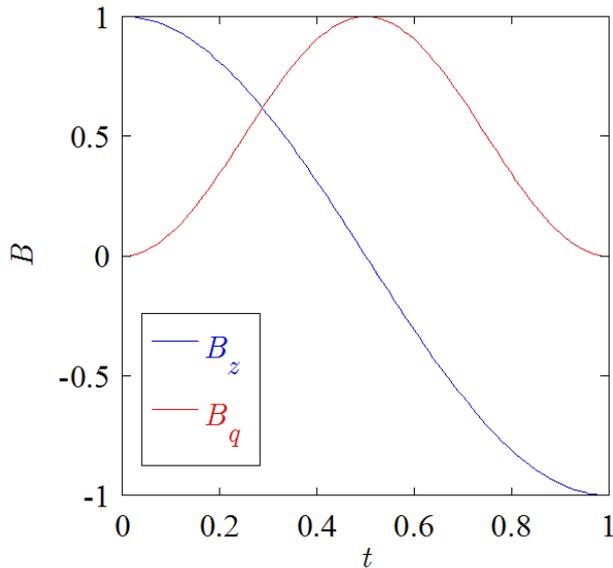
$$(\Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}) = (1, 0, 0)$$

Ferromagnetic相の量子渦

4重極磁場を用いて巻き数2を作る

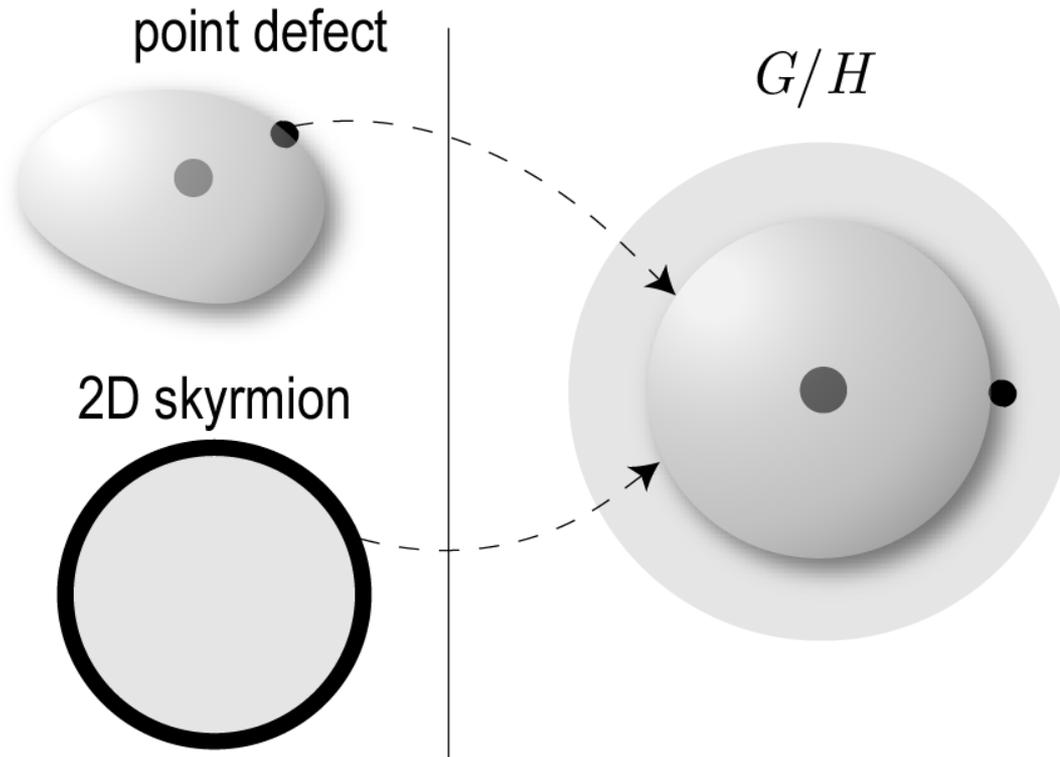
$$i\hbar \frac{\partial \Psi_m}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V + B \right) \Psi_m + \text{interaction}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_z & B_q e^{i\varphi} / \sqrt{2} & 0 \\ B_q e^{-i\varphi} / \sqrt{2} & 0 & B_q e^{i\varphi} / \sqrt{2} \\ 0 & B_q e^{-i\varphi} / \sqrt{2} / \sqrt{2} & -B_z \end{pmatrix}$$



点欠陥（第2ホモトピー）

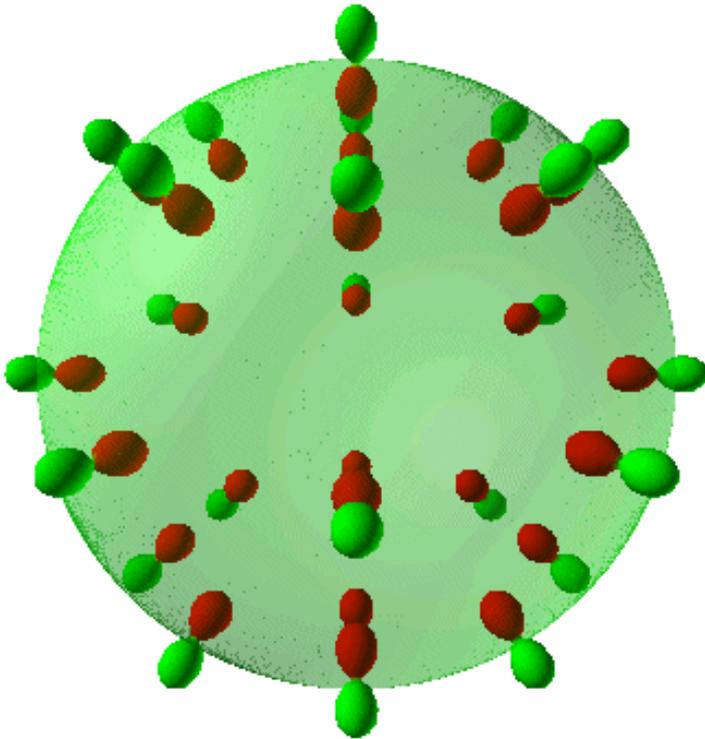
点欠陥、2次元スカーミオン



点欠陥を覆う表面に沿って、 Ψ の空間を何回覆ったか？：点欠陥のトポロジカル不変量 (π_2)

