

# 非可換量子乱流

---

東大総合文化・東大理<sup>a</sup>・慶応日吉物理<sup>b</sup>

小林未知数・川口由紀<sup>a</sup>・新田宗士<sup>b</sup>・上田正仁<sup>a</sup>

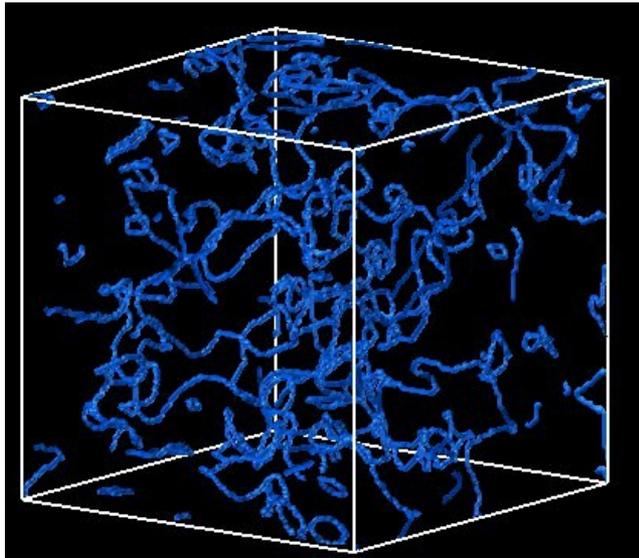
2010年9月25日 日本物理学会2010年秋季大会

# 量子渦と量子乱流

1. 量子渦は循環が離散的で安定な位相欠陥である

スカラー-BECの量子渦

$$\int_c dl \cdot \mathbf{v}_s = n\hbar/m$$



乱流中で渦の存在が明確に定義できる

2. 量子渦は離散群で特徴づけられるトポロジカル不変量を持つ

スカラー-BECの量子渦

整数群 $\mathbb{Z}$

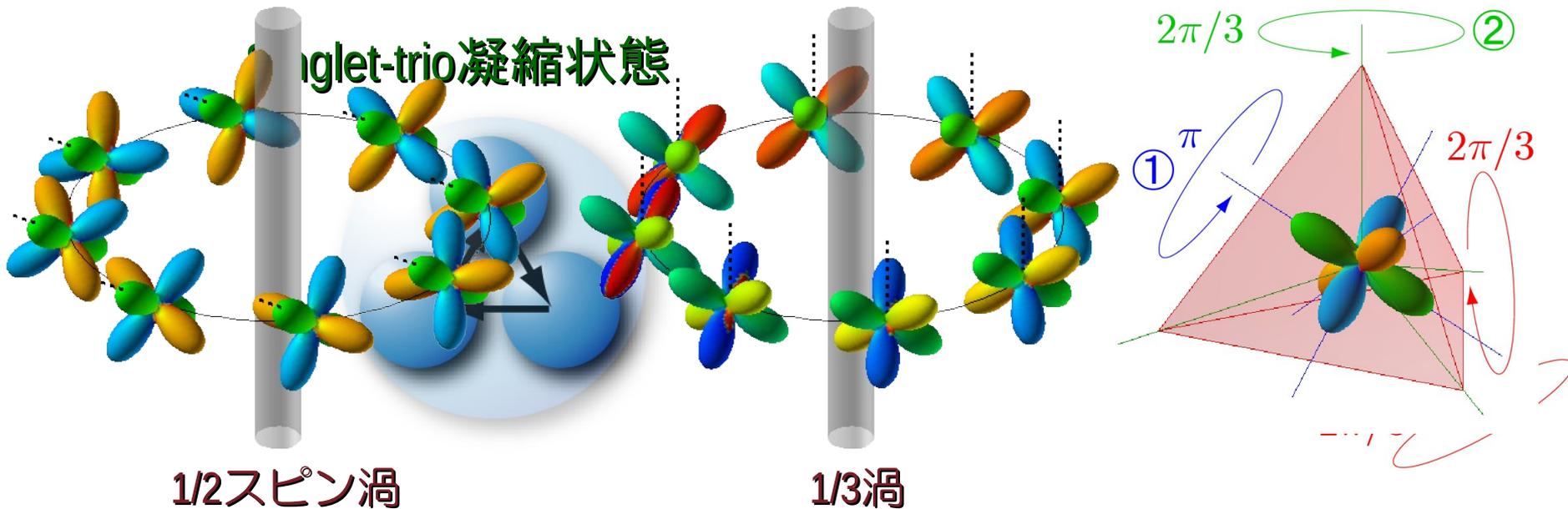
今まで研究されてきたほとんどの量子渦のトポロジカル不変量は可換群で特徴づけられてきた。  
→可換量子渦

超流動 $^4\text{He}$ 、 $^3\text{He-A}$ 、 $^3\text{He-B}$ 、超伝導、スカラー-BEC、多成分BEC、スピン-1・スピノルBECなど

# 非可換量子渦

量子渦のトポロジカル不変量が非可換群で特徴づけられるような渦を非可換量子渦と呼ぶ。

スピン2・スピノルBECのcyclic相



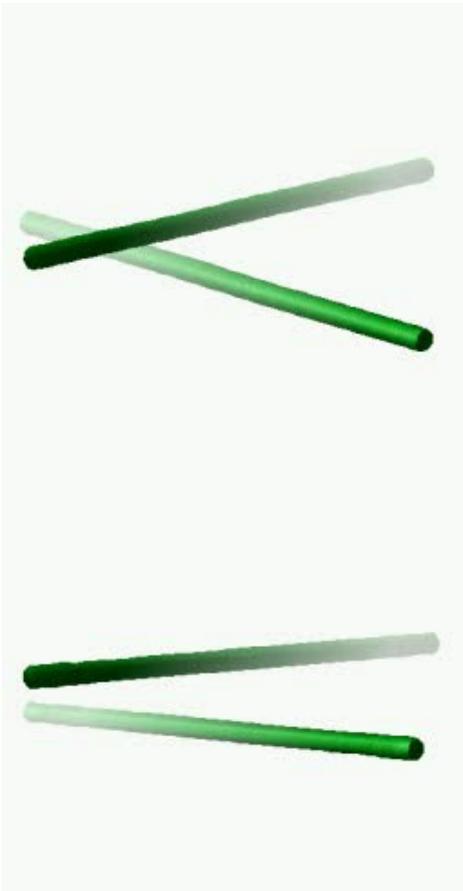
Cyclic相の渦は非可換渦

(渦のトポロジカル不変量： $\Rightarrow$ 正四面体回転群 $T$ )

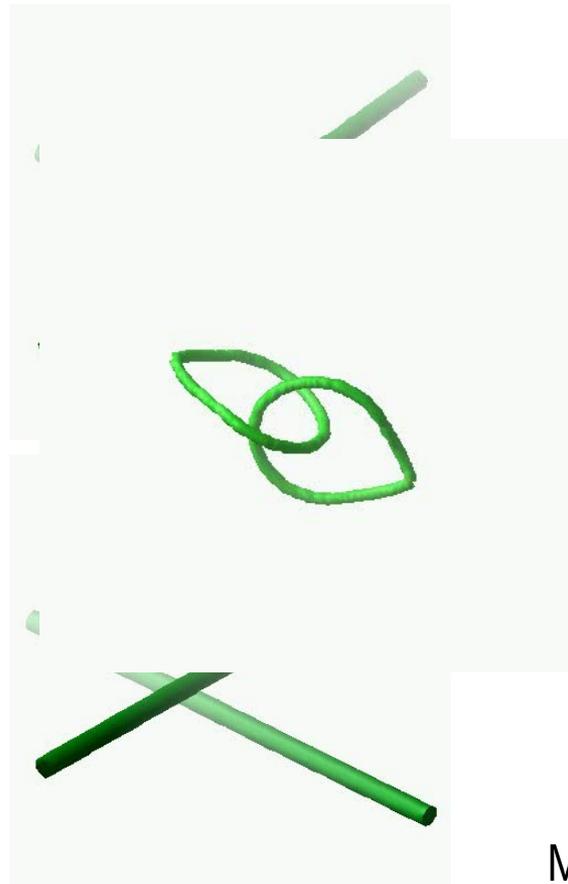
# 非可換量子渦

非可換渦の非可換性は渦の衝突時に顕著になる（リング渦）

可換渦



非可換渦



渦輪がはぎれない  
リング渦の形成

MK, Y. Kawaguchi, M. Nitta, and  
M. Ueda. PRL **103**, 115301 (2009)