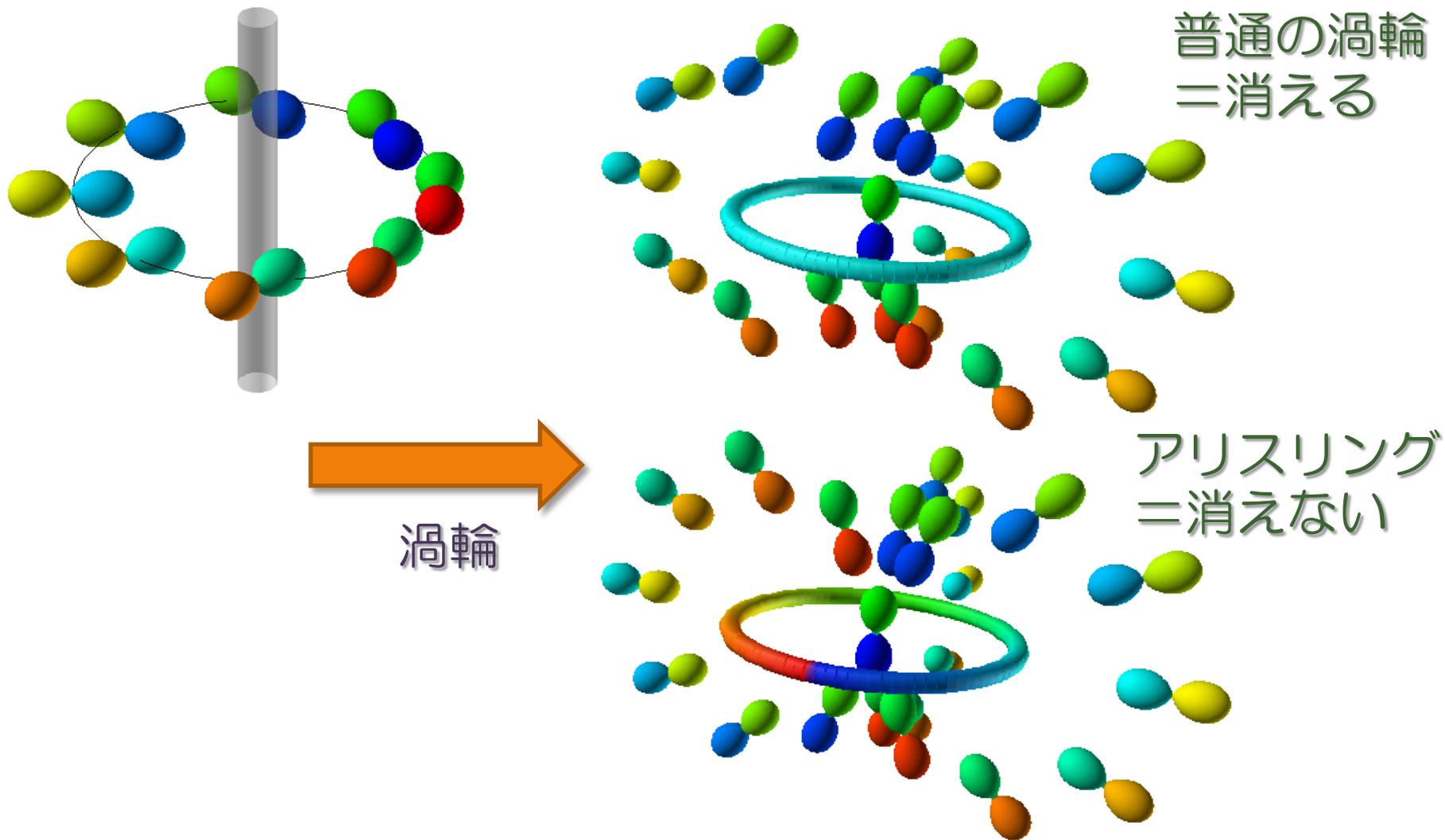
点欠陥

Polar相における点欠陥



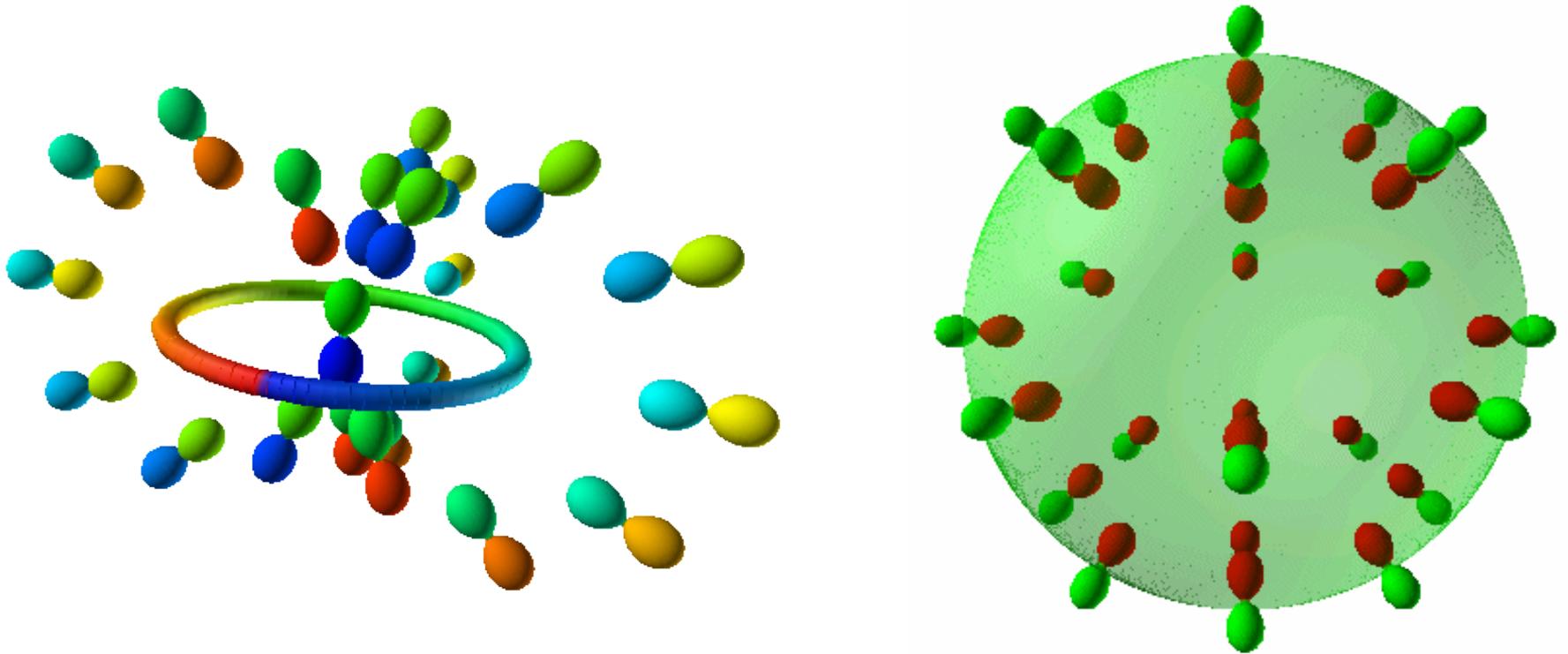
Ferromagnetic相に点欠陥は
存在しない

Polar相の渦輪



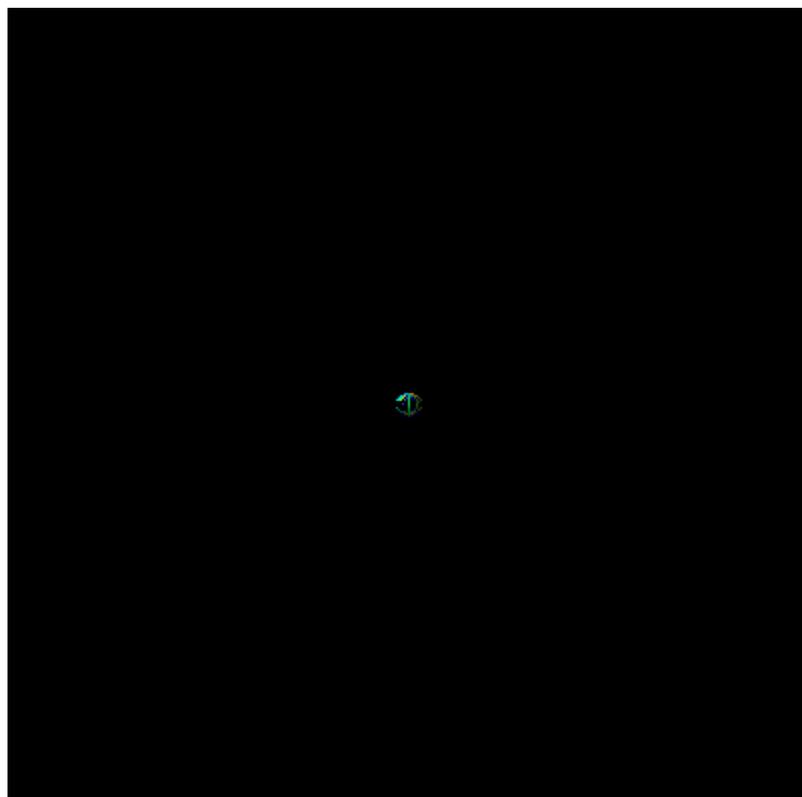
Alice ringと点欠陥

Alice ringと点欠陥は連続的に移り変わる

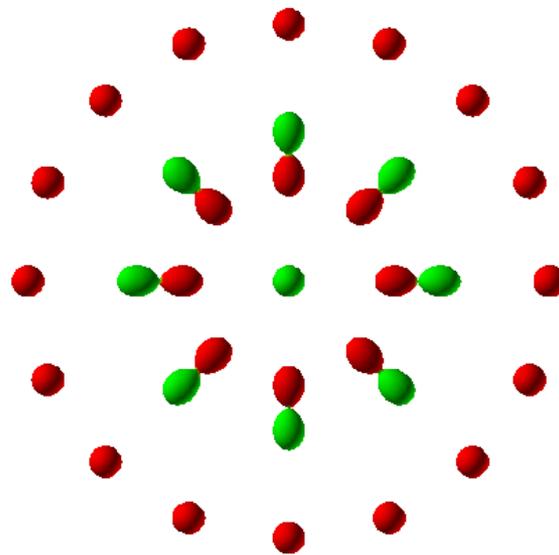


Alice ringと点欠陥

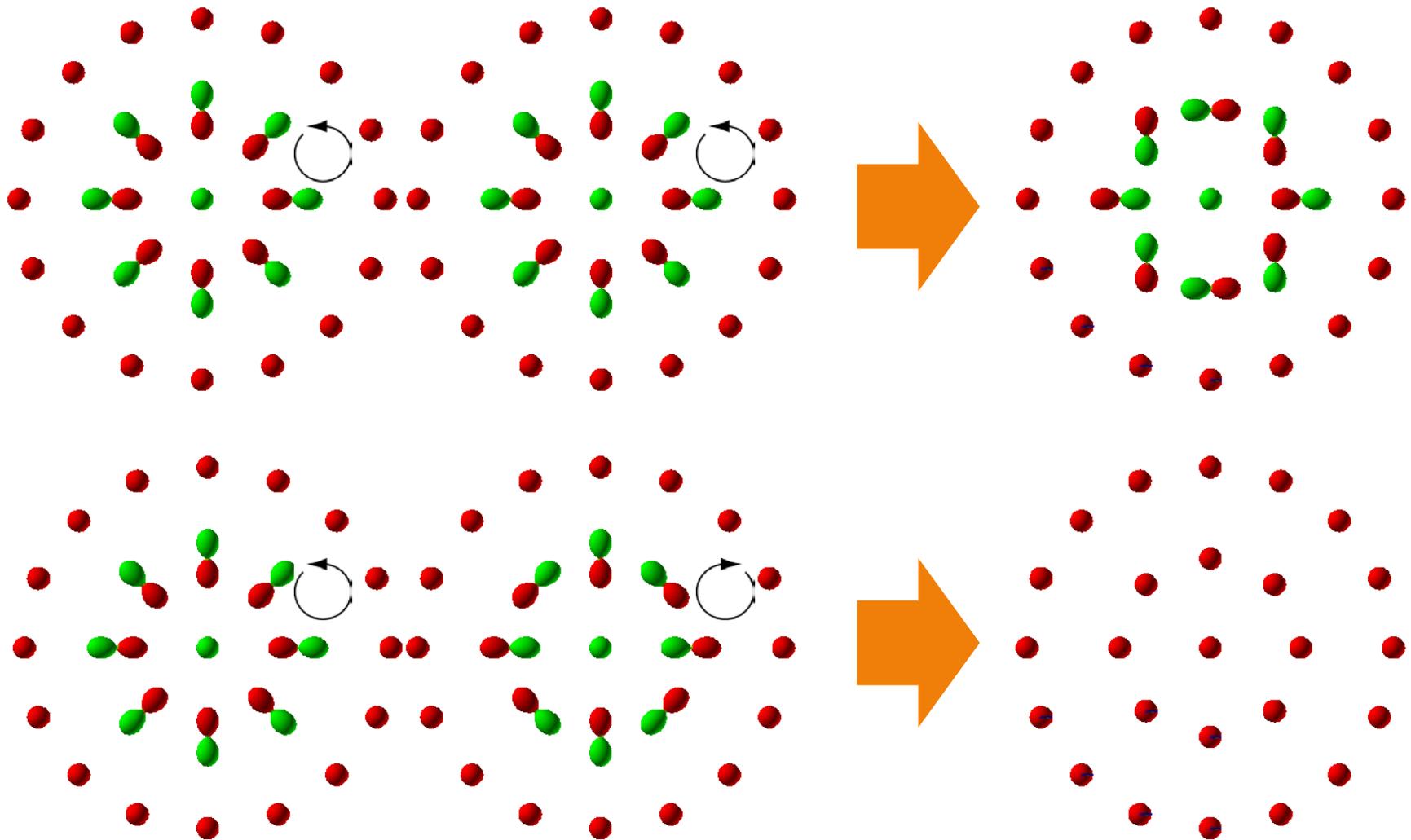
Alice ringと点欠陥は連続的に移り変わる



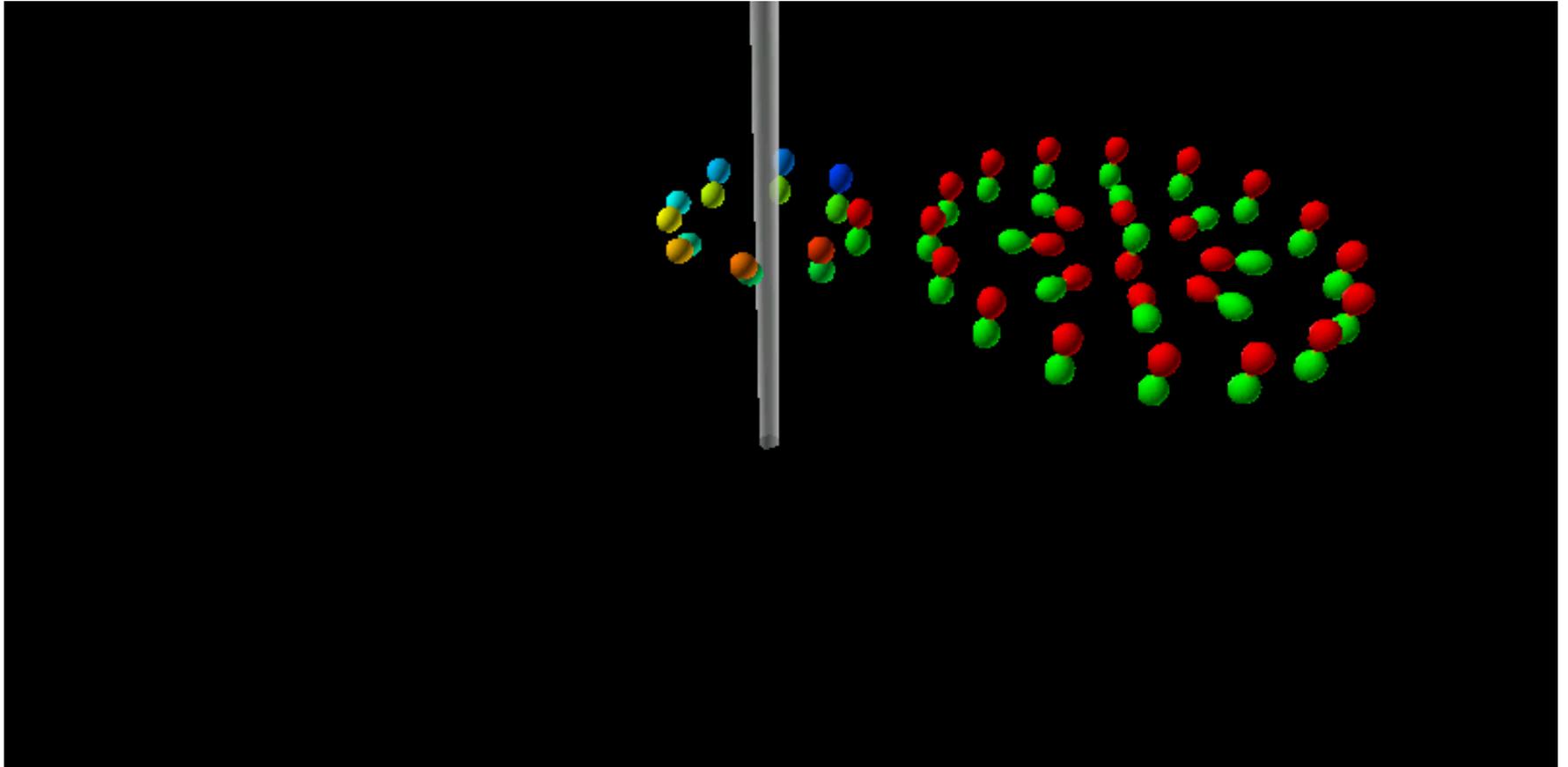
2次元スカーミオン



2次元スカーミオンの合体

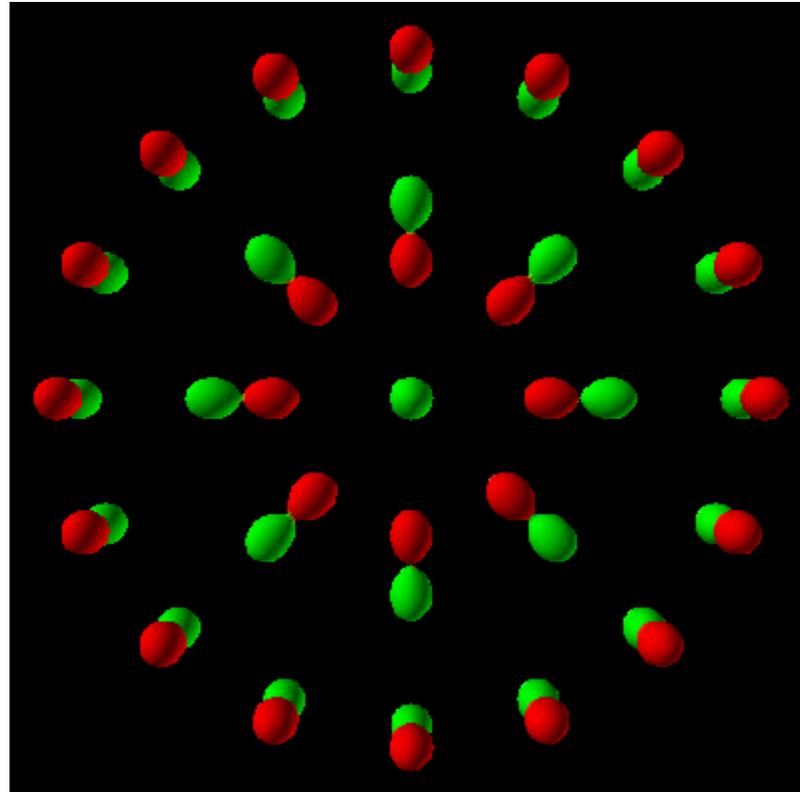


2次元スカーミオンと渦



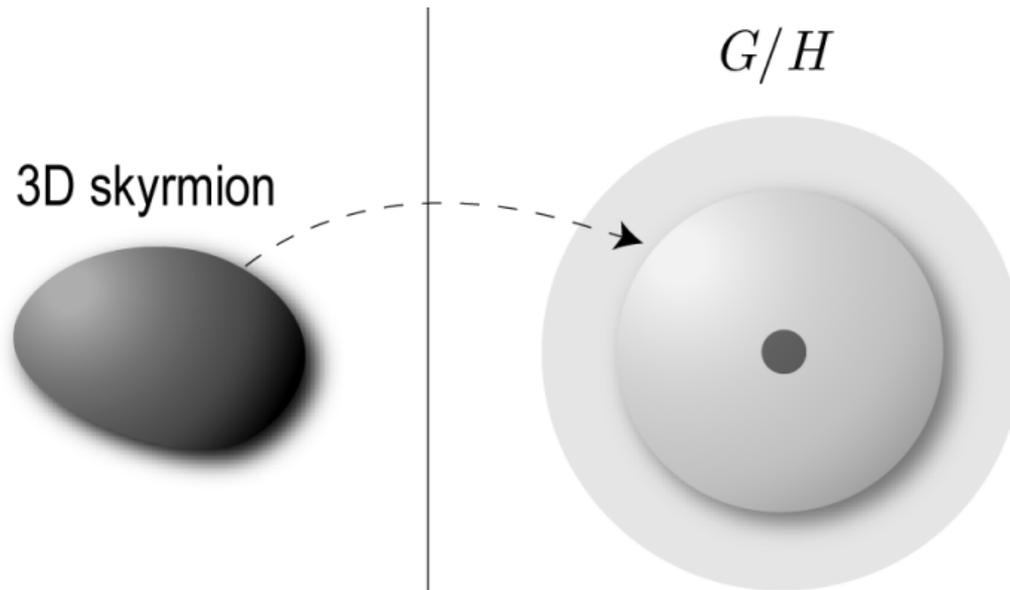
S. Kobayashi, et al. arXiv:1007.3832

2次元スカーミオンと渦



スカーミオン

スカーミオン

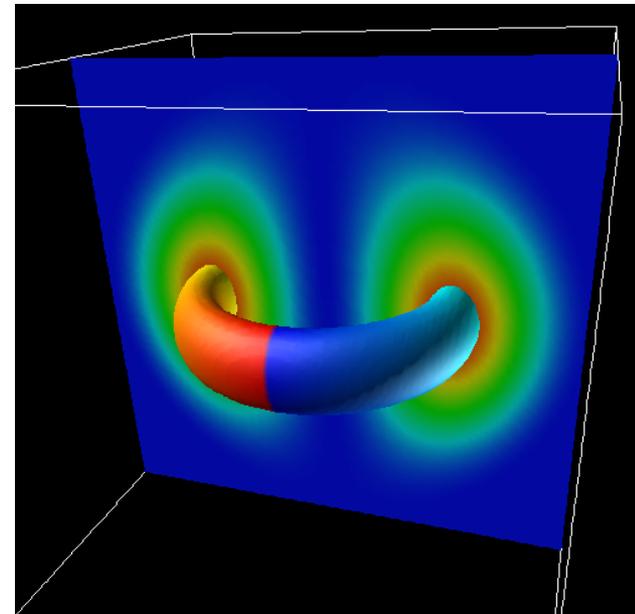
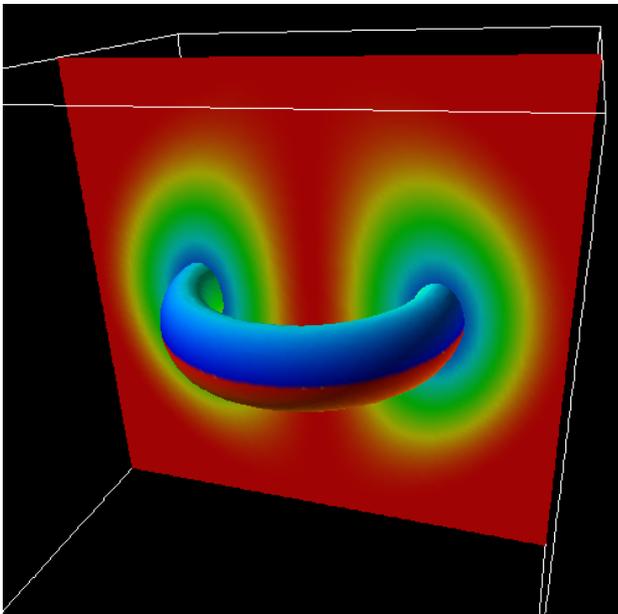


境界が1つに固定された空間の中で、 Ψ の空間を何回覆ったか？：スカーミオンのトポロジカル不変量 (π_3)

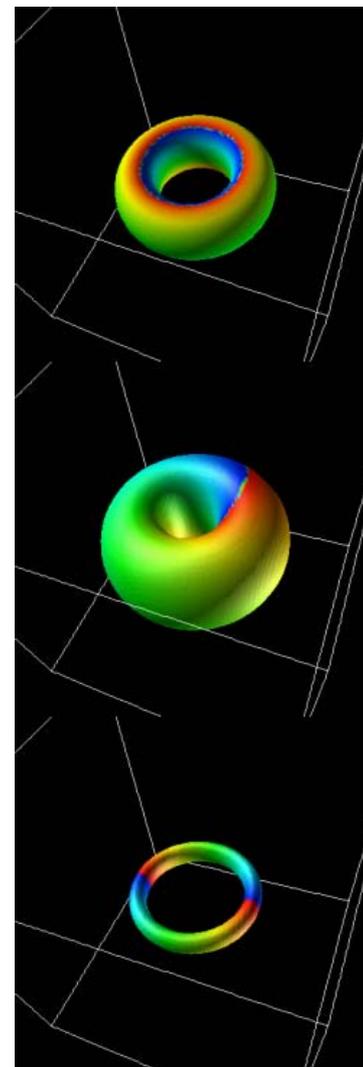
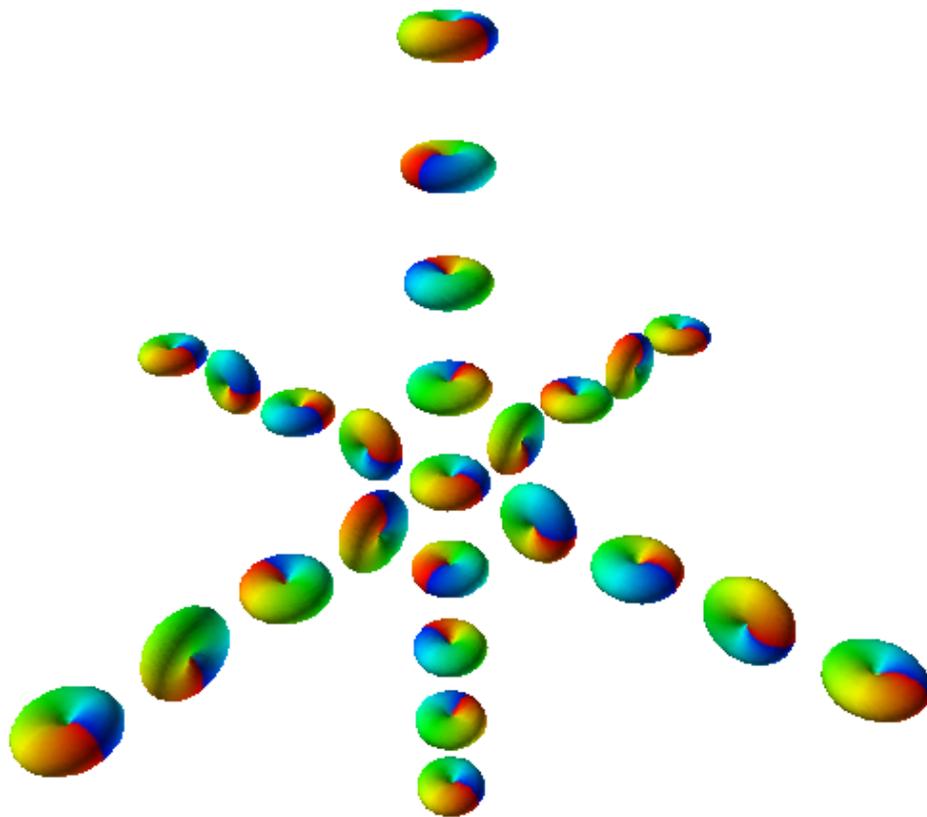
2成分BECのスカ－ミオン：Vorton

$$\exp[-i(F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi + F_z \cos \theta)r] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