# 非可換量子乱流

量子渦のトポロジカル不変量が非可換群となったとき  
量子乱流はどうなるだろうか？

スピ<sup>ン</sup>2・スピノルBECのCyclic相のモデルを  
用いて非可換量子乱流の非可換性が乱流に  
与える影響を調べる

可換渦

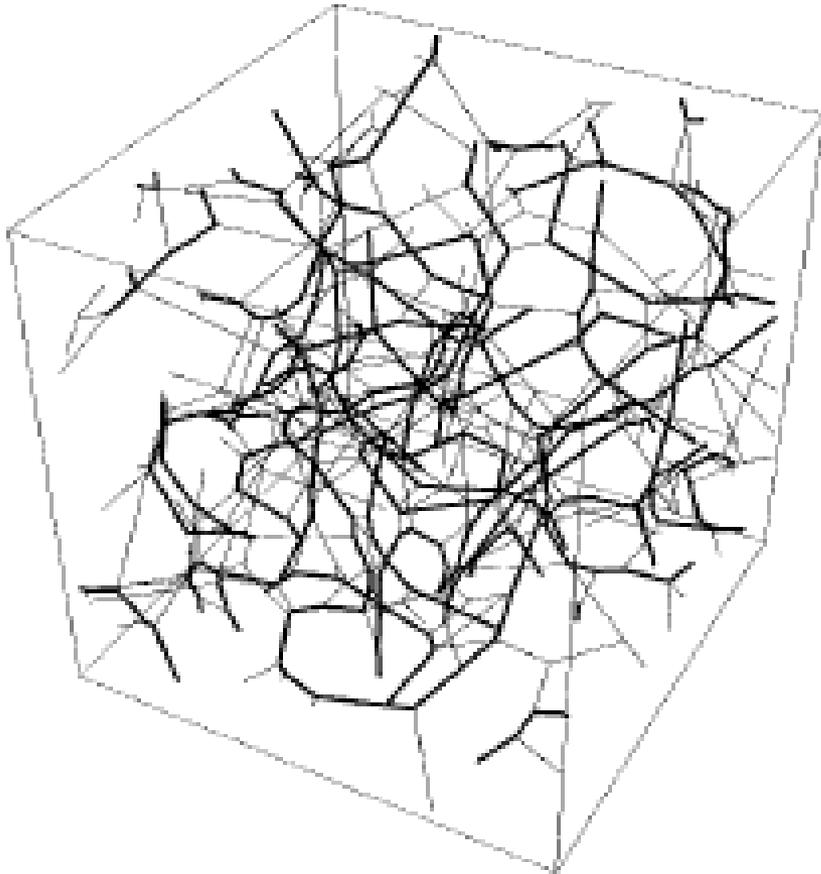
..., 5248 (2005)

非可換な量子渦の乱流

↓  
ラング渦を介した量子渦の  
大規模なネットワーク構造  
が期待できる？

# 類似の系・研究

Cosmic string：量子渦と同じ位相欠陥の構造を持つ



非可換Cosmic stringのシミュレーションにより、ネットワーク構造の形成が予言されている。

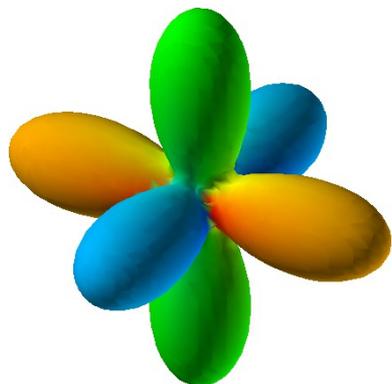
P. McGraw, PRD **57**, 3317 (1998)

# 本研究の意義

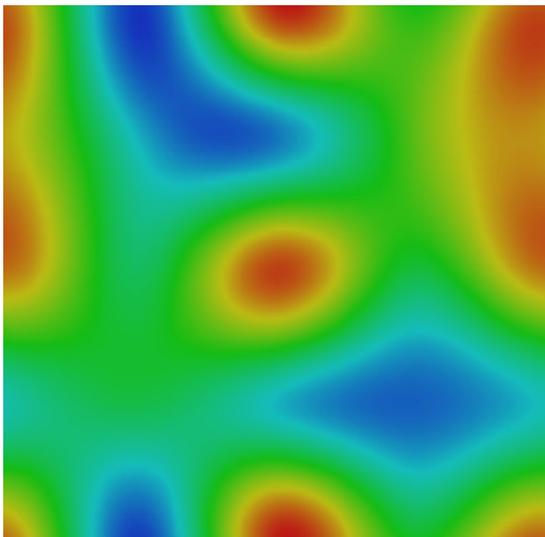
1. (cosmic stringなど) 非可換渦に関するこれまでの計算は渦の存在を仮定した、現象論的なモデルで、渦間の相互作用を外から入れたもの。本研究では渦の存在およびその非可換性を陽に仮定しない、ミクロスコピックなモデル (GP方程式) である。
2. 渦を非可換にしてその衝突ダイナミクスを変えることで乱流の統計性などが変わるのであれば、渦の運動と乱流の統計性とがお互いに密接な関係にあるという証拠にもなる。

# 非可換量子乱流のシミュレーション

## Cyclic相における減衰乱流



初期状態：Headless triadを適当に回した状態から出発する



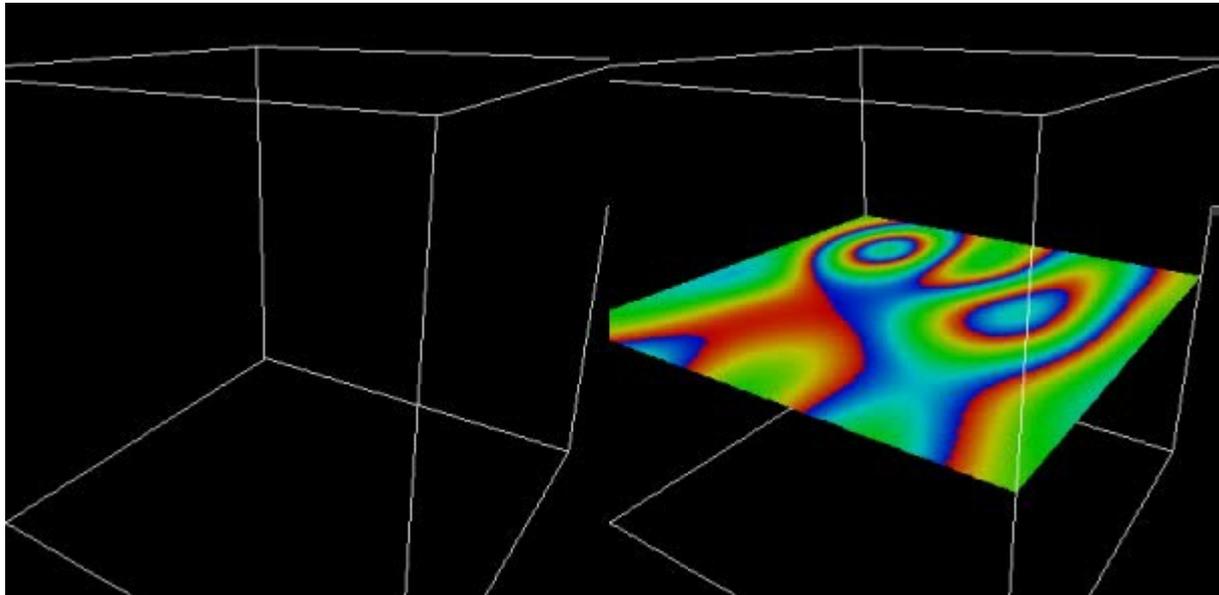
回転角度の空間分布（2次元断面の一例）  
ランダムかつなめらかに変化するよう  
に分布させる

# 非可換量子乱流のシミュレーション

スカラーBECの位相を適当に与えた状態から  
乱流状態になることは確認済み

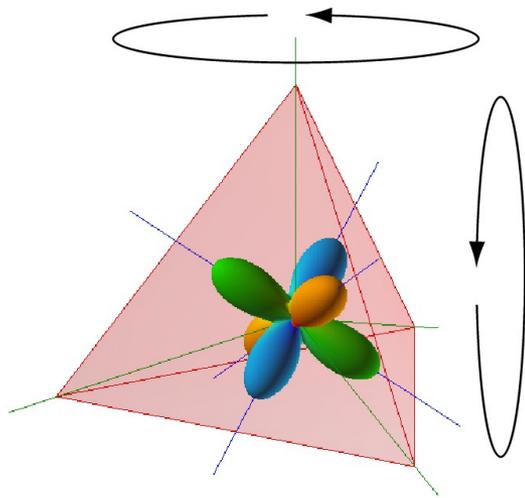
渦の分布

位相の2次元断面



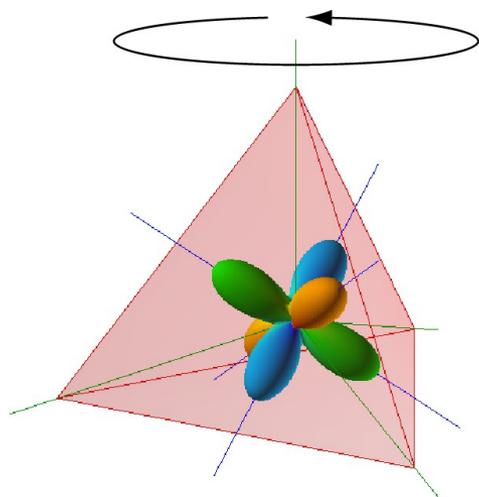
MK and M. Tsubota, PRL **94**, 065302 (2005)