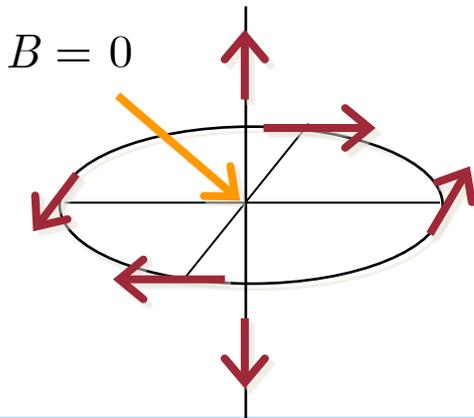
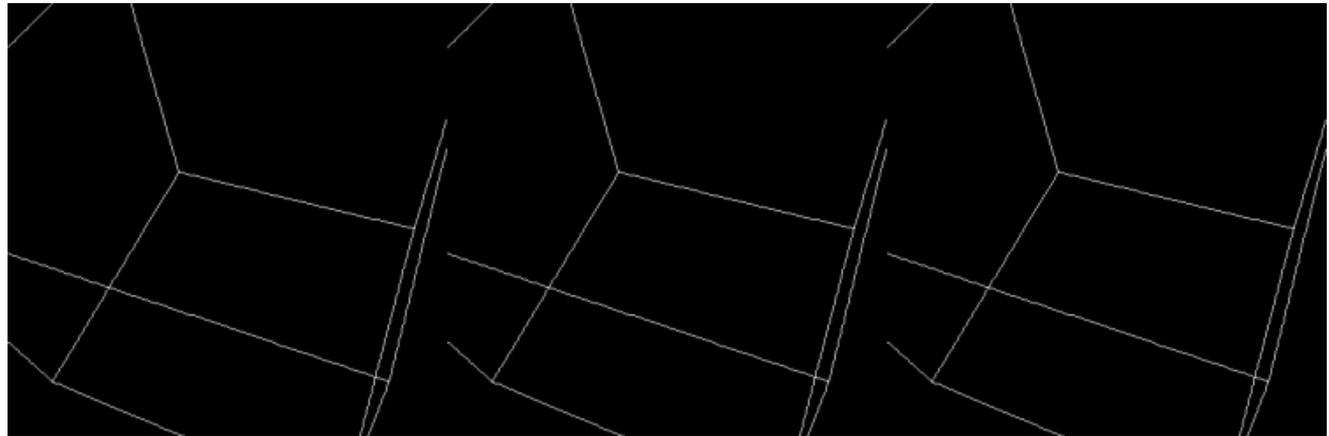
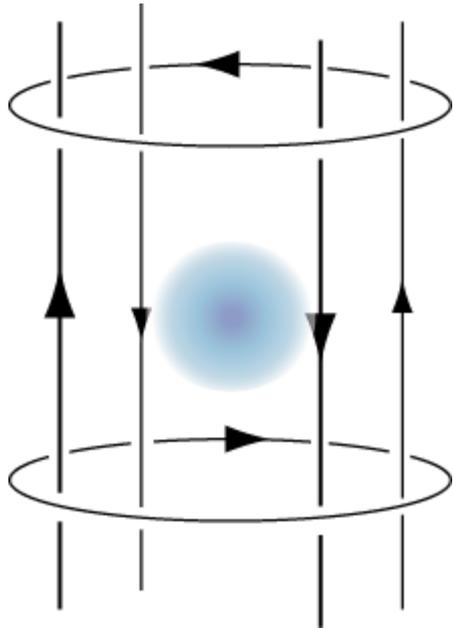
$$F_{x,y,z} = \frac{1}{2}\sigma_{x,y,z}$$



Ferromagnetic相のスカークォン

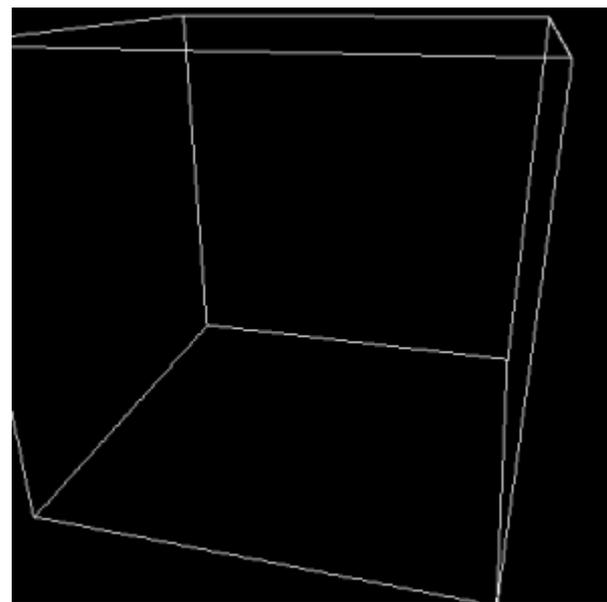
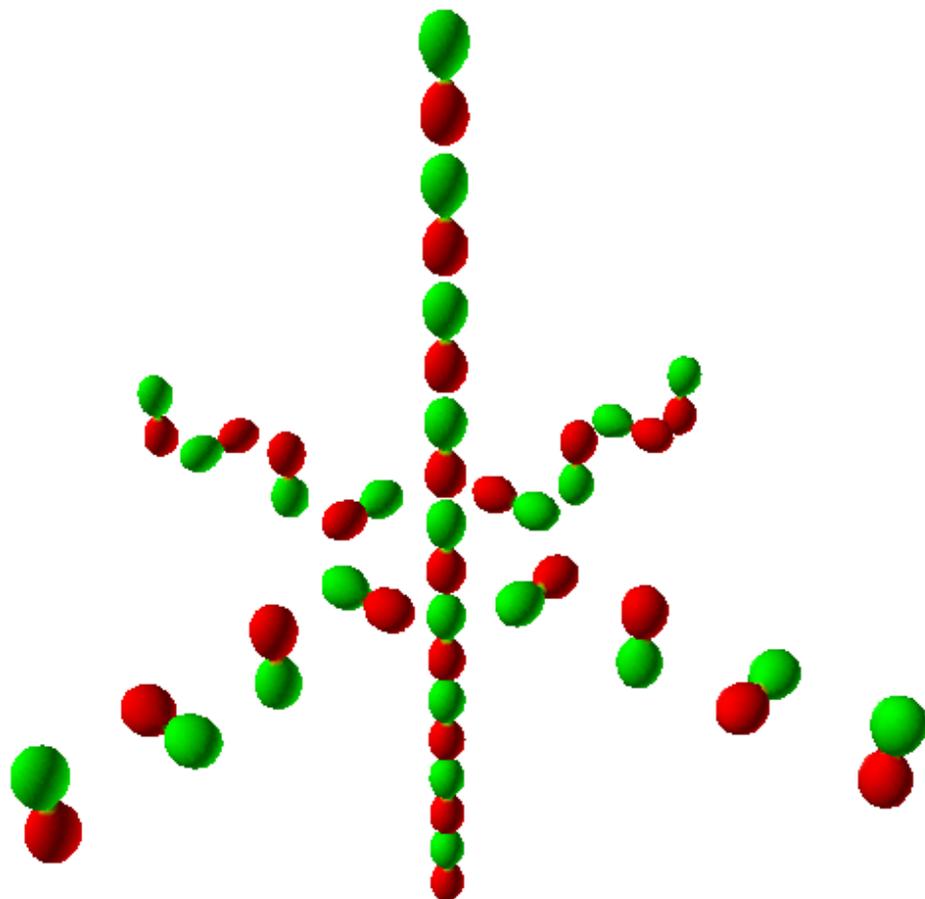


Ferromagnetic相のスカーミオン



Polar相のknot

Y. Kawaguchi, et al., PRL 100, 180403 (2008)



Spin-2の場合

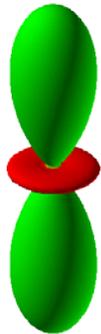
$$H = \int d\mathbf{x} \left[-\Psi_m^* \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_m + \frac{c_0}{2} \rho^2 + \frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$

$$A_{00}(\mathbf{x}) = 2\Psi_2(\mathbf{x})\Psi_{-2}(\mathbf{x}) - 2\Psi_1(\mathbf{x})\Psi_{-1}(\mathbf{x}) + \Psi_0(\mathbf{x})^2$$

Singlet-pair amplitude

Spin-2の場合

$$H = \int d\mathbf{x} \left[-\Psi_m^* \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_m + \frac{c_0}{2} n_{\text{tot}}^2 + \frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$



Uniaxial Nematic:

$$\Psi_U = (0, 0, 1, 0, 0)^T$$

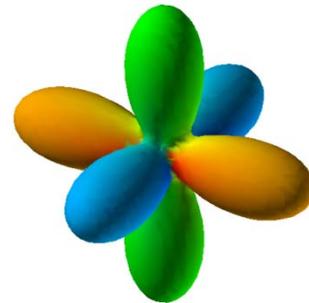
$$\frac{U(1)_\phi \times \frac{SO(3)_F}{(\mathbb{Z}_2)_F}}$$

c_1

Cyclic:

$$\Psi_C = (1, 0, 0, \sqrt{2}, 1)^T / \sqrt{3}$$

$$\frac{U(1)_\phi \times SO(3)_F}{(T)_{\phi+F}}$$



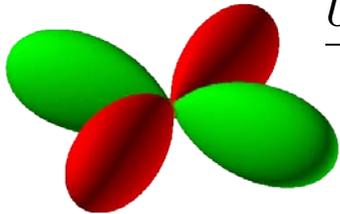
^{87}Rb

c_2

Biaxial Nematic:

$$\Psi_B = (1, 0, 0, 0, 1)^T / \sqrt{2}$$

$$\frac{U(1)_\phi \times SO(3)_F}{(D_4)_{\phi+F}}$$

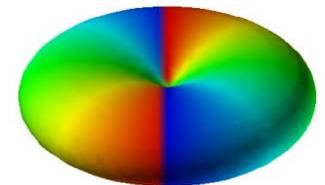


$$c_2 = 4c_1$$

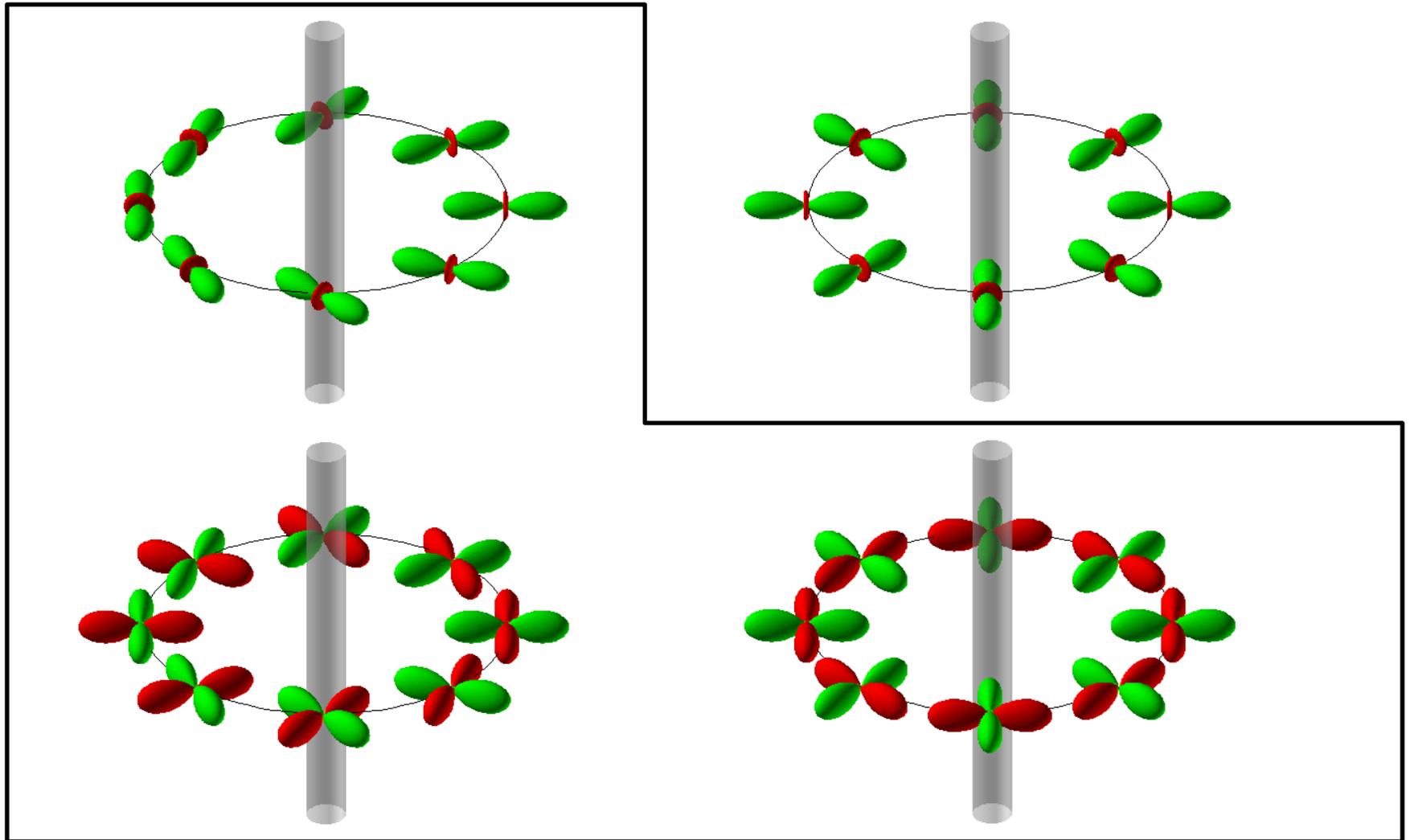
Ferromagnetic:

$$\Psi_F = (1, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\frac{SO(3)_{\phi+F}}{(\mathbb{Z}_2)_{\phi+F}}$$

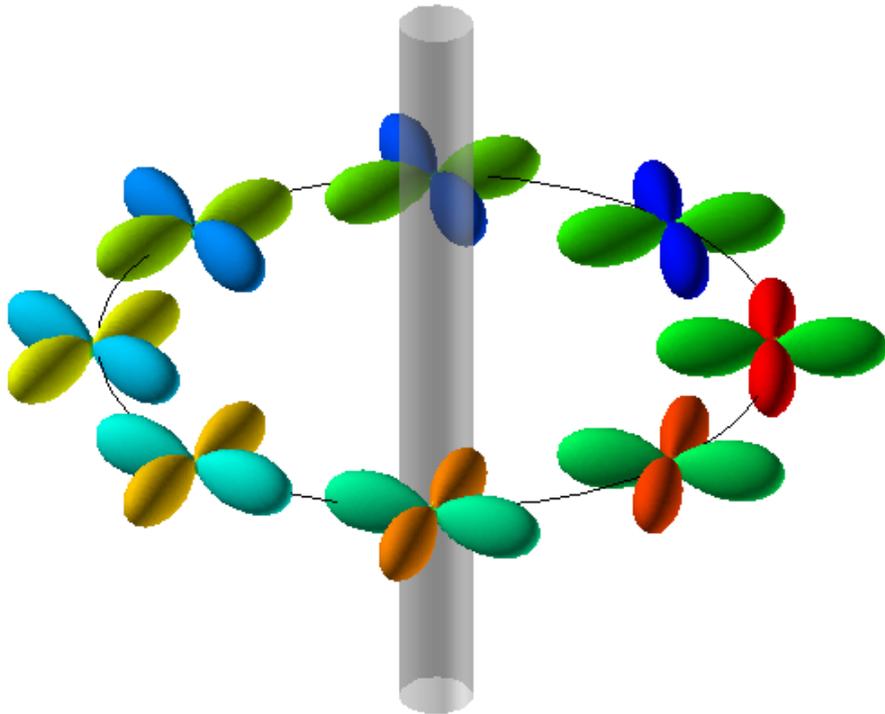


Spin-2の量子渦(Nematic相)

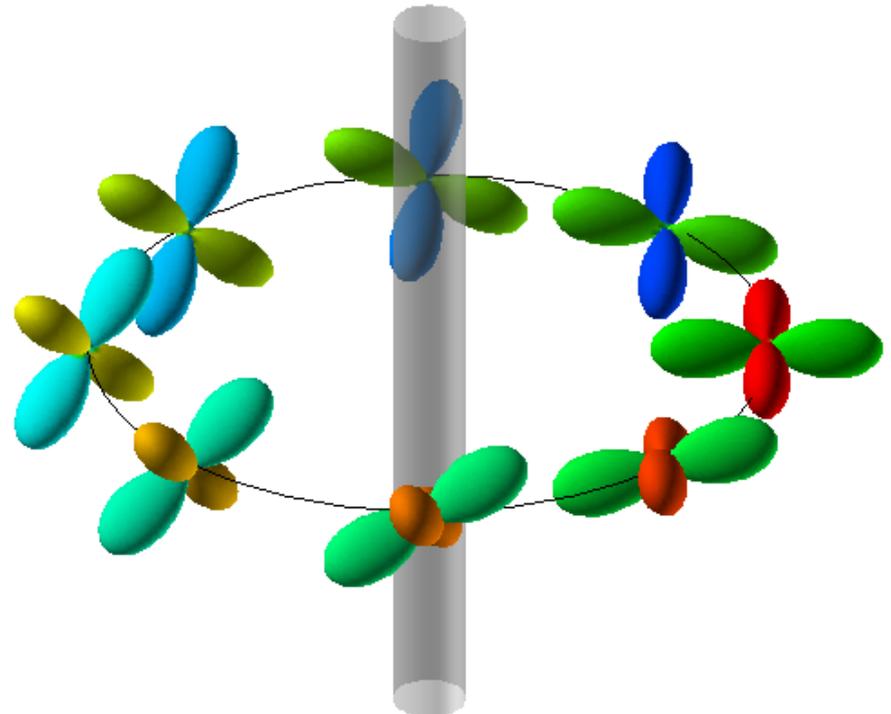


Spin-2の量子渦(Nematic相)

位相が π 変化
スピンの $\pi/2$ 回転(z 軸)

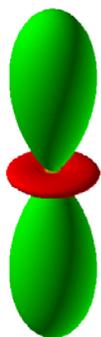


位相が π 変化
スピンの π 回転($x+y$ 軸)



Nematic相

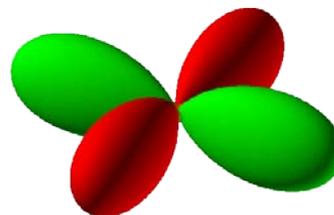
$$H = \int d\mathbf{x} \left[-\Psi_m^* \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_m + \frac{c_0}{2} \rho^2 + \frac{c_1}{2} \mathbf{F}^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$



Uniaxial Nematic:

$$\Psi_U = (0, 0, 1, 0, 0)^T$$

$$U(1)_\phi \times \frac{S_F^2}{(\mathbb{Z}_2)_F}$$



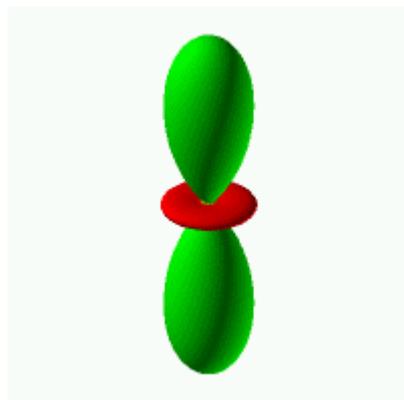
Biaxial Nematic:

$$\Psi_B = (1, 0, 0, 0, 1)^T / \sqrt{2}$$

$$\frac{U(1)_\phi \times SO(3)_F}{(D_4)_{\phi+F}}$$



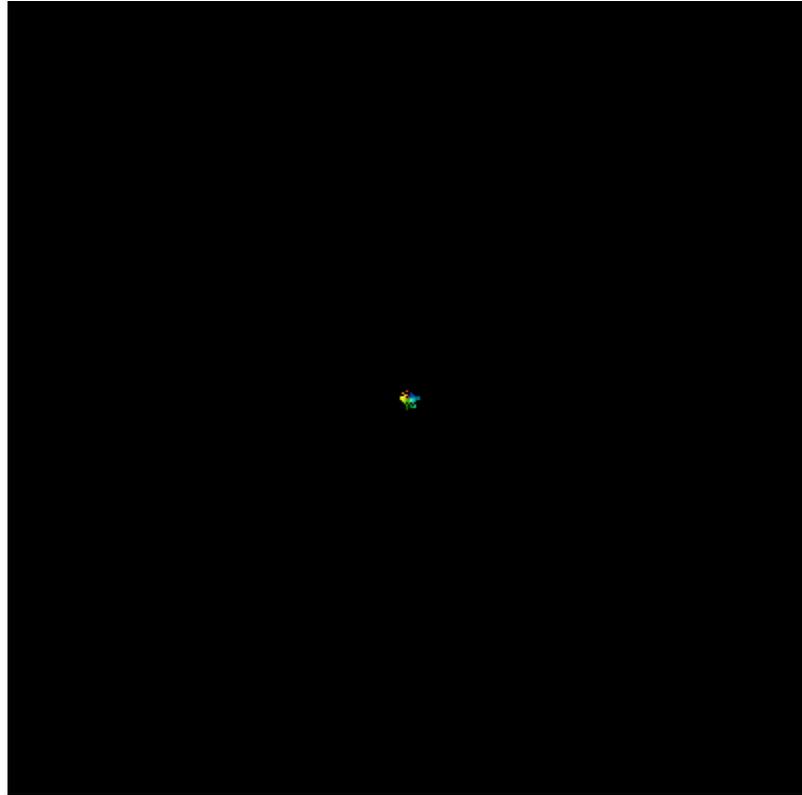
2つの相は（量子補正
がなければ）縮退し
ている



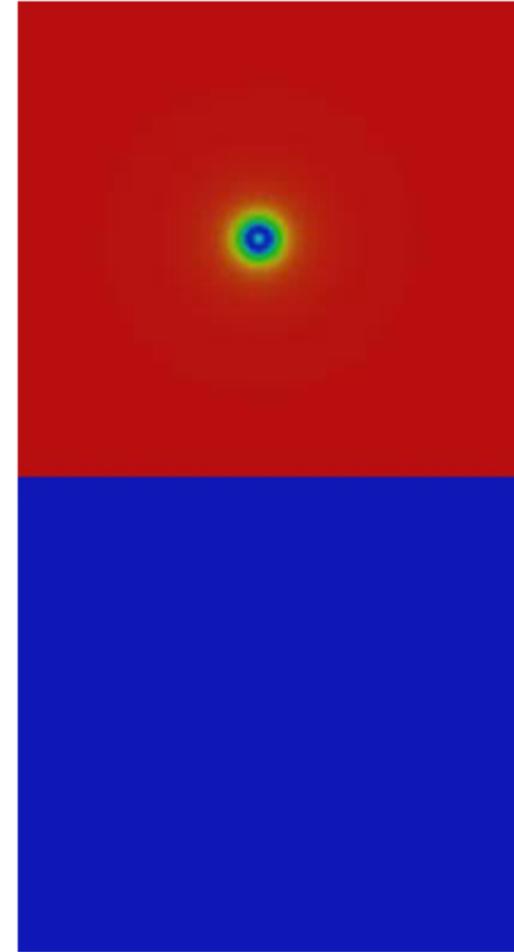
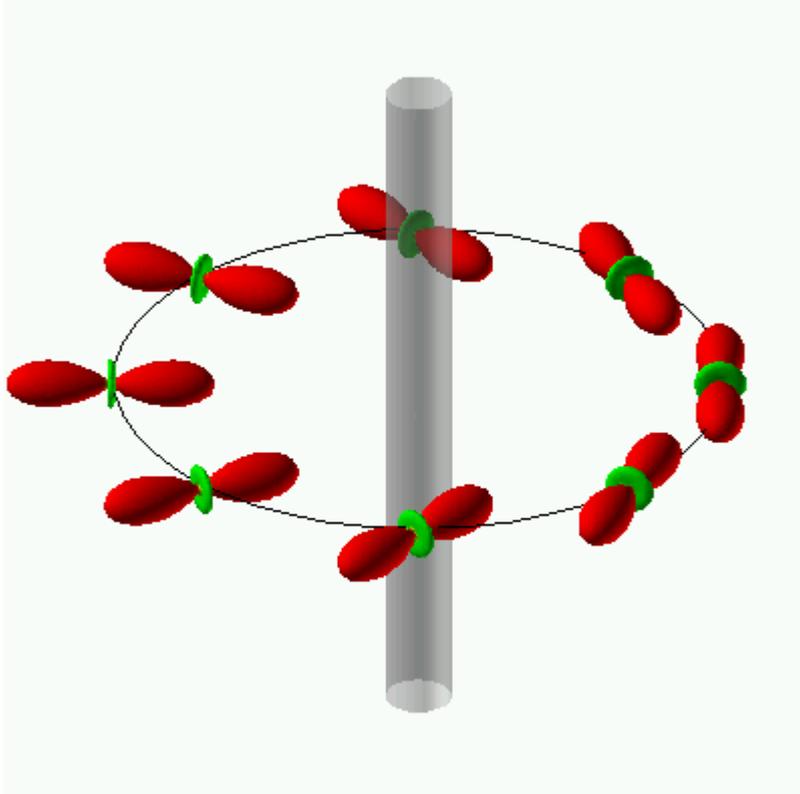
New order-parameter
manifold

$$\frac{U(1)_\phi \times S_F^4}{(\mathbb{Z}_2)_{\phi+F}}$$

Uniaxial-nematic相の点欠陥の崩壊

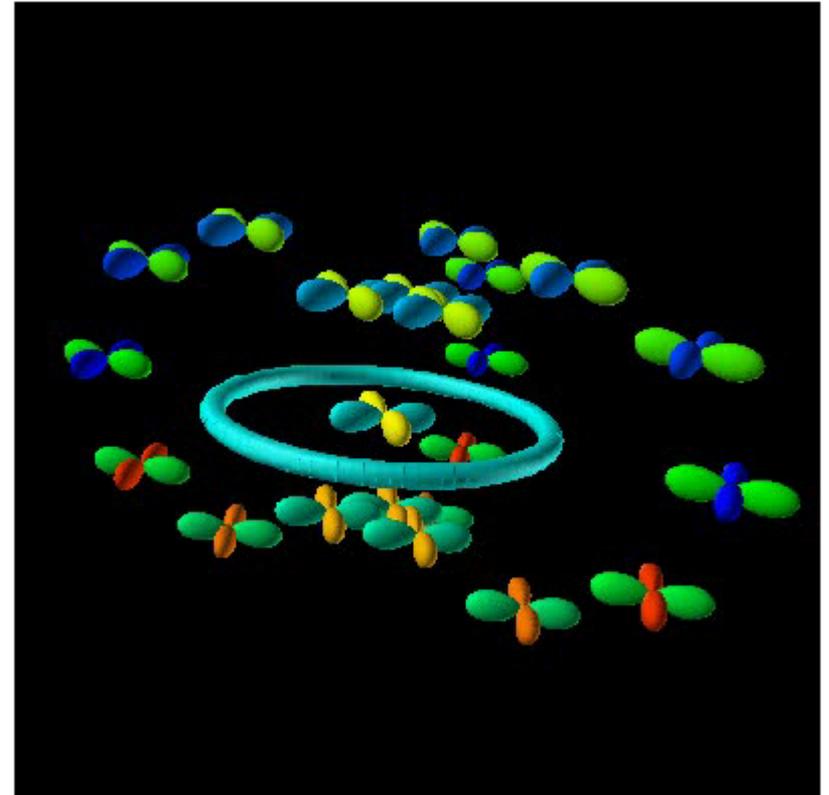
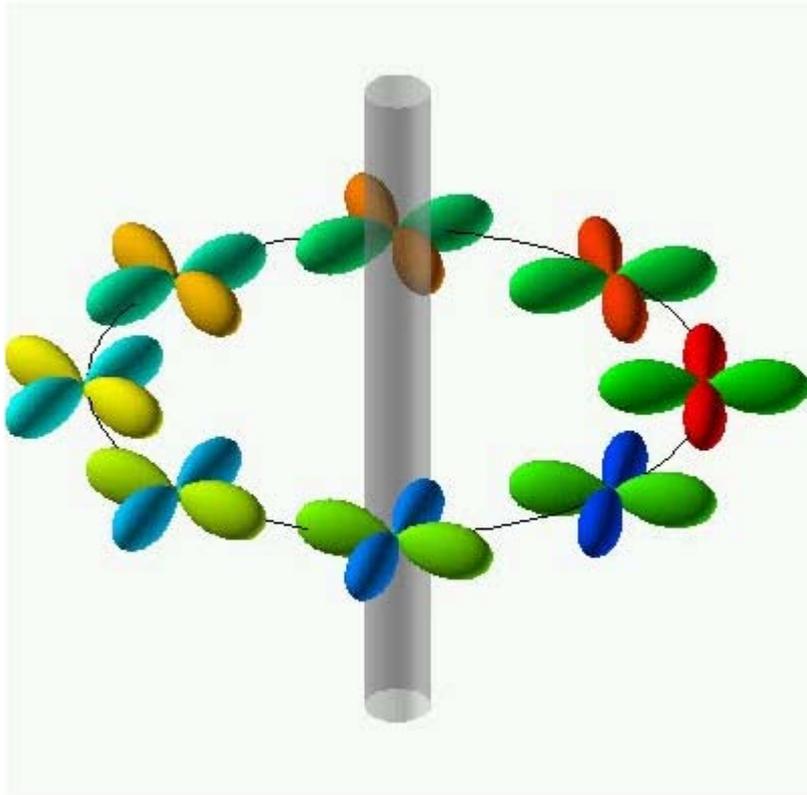


Nematic相の渦の崩壊

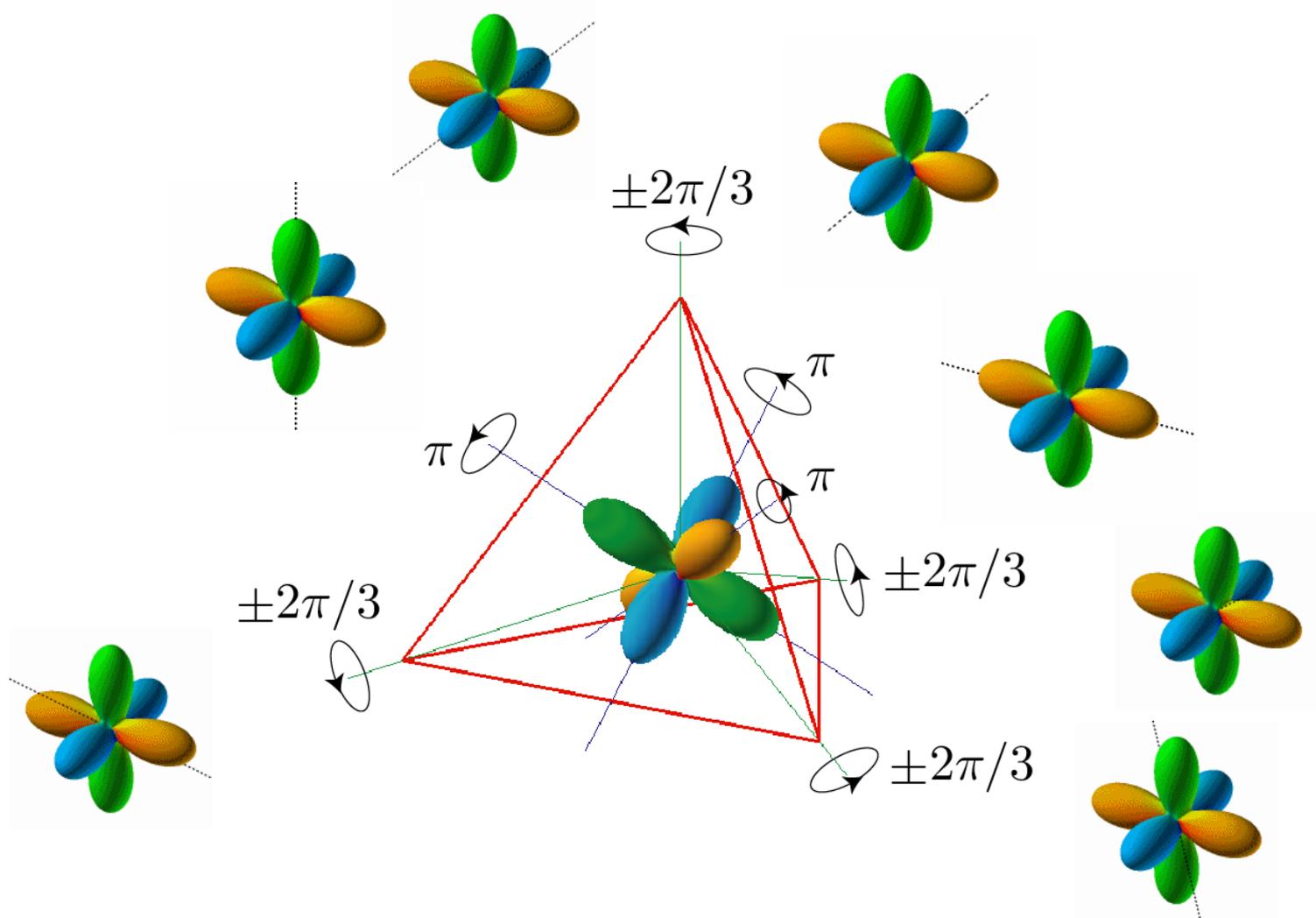


S. Uchino, et al. PRL 105, 230406(2010)

Biaxial-nematic相の渦の反転

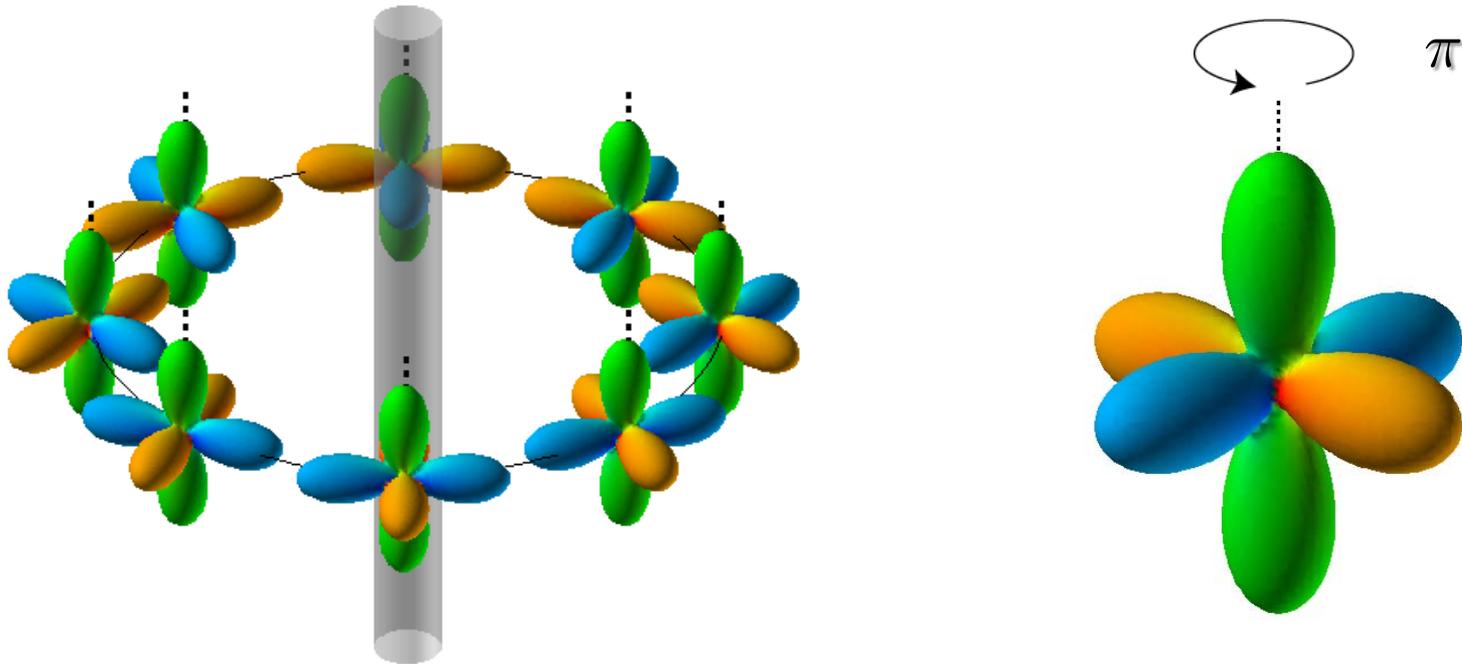


Topological defect in cyclic state



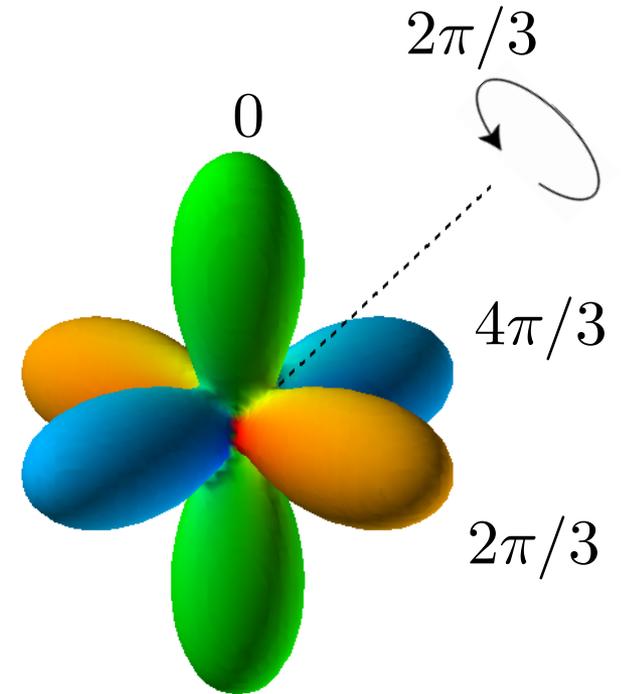
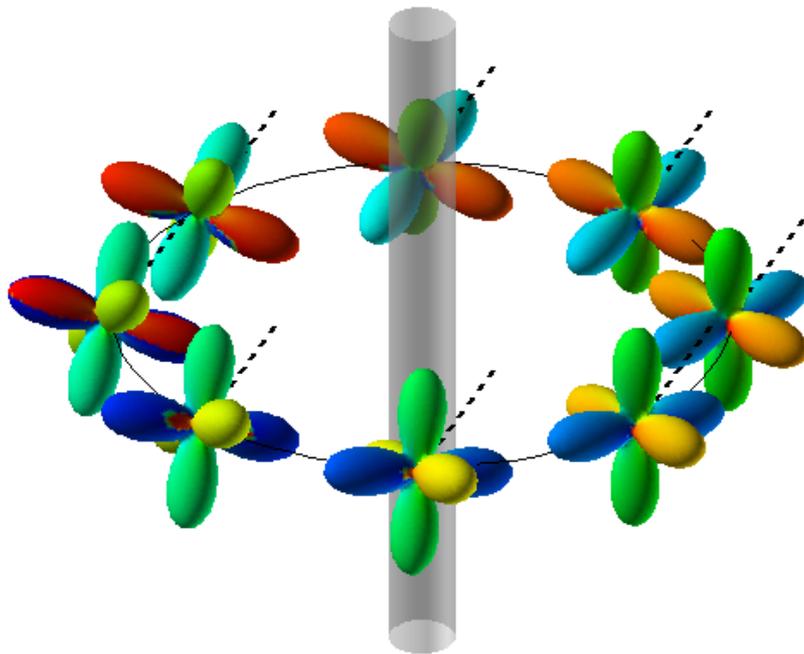
Topological excitation in cyclic state

1/2-spin vortex



Topological excitation in cyclic state

1/3 vortex



Gross-Pitaevskii Equation

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\Psi_2}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_2 + c_0\rho\Psi_2 + c_1(F_-\Psi_1 + 2F_z\Psi_2) + c_2A_{20}\Psi_{-2}^* \\i\hbar\frac{\partial\Psi_1}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_1 + c_0\rho\Psi_1 + c_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}F_-\Psi_0 + F_+\Psi_2 + F_z\Psi_1\right) - c_2A_{20}\Psi_{-1}^* \\i\hbar\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_0 + c_0\rho\Psi_0 + \frac{\sqrt{6}}{2}c_1(F_-\Psi_{-1} + F_+\Psi_1) + c_2A_{20}\Psi_0^* \\i\hbar\frac{\partial\Psi_{-1}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_{-1} + c_0\rho\Psi_{-1} + c_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}F_+\Psi_0 + F_-\Psi_{-2} - F_z\Psi_{-1}\right) - c_2A_{20}\Psi_1^* \\i\hbar\frac{\partial\Psi_{-2}}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\Psi_{-2} + c_0\rho\Psi_{-2} + c_1(F_+\Psi_{-1} - 2F_z\Psi_{-2}) + c_2A_{20}\Psi_2^*\end{aligned}$$

Collision Dynamics of Vortices

Commutative topological charge

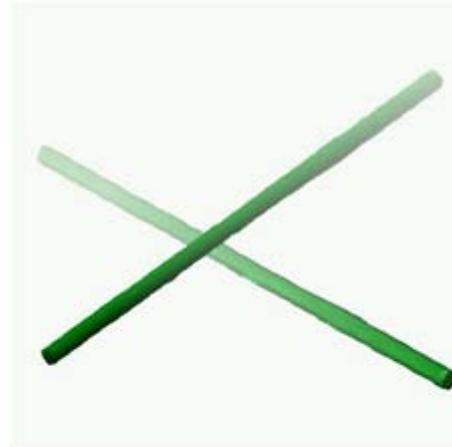


reconnection

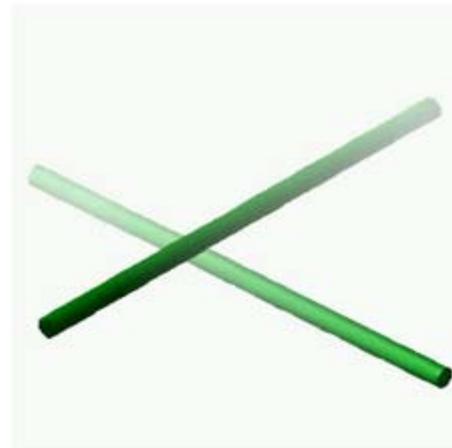


passing
through

Non-commutative topological charge



rung



rung

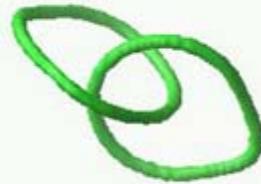
Collision dynamics of topological excitations

Abelian excitation

Non-Abelian excitation



Large ring



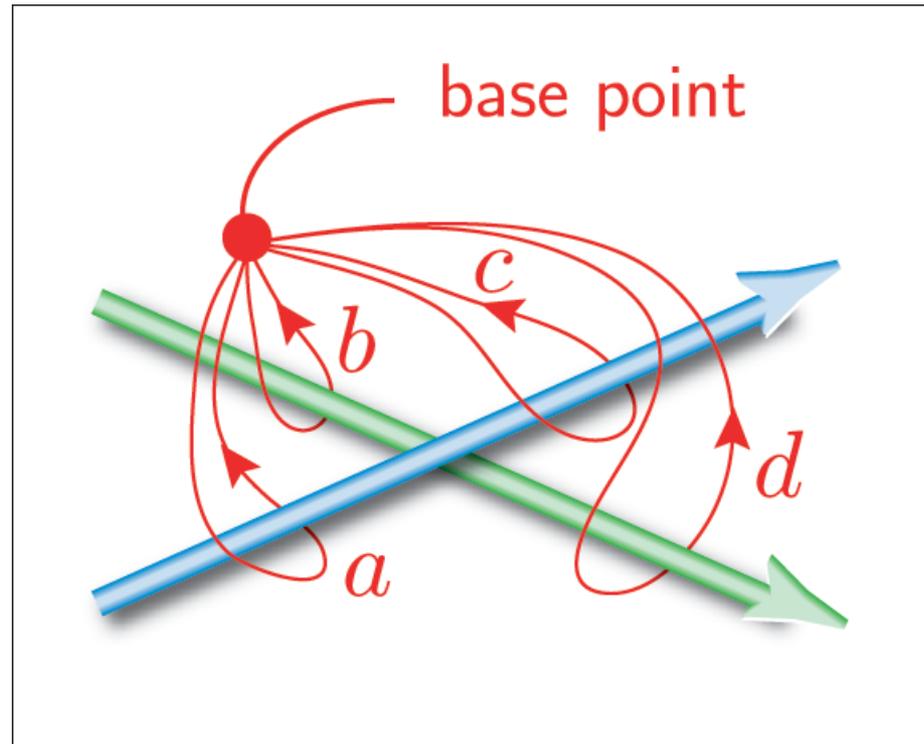
Unraveling of link



New excitation

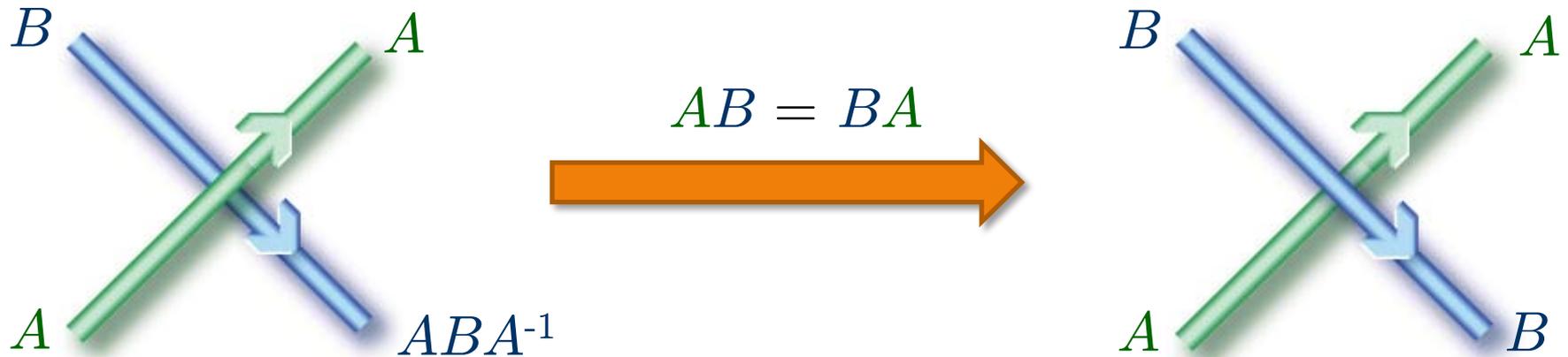
Linked non-Abelian excitations cannot unravel because of the formation of the new excitation.