# 可換・非可換の比較



スピン空間内の3次元的な回転が可能：  
渦は非可換（正四面体回転群  $T$ ）

3種類の非可換な渦（ $2\pi/3, 4\pi/3, \pi$ ）



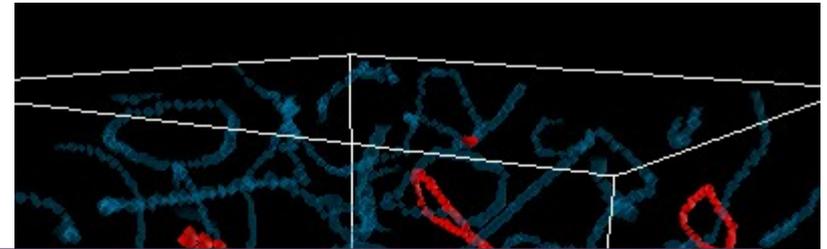
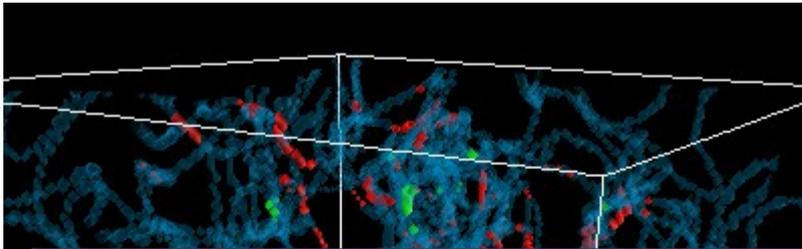
スピン空間内の2次元的な回転のみ可能：  
渦は可換（3次巡回群  $\mathbb{Z}_3$ ）

2種類の可換な渦（ $2\pi/3, 4\pi/3$ ）

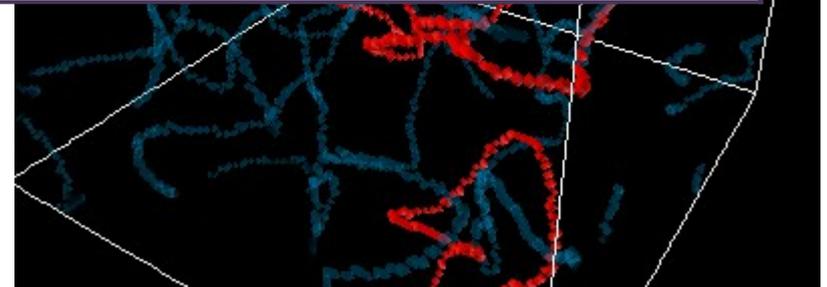
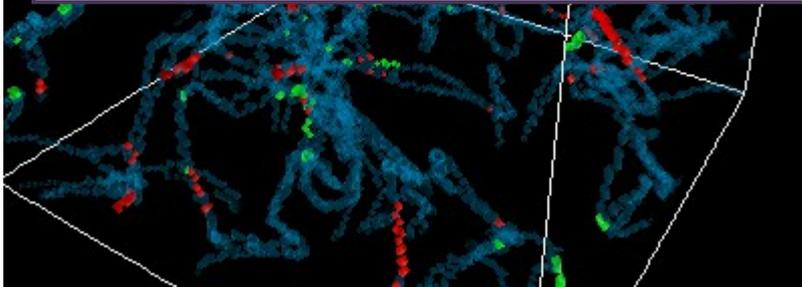
# 乱流のダイナミクス（生成過程）

非可換

可換



- 非可換：渦2や渦3が、ラング渦として渦1をつないでいる
  - 可換：2種類の渦が独立に渦輪および乱流を形成する
- 非可換乱流中では異なる渦の相互作用が強い



青：渦1 ( $2\pi/3$ )

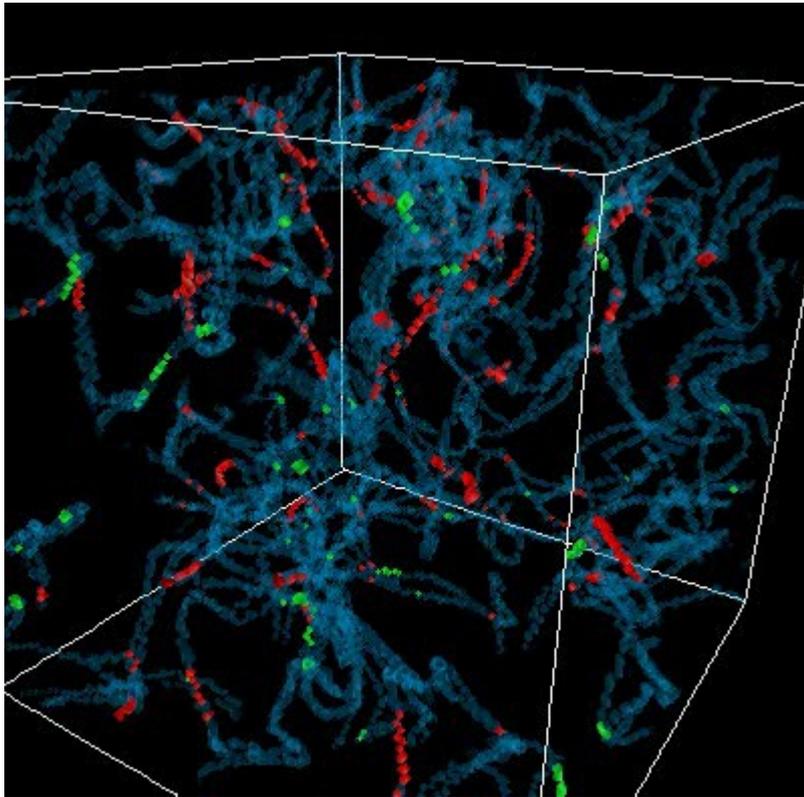
赤：渦2 ( $4\pi/3$ )

緑：渦3

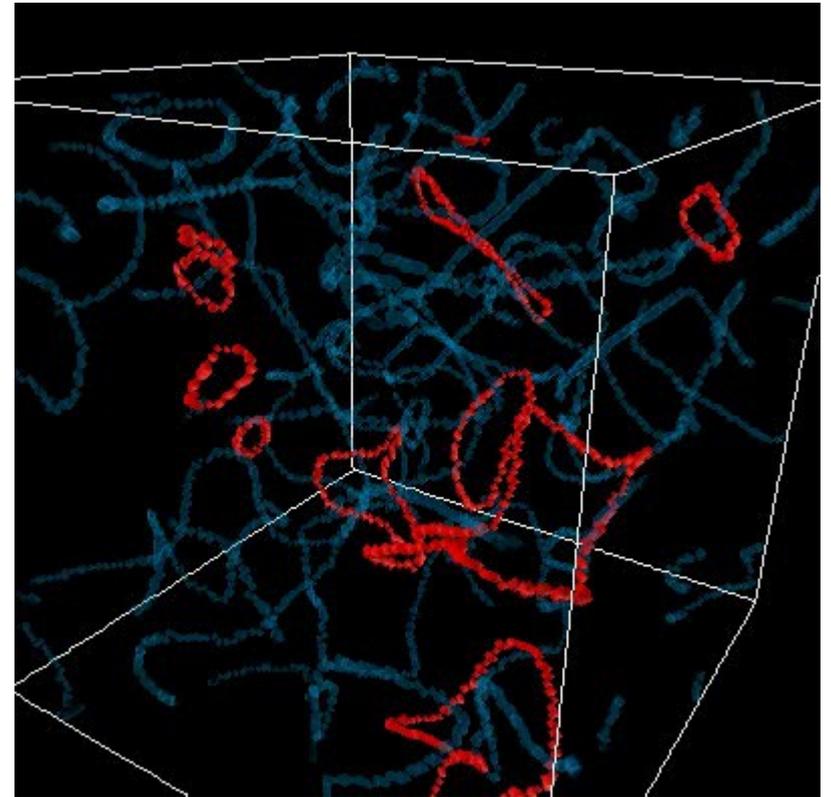
( $\pi$ )

# 乱流のダイナミクス（乱流過程）

非可換



可換



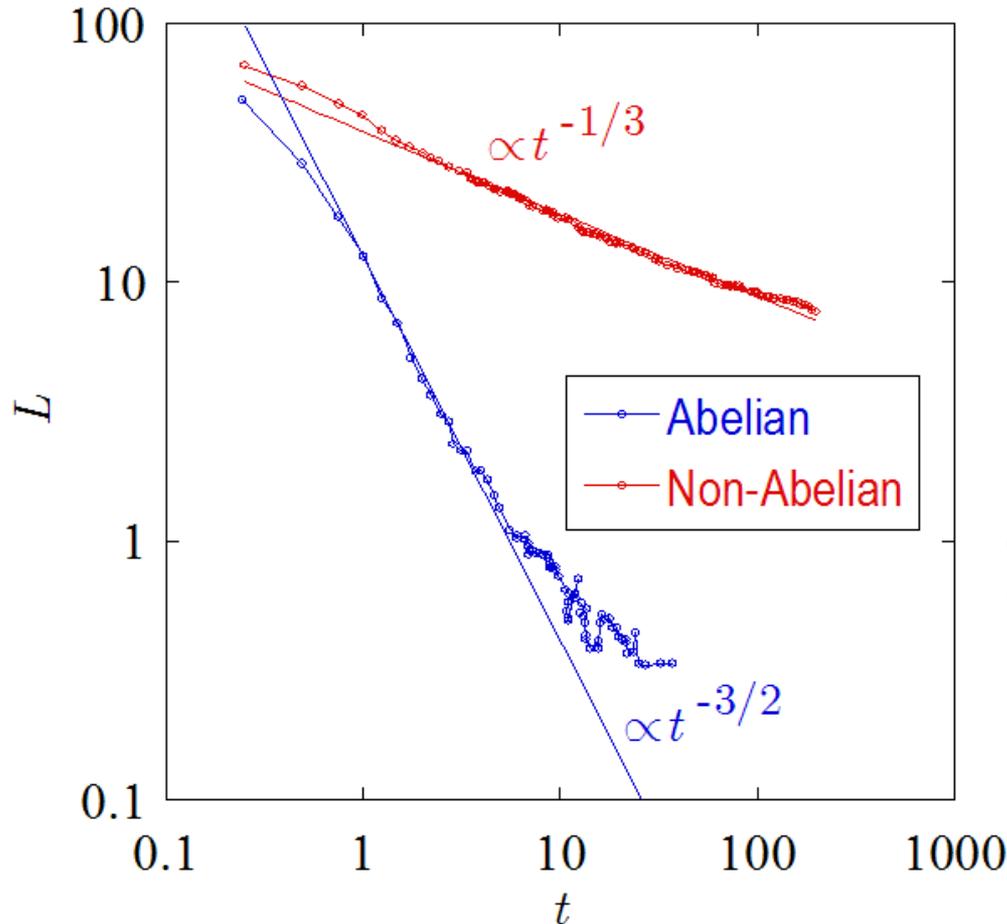
青：渦1

赤：渦2

緑：渦3

# 乱流の長時間減衰

全渦糸長の時間変化



非可換な場合に渦の減衰が強力に抑制され、乱流の寿命が長くなる。  
→再結合の抑制とラング渦の形成によって渦の分裂が抑えられている

# まとめ

- スピン2・スピノルBECのCyclic相における乱流状態を調べ、非可換量子渦の非可換性が乱流に及ぼす影響を調べた。
- 非可換量子渦の非可換性、特に衝突におけるラング渦形成のダイナミクスが、渦糸の長さや乱流の寿命などに影響を与えることを明らかにした。

今後の課題：

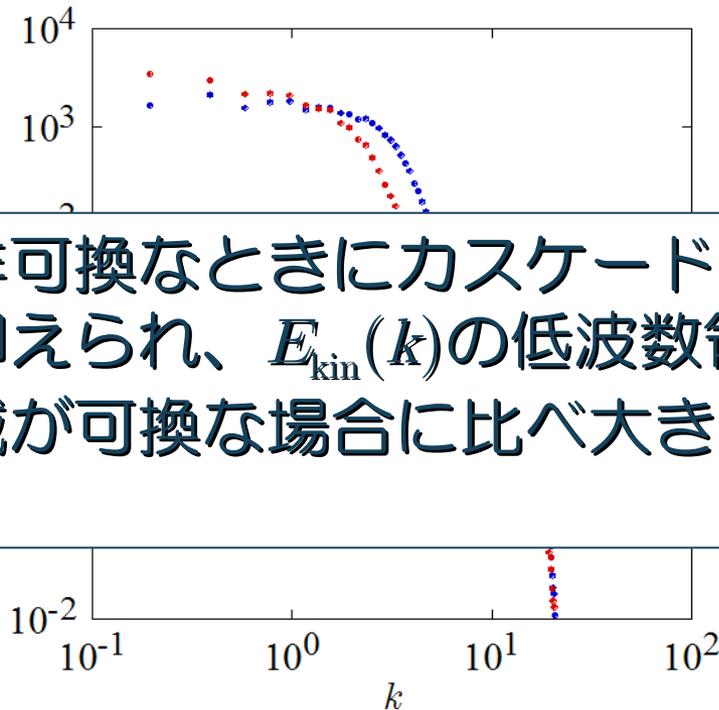
より定量的な解析、異なるトポロジーを持った非可換渦の乱流

# エネルギースペクトル

運動エネルギーのTotal current成分のスペクトルを調べる

$$E_{\text{kin}} = \int dx \sum_{m=-2}^2 |\Psi_m \nabla \theta_m|^2 = \int dk E_{\text{kin}}(k)$$

初期過程発達過程と1/3渦)



非可換なときにカスケードが抑えられ、 $E_{\text{kin}}(k)$ の低波数領域が可換な場合に比べ大きい。

# モデルハミルトニアン

全ての原子が同じ1粒子  
状態にいるとする

$$|\Psi\rangle = \left[ \sum_m \Psi_m a_m^\dagger \right]^N |0\rangle$$

$$\langle H \rangle = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2M} \sum_m |\nabla \Psi_m|^2 + \frac{c_0}{2} \rho^2 + \frac{c_1}{2} F^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$