Topological charge of topological excitation



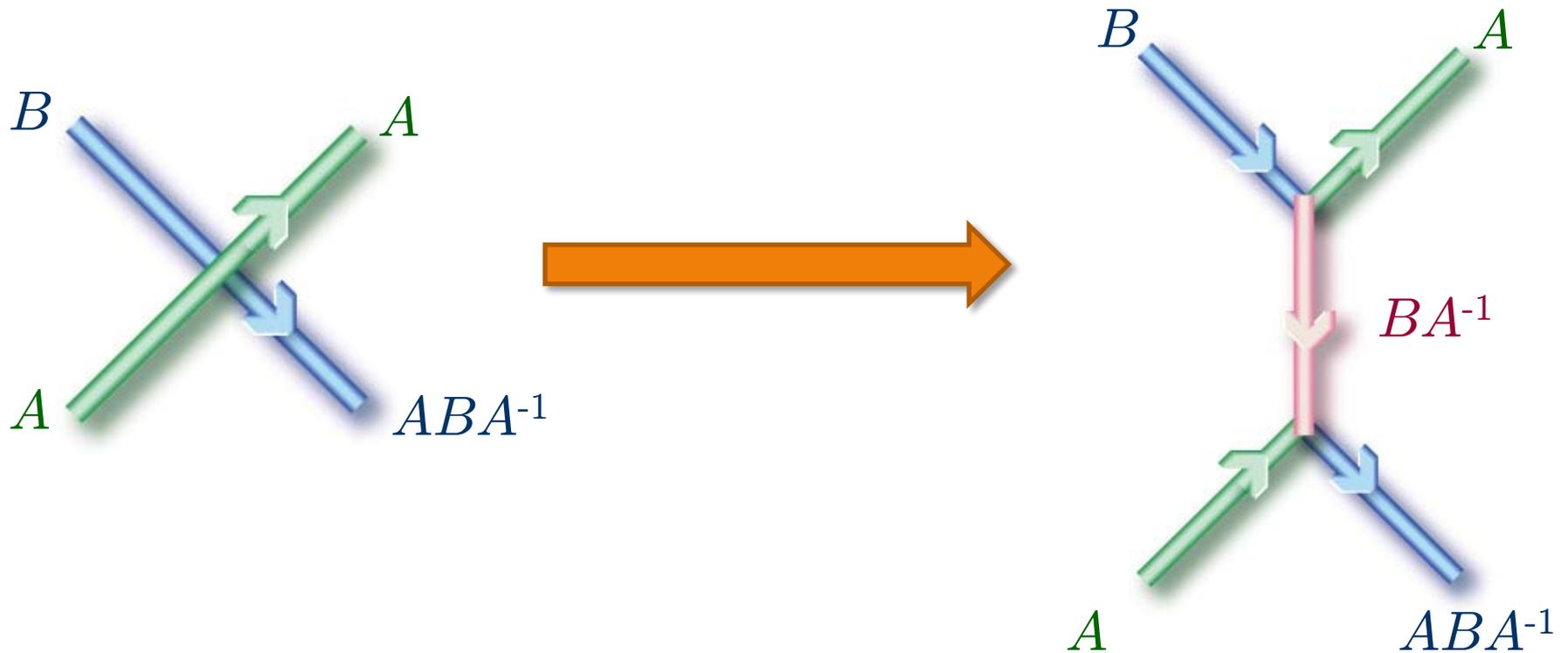
Topological invariant of excitations can be fixed by a closed path encircling the excitations

Collision of Vortex



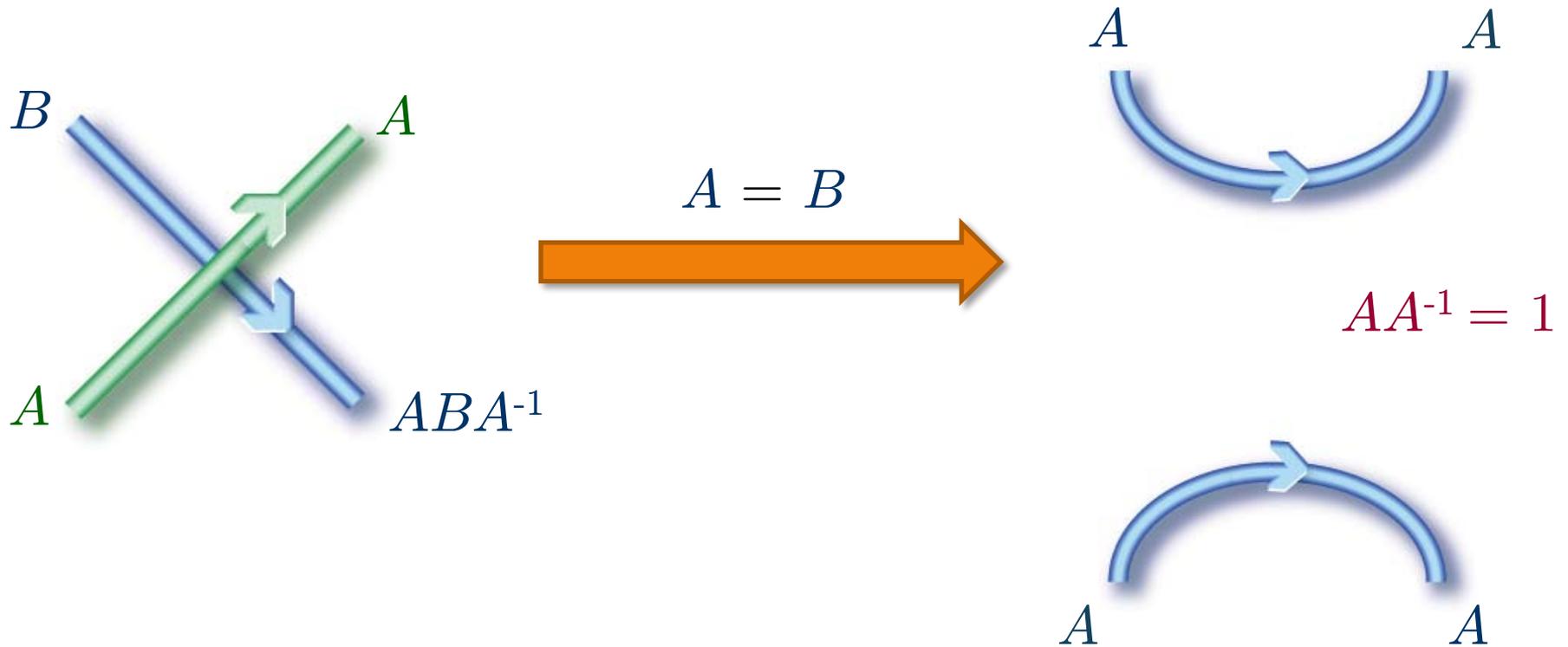
Passing dynamics is possible for Abelian case

Collision of Vortex



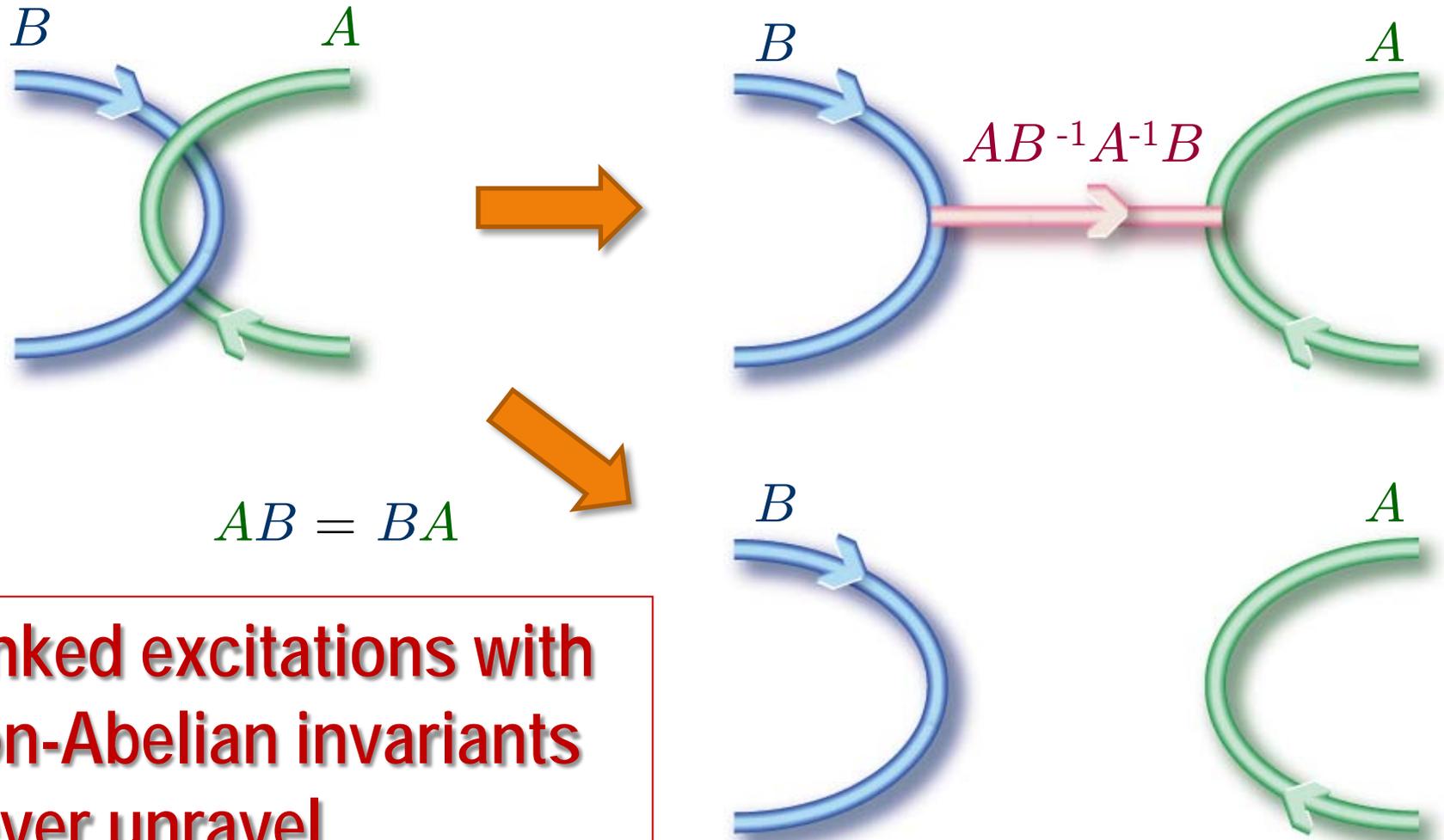
Rung BA^{-1} is formed through the collision.

Collision of Vortex



Rung disappears for the same charge resulting reconnection.

Linked Vortex Rings



Linked excitations with non-Abelian invariants never unravel.