密度

スピン密度

シングレットペア振幅

$$\rho(x) = \sum_m \Psi_m^*(x) \Psi_m(x)$$

$$F(x) = \sum_{m,m'} \Psi_m^*(x) \hat{F}_{mm'}(x) \Psi_{m'}(x)$$

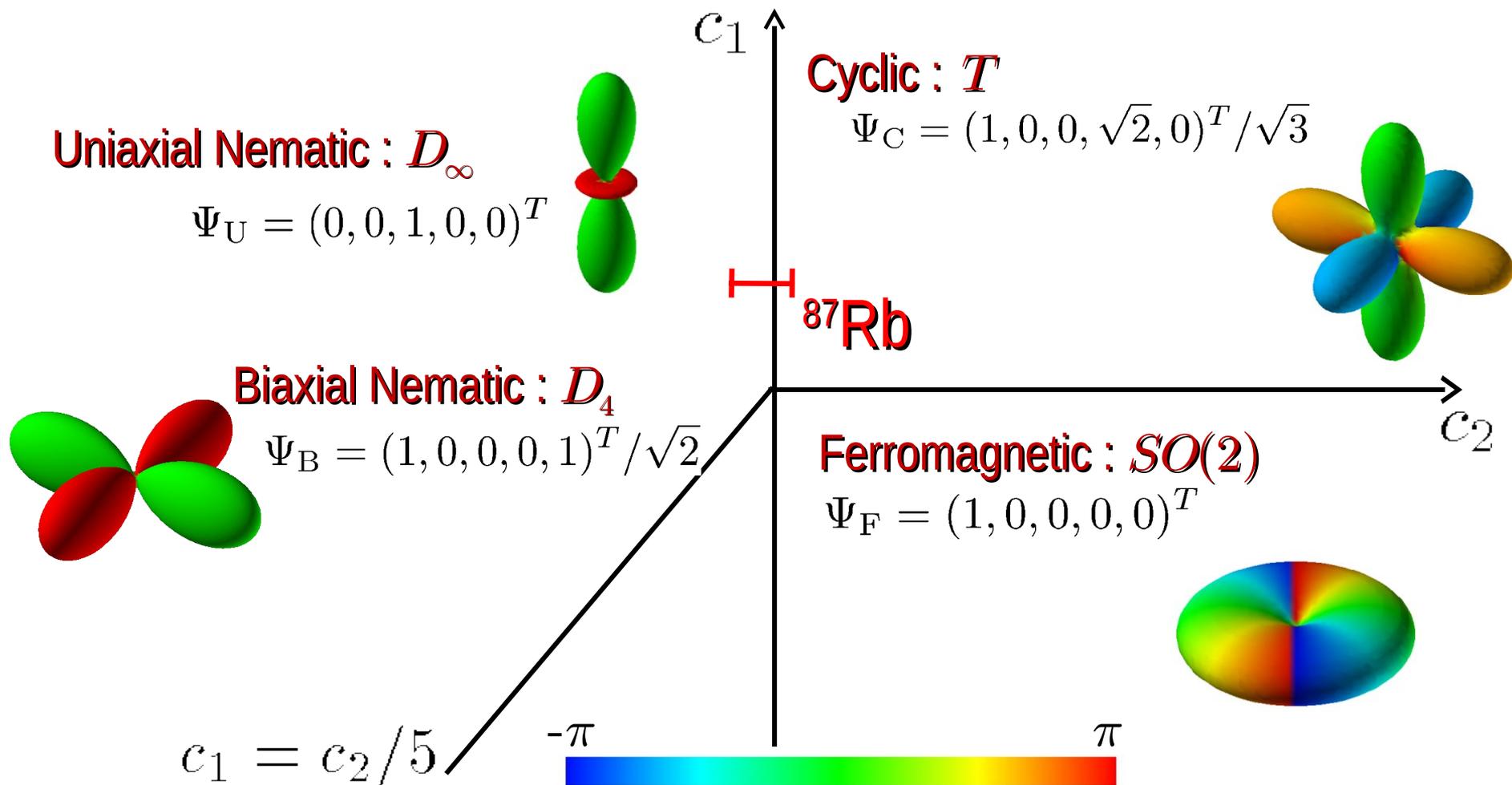
$$A_{20}(x) = \sum_m (-1)^m \Psi_m(x) \Psi_{-m}(x)$$

$$c_0 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{4a_2 + 3a_4}{7},$$

$$c_1 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{a_4 - a_2}{7},$$

$$c_2 = \frac{4\pi\hbar^2}{m} \frac{7a_0 - 10a_2 + 3a_4}{35}$$

# 基底狀態



# Gross-Pitaevskii方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_m}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi_m^*}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_2 + c_0 n_{\text{tot}} \Psi_2 + c_1 (F_- \Psi_1 + 2F_z \Psi_2) + \frac{c_2}{\sqrt{5}} A_{00} \Psi_{-2}^*$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_1 + c_0 n_{\text{tot}} \Psi_1 + c_1 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} F_- \Psi_0 + F_+ \Psi_2 + F_z \Psi_1 \right) - \frac{c_2}{\sqrt{5}} A_{00} \Psi_{-1}^*$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_0 + c_0 n_{\text{tot}} \Psi_0 + \frac{\sqrt{6}}{2} c_1 (F_- \Psi_{-1} + F_+ \Psi_1) + \frac{c_2}{\sqrt{5}} A_{00} \Psi_0^*$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{-1}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_{-1} + c_0 n_{\text{tot}} \Psi_{-1} + c_1 \left( \frac{\sqrt{6}}{2} F_+ \Psi_0 + F_- \Psi_{-2} - F_z \Psi_{-1} \right) - \frac{c_2}{\sqrt{5}} A_{00} \Psi_1^*$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{-2}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_{-2} + c_0 n_{\text{tot}} \Psi_{-2} + c_1 (F_+ \Psi_{-1} - 2F_z \Psi_{-2}) + \frac{c_2}{\sqrt{5}} A_{00} \Psi_2^*$$

# $U(1)_G \times SO(3)_S$ 対称性の破れ

$$\langle H \rangle = \int dx \left[ \frac{\hbar^2}{2M} \sum_m |\nabla \Psi_m|^2 + \frac{c_0}{2} \rho^2 + \frac{c_1}{2} F^2 + \frac{c_2}{2} |A_{20}|^2 \right]$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_2 \\ \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{-1} \\ \Psi_{-2} \end{pmatrix} = e^{i\varphi} e^{-i\hat{F} \cdot \alpha} \Psi_{\text{Base}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{ハミルトニアンから} \\ \text{決まる} \end{array}$$

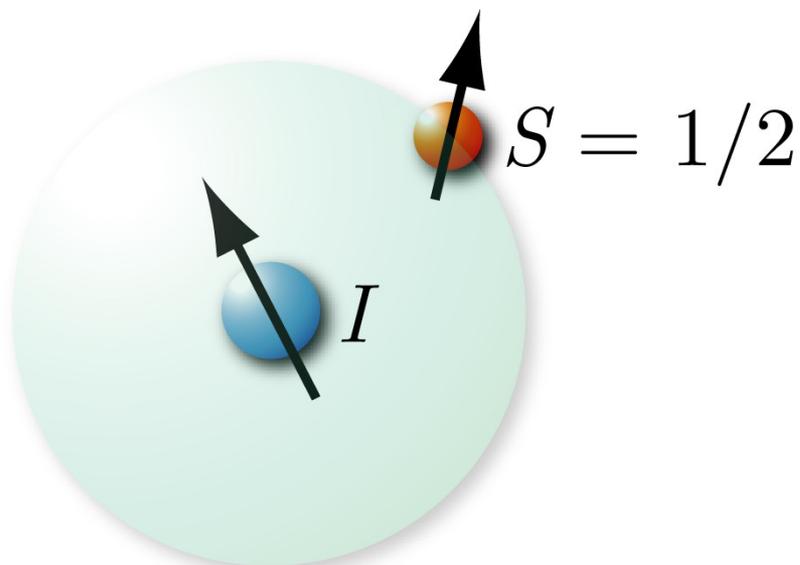
ゲージ変換： $U(1)_G$       スピン回転： $SO(3)_S$

状態は位相 $\varphi(U(1)_G)$ とスピンの回転角度 $\alpha(SO(3)_S)$ を決めると決まる（ハミルトニアンは不変）： $U(1)_G \times SO(3)_S$  対称性の破れ

# スピノルBEC

原子のスピノ自由度が生きているようなBECを考える

超微細相互作用により核と電子のスピノが結合する( $F = I + S + L$ )

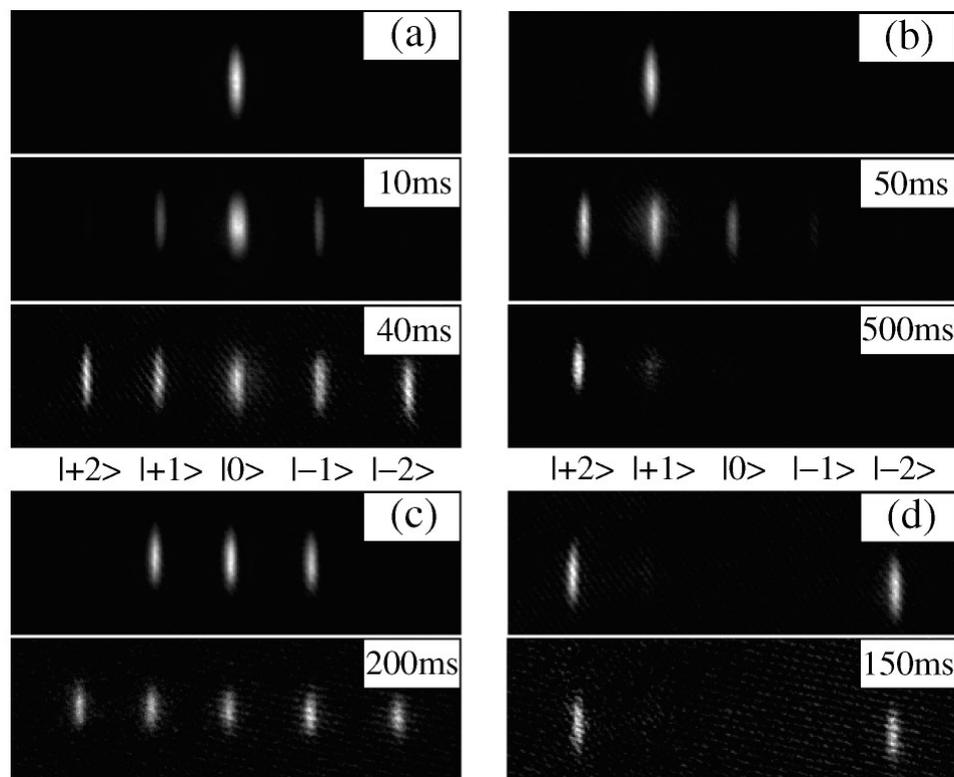


$^{87}\text{Rb}, ^{23}\text{Na},$ $^7\text{Li}, ^{41}\text{K}$	$F=1, 2$
$^{85}\text{Rb}$	$F=2, 3$
$^{133}\text{Cs}$	$F=3, 4$
$^{52}\text{Cr}$	$S=3, I=0$

# スピノル・スピノルBEC

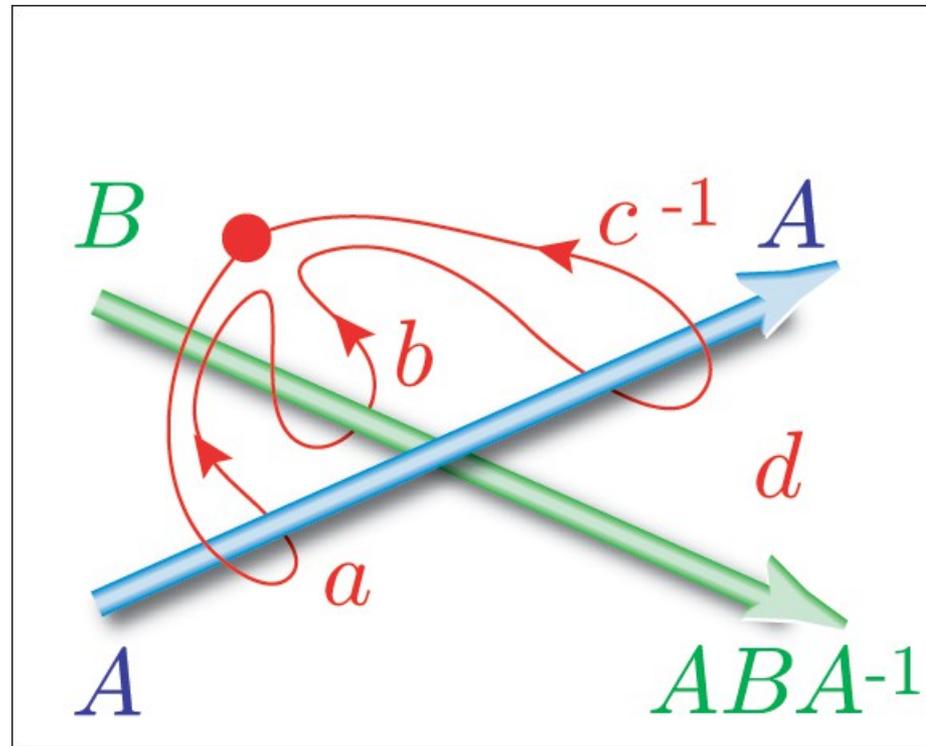
$$\text{5成分BEC: } \Psi = (\Psi_2, \Psi_1, \Psi_0, \Psi_{-1}, \Psi_{-2})^T$$

$F=2$   $^{87}\text{Rb}$  スピノルBECのス  
ピンダイナミクスが観測  
されている



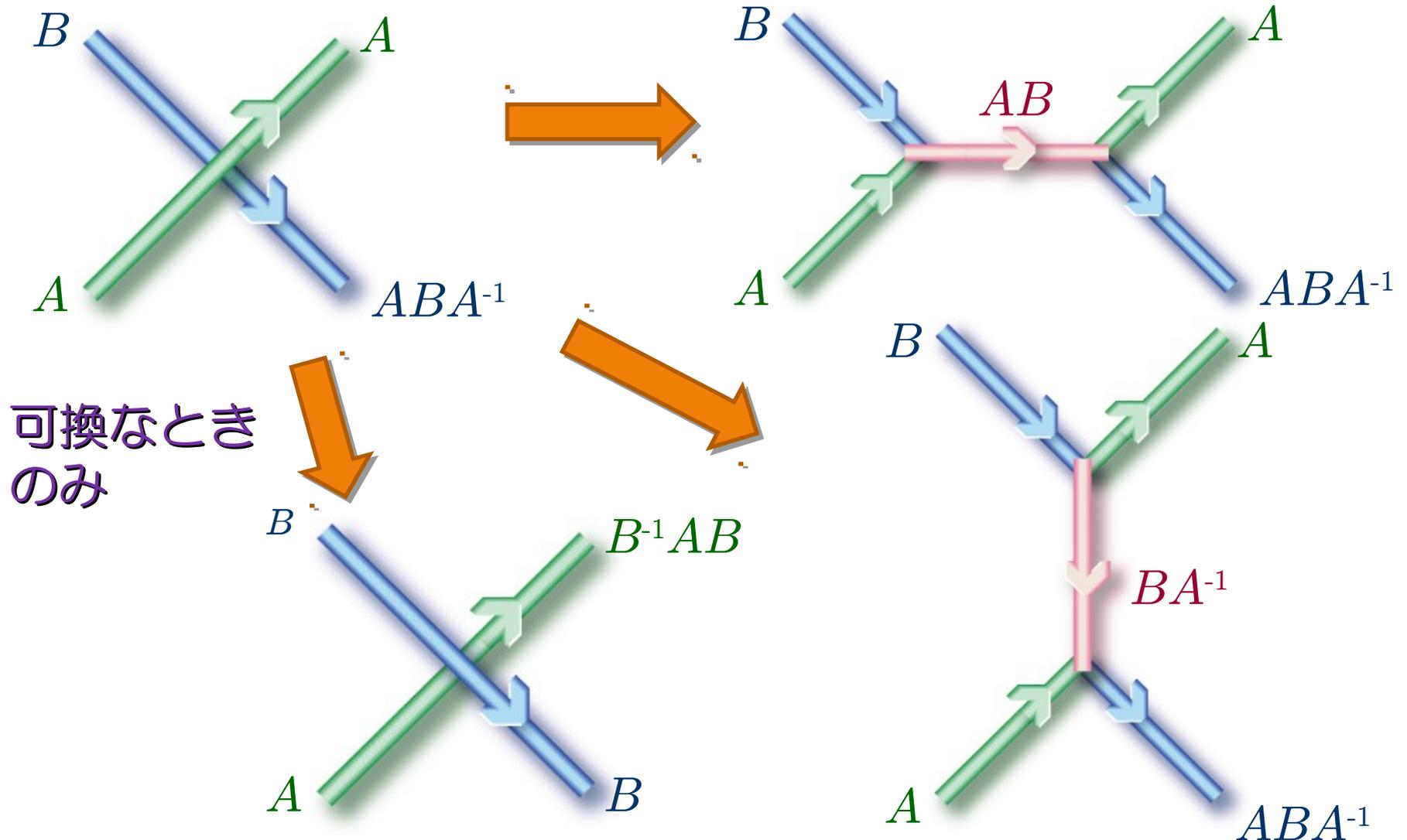
H. Schmaljohann et al. PRL **92**, 040402 (2004)

# 代数的考察

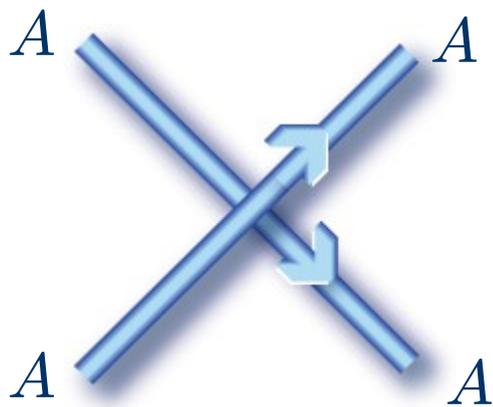


経路  $d$  は渦  $B$  を  $ABA^{-1}$  とみなす (共役類)

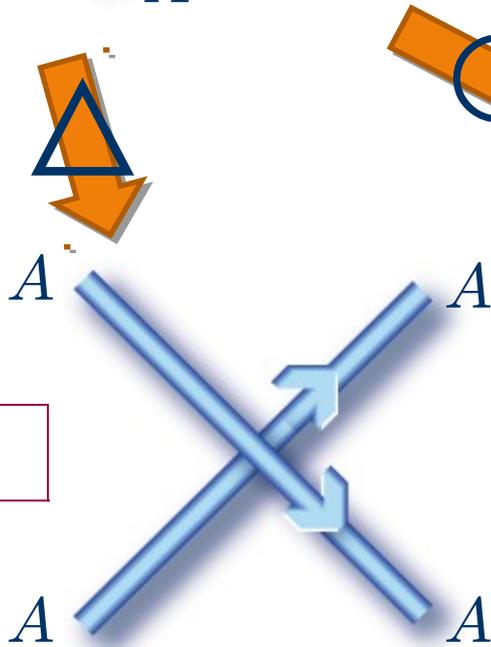
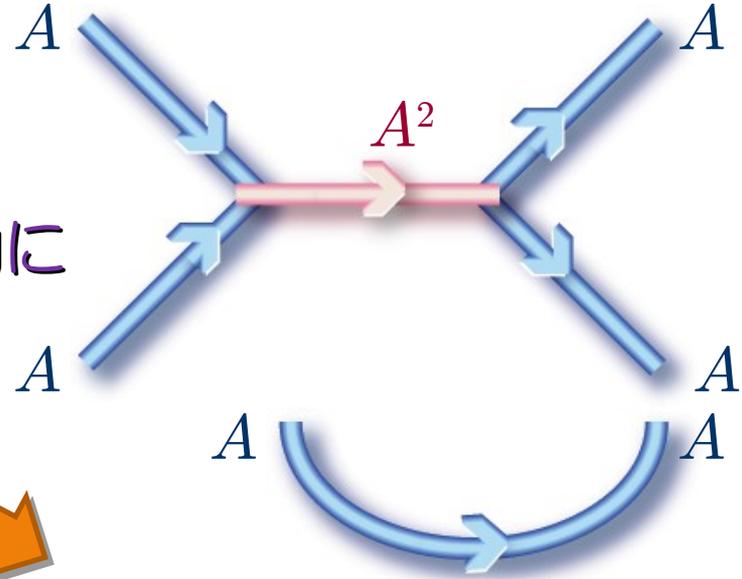
# 量子渦の衝突



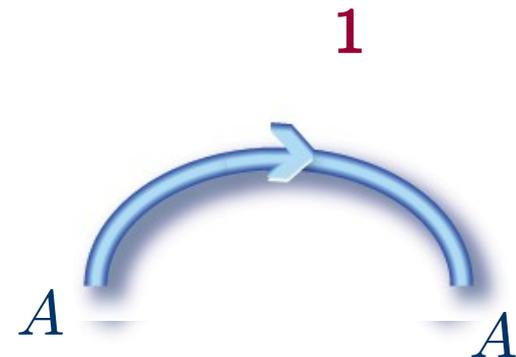
# 同じ渦の衝突



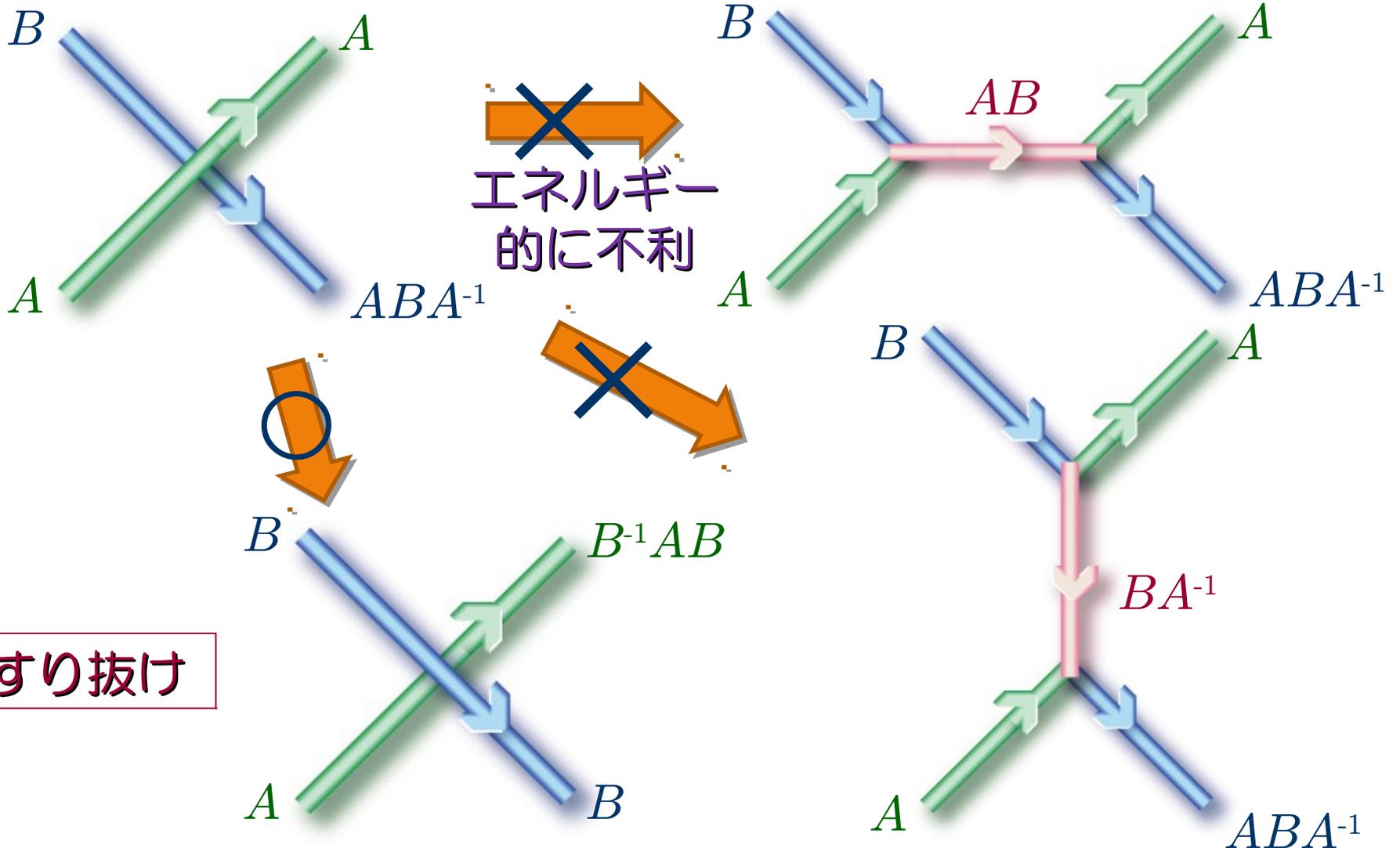
~~→~~  
エネルギー的に不利



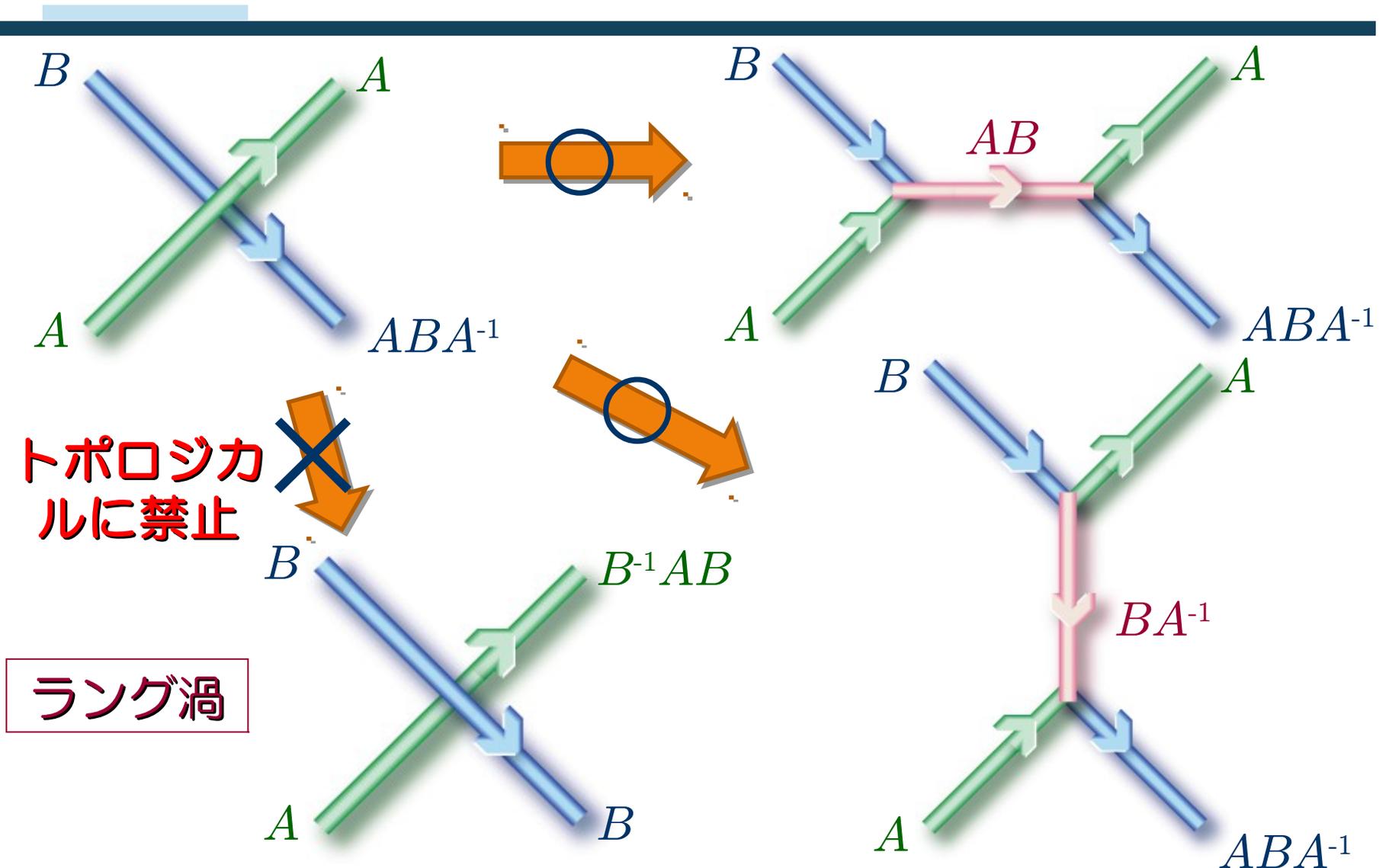
再結合



# 可換な渦の衝突

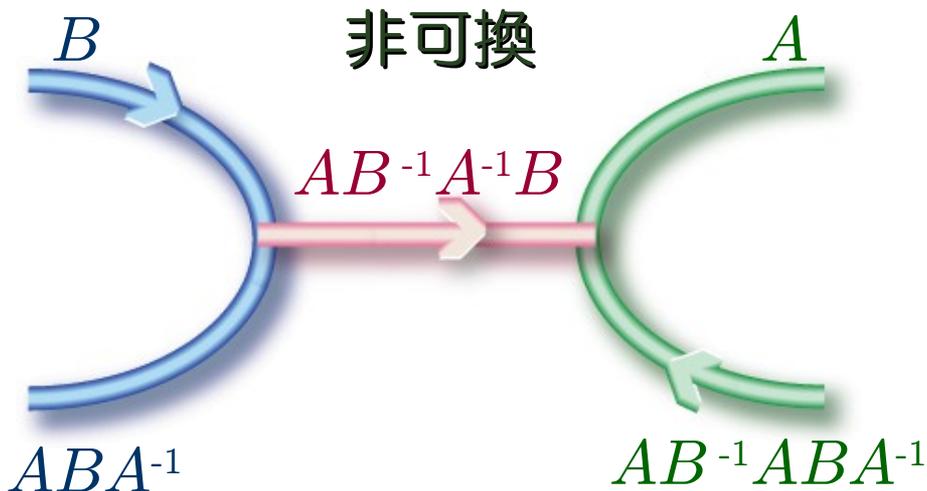
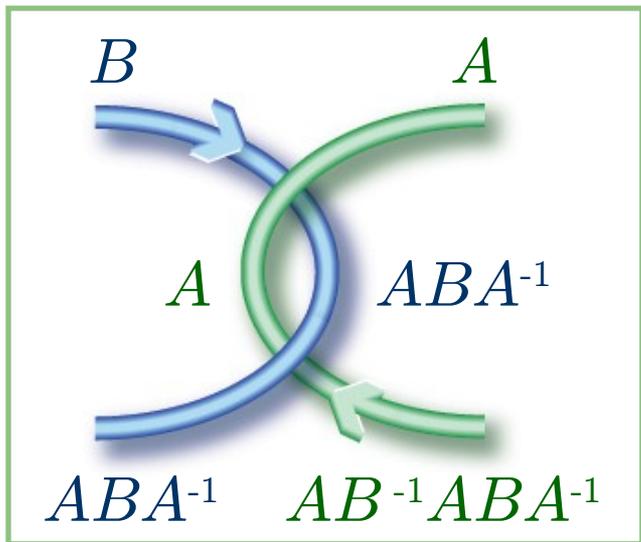


# 非可換量子渦の衝突



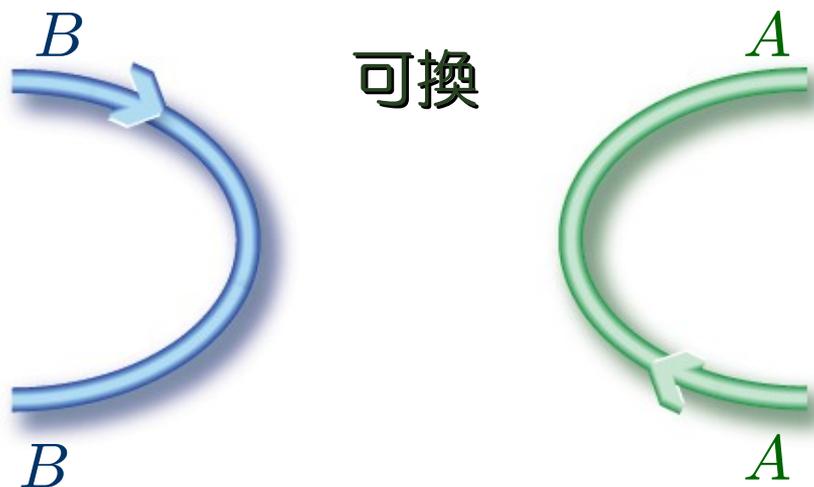
ラング渦

# 絡み目渦



非可換

非可換な絡み目は  
ほどけない



可換

絡み数に対応した新たな  
トポロジカル不変量の定  
義ができるかもしれない

# Cyclic相 vs. Singlet-trio凝縮相

$$c_1 > 0, c_2 > 0$$

M. Koashi, and M. Ueda. PRL **84**, 1066 (2000)

Singlet-trio凝縮相 ( $U(1)$ 対称性のみの破れ)

$$|\Psi\rangle = \left[ e^{i\varphi} \left( \frac{\sqrt{2}\hat{a}_0(\hat{a}_0^{\dagger 2} - 3a_1^\dagger a_{-1}^\dagger - 6a_2^\dagger a_{-2}^\dagger) + 3\sqrt{3}(a_1^{\dagger 2} a_{-2}^\dagger + a_{-1}^{\dagger 2} a_2^\dagger)}{\sqrt{35}} \right) \right]^{N/3} |0\rangle$$

1 $\mu$ G程度の磁場で転移

Cyclic相 ( $U(1) \times SO(3)$ 対称性の破れ)

$$\Psi = e^{i\varphi} e^{-i\hat{F}\cdot\alpha} \begin{pmatrix} i/2 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/2 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi\rangle = \left[ \sum_m \Psi_m a_m^\dagger \right]^N |0\rangle$$

Nematic相は完全ゼロ磁場下でpairとなる

# Nematic相 vs. Singlet-pair凝縮相

$$c_1 > 0, c_2 < 0$$

Singlet-pair凝縮状態

$$|\Psi\rangle = \left[ e^{i\varphi} \left( \frac{\hat{a}_0^{\dagger 2} - 2a_1^\dagger a_{-1}^\dagger + a_2^\dagger a_{-2}^\dagger}{\sqrt{5}} \right) \right]^{N/2} |0\rangle$$

1 $\mu$ G程度の磁場で転移

Nematic状態

$$|\Psi\rangle = \left[ \sum_m \Psi_m a_m^\dagger \right]^N |0\rangle$$

$$\Psi = e^{i\varphi} e^{-i\hat{F}\cdot\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2}$$

# Cyclic相の特徴的な波動関数の形

スピン回転軸の方向を固定すると

$$\frac{\hat{S}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{e^{i\varphi} e^{-i\hat{F}_z \phi}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} e^{i\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{S} = e^{i\varphi} e^{-i\hat{F} \cdot \alpha}$$

粒子数比1:2の2成分BEC

# 渦に対する特徴的な波動関数の形

1/2スピン渦

$$\frac{\hat{S}}{2} \begin{pmatrix} i \exp[i\theta] \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ i \exp[-i\theta] \end{pmatrix}$$

1/3渦

$$\frac{\hat{S}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \exp[i\theta] \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2/3渦

$$\frac{\hat{S}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \exp[i\theta] \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S} = e^{i\varphi} e^{-i\hat{F}\cdot\alpha}$$

Vortex	Mass circulation ( $h/m$ )	Spin circulation ( $h/m$ )	Core
1/2 – spin	0	1/2	Uniaxial-Nematic
1/3	1/3	1/3	Ferromagnetic-2
2/3	2/3	2/3	Ferromagnetic-1